前　言

20 世纪 80 年代(特别是 90 年代)以来,很多物理学家和数学家对 Ginzburg-Landau(金兹堡－朗道)方程表现出很大的兴趣和关注,对于 Ginzburg-Landau 方程(以下简称 GL 方程)的物理性质和数学理论进行大量深入的研究,发表了大量的文章,取得了丰硕的成果.例如对于 GL 方程长时间出现的不稳定和混沌现象的分析和数值计算,GL 方程整体解和整体吸引子的存在性,惯性流形和近似惯性流形的存在性及其维数的估计,吸引子水平集的 Hausdorff 测度估计等.GL 方程之所以受到如此广泛重视,作者以为它包含非常广泛而深刻的物理内容,如 Benard 对流问题, Taylor-Couette 流动,平面 Poiseuill 流,化学反应的湍流问题, Kuramoto-Sivashinsky 方程的某种临界状态以及超导中的涡旋问题,以及它的模型方程与调和映射问题紧密相关等.

本书旨在让读者了解 GL 方程物理背景的基础上,用比较简单明了、深入浅出的方法和尽量少的篇幅来介绍当前研究 GL 方程的主要内容、典型方法以及所得到的最新成果,其中包括作者及合作者的一些结果.在第二、三章中介绍一维和高维 GL 方程的整体解及当 $t\to\infty$ 时解的渐近性态.第四章介绍超导中的 GL 方程.第五章介绍 GL 模型方程和调和映射的紧密联系.

由于 Ginzburg-Landau 方程研究的内容十分丰富和非常广泛,研究方法多样,研究结果层出不穷,再加上目前国内国际上还没有一本关于 GL 方程的专著,由于作者现有的水平和能力,本书难免存在许多不妥之处,敬请读者批评和指正.

最后,我要衷心感谢周毓麟院士、肖玲教授、常谦顺教授等,他们对本书的出版给予热情的支持和帮助,并提出了许多宝贵的意见.

郭柏灵

2001 年 9 月于北京

目　　录

第一章　Ginzburg-Landau 方程的物理背景

Ginzburg-Landau 方程具有十分丰富的物理背景和内涵，近20年来特别引人注目．在这一章里我们仅对 Benard 对流[1]，Tayor-Couette 流[2]，平面 Poiseuille 流[3]以及化学湍流的问题[4]如何导致 GL 方程作一简要的介绍，其他的在非平衡态中的相变，等离子体中的漂移耗散波，以及在发热的放电器中的电离波等，可在文献[5—7]中找到，至于超导中的 Ginzburg-Landau 方程，我们也作一点概况性的介绍．

§1　Benard 对流问题

这是一个非常古典的流动问题，也是一个有非常重要实际研究价值的问题．1900 年 Benard 最早对这个问题作了实验观察，他观察了一个圆盘容器内一层厚度不到一毫米的薄液体层在底部进行加热时的热对流情况．容器底部是一块加热并保持常温的金属平板，液体的上表面是自由表面，上表面的温度低于底部平板处的温度，当这层液体上表面温度差达到某一临界值时，液体内开始形成规则排列成蜂窝状泡结构，其中液体从涡泡的中心处上升，在顶部向外移动，然后在外面涡泡垂直边界处下降，到底部后再向中心处移动，这种涡泡被称为 Benard 涡泡．1950 年 Tippelskirch 发现通常在液体中的涡泡中心处流动是向上的，而在气体中通常在中心处的流动是向下的，其原因是因为液体的黏性随温度的增大而减少，而气体的黏性则随温度的增加而增加．

Lord Rayleigh 于 1916 年从理论上第一个研究了这种热对流现象，他找到了一个确定稳定性的无量纲参数，现被称为 Rayleigh 数，它定义为

$$Ra = \frac{g\alpha(T_0 - T_1)d^2}{\nu\kappa},$$

这里 d 是液体片的厚度，T_0，T_1 分别是下上表面的温度，g 是重力加速度，α 是体积膨胀系数，κ 是热扩散系数，ν 是运动黏性系数.

1956 年 Bloch 等对热对流过程进行了详细的观察，发现随着底部边界温度的增加，即随着 Rayleigh 数的增加，出现了许多形态各异的图像，整个过渡过程是：

(1)当 $Ra < Ra_c$ 时，流体是静止的，没有热对流产生，Ra_c 是临界 Rayleigh 数.

(2)当 $Ra_c < Ra < Ra_w$ 时，出现定常涡卷的流动，

(3)当 $Ra_w < Ra < Ra_q$ 时，出现定常双模态流动，

(4)当 $Ra_q < Ra < Ra_l$ 时，出现振动双模态流动，

(5)当 $Ra_l < Ra$ 时，出现湍流运动，

其中 Ra_w，Ra_q，Ra_l 均为物理常数.

忽略黏性耗散所引起的热传导，运用 Boussinesq 近似，可得描述 Benard 对流的如下的 Newton-Boussinesq 方程为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0, & (1.1) \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{u}) = -\nabla\left(\dfrac{p}{\rho_r} + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}\right) + \alpha g \boldsymbol{z} T + \nu \nabla^2 \boldsymbol{u}, & \\ \boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \boldsymbol{u}, & (1.2) \\ \dfrac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla T - \beta w = \kappa \nabla^2 T, & (1.3) \end{cases}$$

其中 $T(\boldsymbol{r},t)$，$p(\boldsymbol{r},t)$和 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$分别表示扰动的温度，压力和速度. κ 为热传导，ν 为黏性，$\boldsymbol{z}$ 为垂直方向的单位向量，$w = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{z}$，上述定态方程由线性温度分布决定：

$$\frac{d\,\overline{T}(z)}{dz} = -\beta, \tag{1.4}$$

$$\frac{d\bar{p}(z)}{dz} = -\rho r g\{1 - \alpha(\bar{T} - Tr)\}, \tag{1.5}$$

$$\boldsymbol{u} = 0, \tag{1.6}$$

其中 α 为流体的立方展开系数, ρ_r, Tr 为参考的密度和温度,坐标 z 表示垂直于 x, y 平面的坐标,给定边界条件为

$$w = 0,\quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0,\ T = 0,\ z = 0, d. \tag{1.7}$$

设 R_{cr} 为临界的 Rayleigh 数,并在 $R - R_{cr} = 0(\epsilon)$ 附近考虑,设问题(1.1)—(1.3)的中性解具有形式

$$\begin{cases} w_0 = \{w(x, y, T)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + w^*(x, y, T)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\}\sin\dfrac{\pi z}{d}, \\ T_0 = \dfrac{\beta_0 d^2}{k(\pi^2 + k^2 d^2)}(we^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + w^* e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}})\sin\dfrac{\pi z}{d}, \\ u_0 = \dfrac{ik_x\pi}{k^2 d}(we^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} - w^* e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}})\cos\dfrac{\pi z}{d}, \\ v_0 = \dfrac{ik_y\pi}{k^2 d}(we^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} - w^* e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}})\cos\dfrac{\pi z}{d}, \\ \dfrac{p_0}{\rho_r} = \dfrac{-\pi k}{k^2 d}\left(\dfrac{\pi^2}{d^2} + k^2\right)(we^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + w^* e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}})\cos\dfrac{\pi z}{d}, \\ \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} = k_x x + k_y y, \end{cases} \tag{1.8}$$

其中振幅 w 为位置和时度的慢度函数,

$$X = \epsilon x,\ Y = \epsilon y,\ T = \epsilon^2 t, \tag{1.9}$$

β_0 为最低温度梯度常数.由(1.9)有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} \to \dfrac{\partial}{\partial t} + \epsilon^2 \dfrac{\partial}{\partial T}, \\ \nabla_x \to \nabla_{1x} + \epsilon\nabla_{1X}, \nabla_{1x} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}\right), \nabla_{1X} = \left(\dfrac{\partial}{\partial X}, \dfrac{\partial}{\partial Y}\right) \end{cases} \tag{1.10}$$

为使方程组(1.1)—(1.3)化为单个方程,令 $\nabla\times\ \nabla\times$ 作用于(1.2)再作和 z 的向量点积,然后作用算子 $\left(\dfrac{\partial}{\partial t} - \kappa\nabla^2\right)$,利用方程(1.3)可得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\nu\nabla^2\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-\kappa\nabla^2\right)\nabla^2 w-\alpha g(\beta_0+\varepsilon^2\beta_2)\nabla_1{}^2 w$$
$$=-\alpha g\nabla_1{}^2(\boldsymbol{u}\cdot\nabla T)+\left(\frac{\partial}{\partial t}-k\nabla^2\right)[\boldsymbol{z}\cdot(\nabla\times\nabla\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{u})]. \qquad (1.11)$$

因变量依 ε 作幂级数展开得

$$f=\varepsilon f_0+\varepsilon^2 f_1+\varepsilon^2 f_2+\cdots,\ f=(u,v,w,T,p), \qquad (1.12)$$

其中 f_0 为中性解(1.8).方程(1.11)在交换(1.9),(1.10)下可得

$$(\mathscr{L}_0+\varepsilon\mathscr{L}_1+\varepsilon^2\mathscr{L}_2)(w_0+\varepsilon w_1+\varepsilon^2 w_2)$$
$$=-\alpha g\varepsilon(\nabla_{1x}^2+2\varepsilon\nabla_{1x}\nabla_{1X})\{u_0\cdot\nabla T_0+\varepsilon(\boldsymbol{u}_1\cdot\nabla T_0+\boldsymbol{u}_0\cdot\nabla T_1)\}+\varepsilon\left\{\frac{\partial}{\partial t}-\kappa\left(\nabla_{1x}^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+2\varepsilon\nabla_{1x}\cdot\nabla_{1X}\right)\right\}[\tilde{\nabla}\times\tilde{\nabla}\times(\boldsymbol{\Omega}_0\times\boldsymbol{u}_0)+\varepsilon(\boldsymbol{\Omega}_1\times\boldsymbol{u}_0)+\varepsilon(\boldsymbol{\Omega}_0\times\boldsymbol{u}_1)\}\cdot\boldsymbol{z}], \qquad (1.13)$$

其中算子

$$\mathscr{L}_0=\left\{\frac{\partial}{\partial t}-\nu\left(\nabla_{1x}^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right\}\left\{\frac{\partial}{\partial t}-\kappa\left(\nabla_{1x}^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right\}\times\left(\nabla_{1x}^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-\alpha g\beta_0\nabla_{1x}^2,$$

$$\mathscr{L}_1=\boldsymbol{z}\left[\left\{\frac{\partial}{\partial t}-\nu\left(\nabla_{1x}^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right\}\left\{\frac{\partial}{\partial t}-\kappa\left(\nabla_{1x}^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right\}-\kappa\left\{\frac{\partial}{\partial t}-\nu\left(\nabla_{1x}^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right\}\left(\nabla_{1x}^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-\nu\left\{\frac{\partial}{\partial t}-\kappa\left(\nabla_{1x}^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right\}\left(\nabla_{1x}^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-\alpha g\beta_0\right]\nabla_{1x}\nabla_{1X},$$

$$\mathscr{L}_2=\left[\left\{\frac{\partial}{\partial t}-\nu\left(\nabla_{1x}^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right\}\left\{\frac{\partial}{\partial t}-\kappa\left(\nabla_{1x}^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right\}-\kappa\left\{\frac{\partial}{\partial t}-\nu\left(\nabla_{1x}^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right\}\left(\nabla_{1x}^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-\nu\left\{\frac{\partial}{\partial t}-\kappa\left(\nabla_{1x}^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right\}\times\left(\nabla_{1x}^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-\alpha g\beta_0\right]\nabla_{1X}^2+\left[\alpha\frac{\partial}{\partial t}-(\kappa+\nu)\left(\nabla_{1x}^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right]\times\left(\nabla_{1x}^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial}{\partial T}+4\left[\nu\kappa\left(\nabla_1{}^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-\kappa\left\{\frac{\partial}{\partial t}-\nu\left(\nabla_1^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right\}\right.$$

$$-\nu\left\{\frac{\partial}{\partial t}-\kappa\left(\nabla_1^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right\}\Big]\times(\nabla_{1x}\cdot\nabla_{1X})^2-\alpha g\beta_2\nabla_{1x}{}^2,$$

$$\tilde{\nabla}=\nabla_{1x}+\varepsilon\nabla_{1X},\tag{1.14}$$

线性平衡项产生中性解(1.8),注意第一个非线项产生二阶调和项,可求出二阶调和项 $f_1{}^{(2)}$ 为

$$w_1^{(2)}=u_1^{(2)}=v_1^{(2)}=0,$$

$$T_1^{(2)}=-\frac{\beta_0 d^3}{2\pi k^2(\pi^2+k^2d^2)}ww^*\sin\frac{2\pi}{d},$$

$$p_1^{(2)}=\left\{\frac{\alpha g\beta_0 d^4}{4\pi^2k^2(\pi^2+k^2d^2)}+1\right\}ww^*\cos\frac{2\pi}{d}\tag{1.15}$$

$$+\frac{\pi^2}{k^2d^2}(w^2e^{2i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}+w^{*2}e^{-2i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}).$$

由(1.8)和(1.15)可得(1.13)的 $O(\varepsilon^2)$平衡条件为:

$$\mathscr{L}_0w_2=-\mathscr{L}_2w_0+\frac{\alpha g\beta\cdot d^2k^2}{2\kappa^2(\pi^2+k^2d^2)}ww^*(we^{-i\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{x}}$$

$$+w^*e^{i\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{x}})\sin\frac{\pi z}{d}+\text{其他项}.\tag{1.16}$$

其边界条件

$$w_2=\frac{\partial^2w_2}{\partial z^2}=\frac{\partial^4w_2}{\partial z^4}=0.\tag{1.17}$$

(1.16)中的其他项为高阶调和项,不包含对应于算子其边界条件(1.17)的特征函数.(1.16)右端的第一、第二项包含算子 $\mathscr{L}_0$ 的自然特征函数,因此可解条件为

$$\hat{\mathscr{L}}_2w=\frac{\alpha g\beta_0d^2k^2}{2\kappa^2(\pi^2+k^2d^2)}w^2w^*,\tag{1.18}$$

其中

$$\hat{\mathscr{L}}_2=-(\nu+h)\left(\frac{\pi^2}{d^2}+k^2\right)^2\frac{\partial}{\partial T}+12\nu k\left(\frac{\pi^2}{d^2}+k^2\right)$$

$$\cdot(k\cdot\nabla_x)^2+\alpha g\beta_2k^2.\tag{1.19}$$

引入无量纲化如下:

$$w=\left(\frac{\kappa}{d}\right)\overline{w},\boldsymbol{k}=\frac{1}{d}\hat{k}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{1}{d}\boldsymbol{n},$$

$$T=\left(\frac{d^2}{\kappa}\right)\overline{T},x=dx,$$

令 $\beta_2=\chi\beta_0,\frac{\nu}{\kappa}=p$,(prandtl 数),我们有

$$\frac{\partial(p+1)}{p}\quad\frac{\partial\overline{w}}{\partial T}-8(\boldsymbol{n}\cdot\nabla_x)^2\overline{w}=(3\pi^2\chi-\overline{w}'\cdot\overline{w}^*)\overline{w}. \quad (1.20)$$

如令 $X=\varepsilon x,Y=\sqrt{\varepsilon}y$,则由(1.20)可得

$$\frac{\partial w}{\partial T}-\left(\frac{\partial}{\partial X}-\frac{i}{\sqrt{2}\pi}\frac{\partial^2}{\partial Y^2}\right)^2 w=w-w^2w^*, \quad (1.21)$$

其中

$$w=w(\varepsilon x,\sqrt{\varepsilon}y,\varepsilon^2t). \quad (1.22)$$

§2 Taylor-Couette 流动

两个转动的同心圆柱间的流动,即 Taylor-Couette 流,是一个非常古典的流动稳定性问题,多年来,它一直作为一个范例而成为理论和实验研究的对象.1890 年 Couette 从研究流体的黏性开始,观察了内圆柱固定而外圆柱转动的两圆柱流体的运动状况,他发现只要外圆柱转速(角速度 Ω_2)不超过某一个临界值时,扭矩与 Ω_2 成正比,而 Ω_2 超过这个临界值时,扭矩迅速上升,这就是说此时流体的黏性系数从一个不变的常数值突然发生了很明显的变化,事实上流体从层流状态转变为湍流状态.1896 年 Mallock 则研究了外圆柱固定而内圆柱以角速度 Ω_1 转动的情况,他发现对每一个 Ω_1 都有不稳定发生.最早从理论上研究理想流体的旋转运动的稳定性问题的是 Lord Rayleigh(1880,1916),他发现流动的稳定性与转动的角速度 Ω 和离旋转轴的距离的平方的乘积 Ωr^2 的变化有关,他的结论是如果 Ωr^2 随半径增加而增加,流动是稳定的,而如果 Ωr^2 随半径的增加而减少,则流动是不稳定的.此后,G.I.Taylor 在 1923 年的第一届国际理论和应用力学大会上发表

了他的第一篇系统讨论两个转动的同心圆柱间的黏性流体的流动稳定性的文章,使这个问题的研究取得了重要的进展.他用线性化的扰动理论计算的结果与实验测量的数据比较,发现符合得很好.以后,Donnlly (1958,1960),Coles(1961,1965)Collab 和 Swinney (1975)等人进一步作了大量的实验研究和观测,他们发现在不同条件下整个过渡的现象有很大的差别,这里分两种情况进行讨论.

(1)两个圆柱的转动方向是相同的情况

Coles 发现当内圆柱比外圆柱转动更快时(包括外圆柱固定的情况),如果逐渐增加内圆柱的转动角速度 Ω_1,当它达到某个临界速度时,即达到一个临界雷诺数 Re_c 时,两个圆柱间的流动出现了沿轴向规则分布的环形涡旋(通常称为 Taylor 涡旋),这种环形涡旋总是成对出现,相邻的涡旋转动方向相反,如果再继续增加内圆柱的转动速度,直到另一个转动雷诺数 Re_w 时,在沿转动方向上开始出现一种规则的波状运动,这种波以大约是内圆柱角速度的三分之一的角速度绕轴转动.随着内圆柱的转速再进一步增加,沿轴向环形涡旋数目逐渐减少,而沿转动方向的波数却不断增加,同时出现准周期波状运动,当内圆柱转动速度一直增加到某个数值时,即 Re 达到 Re_t 时,流动就出现湍流状态.

(2)两个圆柱的转动方向是相反的情况

此时流动一般是不稳定的.当内圆柱比外圆柱转动得更快时,情况和上面所说的类似,不过此时观察到的环形涡旋并不充满整个从内圆柱到外圆柱的壁面之间,而是在内圆柱的壁面和流场中某一区域之间.如果外圆柱比内圆柱转动得更快时,流场中会出现各种不同的情况,例如,调制波,螺旋波,间歇分布的螺旋湍流带等,这种螺旋型的湍流带是和同样是螺旋型的层流带交替相间分布的.随着外圆柱的转速进一步增加,这种局部湍流区域逐步扩大,最后发展成整个流场都是湍流的状态.

Couette-Taylor 流可用 Navier-Stokes 方程来描述:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+(V\cdot\nabla)V+\frac{1}{\rho}\nabla p=\nu\Delta V+f, \tag{2.1}$$

$$\nabla\cdot V=0, \tag{2.2}$$

具边界条件

$$V_r=V_z=0, V_\theta=\Omega_j R_j, r=R_j, j=1,2, \tag{2.3}$$

其中 ρ 为密度(常数), ν 为动力黏性, p 为压力, V 为流体质点的速度向量. f 为单位质量的外力密度, 函数 V, p 为 (x,t) 的函数, $x\in Q, y\in\Sigma, z\in R$, 在柱坐标 (r,θ) 下, 横截面 Σ 定义为 $R_1<r<R_2, \theta\in\pi^1$, 这里 π^1 表示圆 $\frac{R}{2\pi Z}$, R_1, R_2 表示圆柱的内外半径, 在柱坐标下, $V(x,t)$ 可写为 (v_r, v_θ, v_z), 在边界条件(2.3)中, $\Omega_j, j=1,2$ 分别表示内外圆柱的角速度, 如图 2.1 所示.

现考虑方程(2.1)、(2.2)的无量纲表示, 设 $\Omega_1\neq 0$, 令 $d=R_2-R_1$, $R_1\Omega_1$ 为内圆柱速度,

$\frac{d^2}{\nu}$ 为黏性时间, $\rho\nu R_1\frac{\Omega_1}{d}$,

分别称为长度, 速度, 时间, 压力, 作如下无量纲参数:

$$\Omega=\frac{\Omega_2}{\Omega_1}, \eta=\frac{R_1}{R_2}, R=\frac{R_1\Omega_1 d}{\nu}, \tag{2.4}$$

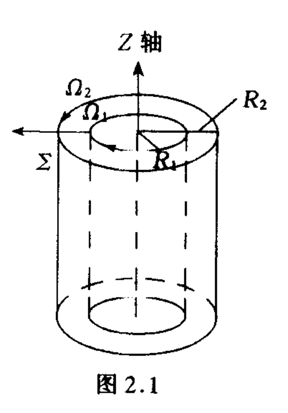


图 2.1

其中 R 被称为 Rynolds 数. 于是在无外力下, (2.1)、(2.2)为

$$\begin{cases}\frac{\partial V}{\partial t}+R(V\cdot\nabla)V+\nabla p=\triangle V,\\ \nabla\cdot V=0,\end{cases} \tag{2.5}$$

边界条件为

$$\begin{cases}V_r=V_z=0,\ V_\theta=1,\ r=\frac{\eta}{1-\eta},\\ V_\theta=\frac{\Omega}{\eta},\ r=\frac{1}{1-\eta}.\end{cases} \tag{2.6}$$

方程组(2.5)在柱坐标下可写为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v_r}{\partial t}=\Delta v_r-\dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial\theta}-\dfrac{v_r}{r^2}-\dfrac{\partial p}{\partial r}-R\left[v_r\dfrac{\partial v_r}{\partial r}+\dfrac{v_\theta}{r}\dfrac{\partial v_r}{\partial\theta}+v_z\dfrac{\partial v_r}{\partial z}-\dfrac{v_\theta^2}{r}\right],\\ \dfrac{\partial v_\theta}{\partial t}=\Delta v_\theta+\dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial v_r}{\partial\theta}-\dfrac{v_\theta}{r^2}-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial p}{\partial\theta}-R\left[v_r\dfrac{\partial v_\theta}{\partial r}+\dfrac{v_\theta}{r}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+v_z\dfrac{\partial v_\theta}{\partial z}+\dfrac{v_r v_\theta}{r}\right],\\ \dfrac{\partial v_z}{\partial t}=\Delta v_z-\dfrac{\partial p}{\theta z}-R\left[v_r\dfrac{\partial v_z}{\partial r}+\dfrac{v_\theta}{r}\dfrac{\partial v_z}{\partial\theta}+\dfrac{\partial v_z}{\partial z}v_z\right]\\ \quad\cdot\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\dfrac{\partial v_z}{\partial z}=0,\end{cases}\tag{2.7}$$

其中 $\Delta=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[r\dfrac{\partial}{\partial r}\right]+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$.

对于方程(2.5)可在定常解 Couette 流附近作扰动.令

$$V=V^{(0)}+v,p=p^{(0)}+q,\tag{2.8}$$

其中

$$V^{(0)}=(0,v^{(0)}(x),0),v^{(0)}(x)=(J_2-J_1)X+\frac{(J_1+J_2)}{2},\tag{2.9}$$

$$J_j=R_j\Omega_j\frac{d}{\nu}\sqrt{2(1-\eta)},\quad j=1,2.$$

由此可得(v,q)满足下列方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}=\tilde{\Delta}v-v^{(0)}(x)\dfrac{\partial v}{\partial\eta}+\begin{pmatrix}v^{(0)}(x)u_\eta+\dfrac{u_y^2}{2}\\ -v^{(0)}_{(x)}u_x+f(y)\\ 0\end{pmatrix}-(v\cdot\nabla)v-\tilde{\nabla}q,\\ \nabla\cdot v=0,\\ v|_{x=\pm\frac{1}{2}}=0,f(y)\text{为任意 }\nu,\end{cases}\tag{2.10}$$

对上述方程组(2.10)线性化,并寻找特征模

$$\begin{cases}v=\hat{v}(x)e^{\sigma t+i(\alpha z+\beta y)},\\ q=\hat{p}(x)e^{\sigma t+i(\alpha z+\beta y)},\\ f=\hat{c}e^{\sigma t+i(\alpha z+\beta y)},\end{cases}\tag{2.11}$$

可得特征值 σ 满足的方程为

$$\begin{cases}(D^2-\alpha^2-\sigma-i\beta v^{(0)}(x))\hat{u}_x+v^{(0)}(x)\hat{u}_y-D\hat{p}=0,\\(D^2-\alpha^2-\sigma-i\beta v^{(0)}(x))\hat{u}_y+(J_1-J_2)\hat{u}_x+\hat{c}=0,\\(D^2-\alpha^2-\sigma-i\beta v^{(0)}(x))\hat{u}_z-i\alpha\hat{p}=0,\\D\hat{u}_x+i\beta\hat{u}_y+i\alpha\hat{u}_z=0,\\\hat{u}_x+\hat{u}_y+\hat{u}_z=0,x=\pm\frac{1}{2}.\end{cases}\tag{2.12}$$

设临界特征值为零,且临界波数在径度方向也为零,此时特征模为

$$\xi_0=\hat{v}(x)e^{i\alpha_c z},\tag{2.13}$$

设 Couette 流的扰动 v 为

$$v=A(y,z,t)\xi_0+\overline{A}(y,z,t)\overline{\xi}_0+\Phi(\mu,A,\overline{A},\partial_y,\partial_z),\tag{2.14}$$

其中考虑振幅函数 A 的变元,y,z 均为慢变变元,∂_y,∂_z 为小参量,$(\partial_yA,\partial_zA,\partial^n_{y\cdots y,z\cdots z}A,\partial_y\overline{A},\partial_z\overline{A},\cdots)$ 在展开中均为独立的,Φ 通常表示为中心流形,μ 为物理常数,考虑主要部分可得如下形式的 Ginzburg－Landau 方程

$$\frac{\partial A}{\partial t}=\mu A+\frac{\partial^2A}{\partial z^2}+\frac{\partial^2A}{\partial y^2}+ia\frac{\partial^2A}{\partial y\partial z}-A|A|^2.\tag{2.15}$$

对于临界波数在径度方向不为零,临界特征值为纯虚数的情况下,可设临界特征函数为

$$\xi_0=\hat{U}(x)e^{i(\alpha_c z+\beta_c y)},\xi_1=\hat{V}(x)e^{i(-\alpha_c z+\beta_c y)},\overline{\xi_0},\overline{\xi_1},\tag{2.16}$$

其中 $\hat{V}(x)$ 为 $\hat{U}(x)$ 的虚部,此时 Couette 流的扰动 U 为

$$\begin{aligned}U=&A(y,z,t)\xi_0+\overline{A}(y,z,t)\overline{\xi_0}+B(y,z,t)\xi_1\\&+\overline{B}(y,z,t)\overline{\xi_1}+\Phi(\mu,A,\overline{A},B,\overline{B},\partial_y,\partial_z),\end{aligned}\tag{2.17}$$

可得如下的 Ginzburg-Landau 方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial A}{\partial t}=aA+a_1\dfrac{\partial A}{\partial y}+b_1\dfrac{\partial A}{\partial z}+c_1\dfrac{\partial^2 A}{\partial z^2}+d_1\dfrac{\partial^2 A}{\partial y^2}+e_1\dfrac{\partial^2 A}{\partial y\partial z}+bA\,|A|^2+cA\,|B|^2,\\
\dfrac{\partial B}{\partial t}=aB+a_1\dfrac{\partial B}{\partial y}-b_1\dfrac{\partial B}{\partial z}+c_1\dfrac{\partial^2 B}{\partial z^2}+d_1\dfrac{\partial^2 B}{\partial y^2}-e_1\dfrac{\partial^2 B}{\partial y\partial z}+cB\,|A|^2+bB\,|B|^2,
\end{cases}
\tag{2.18}
$$

其中 $a,a_1,b_1,c_1,d_1,e_1,b,c$ 均为物理常数.

§3 平面 Poiseuille 流

考虑二维不可压缩黏性流体运动,其方程为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial\xi}{\partial t}+\dfrac{\partial\psi}{\partial z}\dfrac{\partial\xi}{\partial x}-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\dfrac{\partial\xi}{\partial z}=\dfrac{1}{R}\nabla^2\xi, & (3.1)\\
\xi=-\nabla^2\psi, & (3.2)
\end{cases}
$$

其中 x 表示平行平面的坐标,z 表示其垂直坐标,$\psi(x,z,t)$为流函数,$R=U_0\dfrac{h}{\nu}$,U_0 为参考最大速度,h 为参考长度,ν 为动力黏性,R 为 Reynolds 数.

引入附加变元

$$
\chi=\varepsilon x,\ \tau=\varepsilon t. \tag{3.3}
$$

设 ψ 可表为

$$
\begin{aligned}
\psi=\ &\phi_0(z,\chi,\tau)+\phi_1(z,\chi,\tau)E+\bar{\phi}_1(z,\chi,\tau)E^{-1}\\
&+\phi_2(z,\chi,\tau)E^2+\bar{\phi}_2(z,\chi,\tau)E^{-2}+\cdots,
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

其中 $E=\exp[i\alpha_c(x-c_rt)]$,$\alpha_c,c_r$ 为物理常数,由方程(3.1)、(3.2)有

$$
\begin{aligned}
\xi=\ &-(\phi''_0+\varepsilon^2\phi_{0\chi\chi})-(\phi''_1-\alpha^2\phi_1+\tau i\alpha\phi_{1\chi}+\varepsilon^2\phi_{1\chi\chi})E-c\cdot c\\
&-(\phi''_2-4\alpha^2\phi_2+4i\alpha\varepsilon\phi_{2\chi}+\varepsilon^2\phi_{2\chi\chi})E^2-c\cdot c\cdots.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

其中我们用到了关系式

$$
\frac{\partial}{\partial x}\rightarrow\frac{\partial}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\chi},\ \frac{\partial}{\partial t}\rightarrow\frac{\partial}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau}. \tag{3.6}
$$

设

$$\begin{cases}\phi_1=\varepsilon^{\frac{1}{2}}\phi_{11}(\chi,\tau,z)+\varepsilon^{\frac{3}{2}}\phi_{13}(\chi,\tau,z)+O(\varepsilon^{\frac{5}{2}}),\\ \phi_2=\varepsilon\phi_{22}(\chi,\tau,z)+O(\varepsilon^2),\\ \phi_0=z-\frac{1}{3}z^3+\varepsilon\phi_{0\tau}(\chi,\tau,z)+O(\varepsilon^2).\end{cases}\tag{3.7}$$

其中 ϕ_{nm} 与 x,t,ε 无关,展开 R 为

$$R=R_c+d_{ir}^{-1}\varepsilon+O(\varepsilon^2),\tag{3.8}$$

这里 d_{ir} 为物理常数,代入(3.1)、(3.2),由比较 $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ 阶数系数得

$$(1-z^2-c_r)\left(\frac{\partial^2\phi_{11}}{\partial z^2}-\alpha_c^2\phi_{11}\right)+2\phi_{11}+\frac{i}{\alpha R_c}\left(\frac{\partial^4\phi_{11}}{\partial z^4}-2\alpha_c^2\frac{\partial^2\phi_{11}}{\partial z^2}+\alpha_c^4\phi_{11}\right)=0.\tag{3.9}$$

边界条件为

$$\phi_{11}=\frac{\partial\phi_{11}}{\partial z}=0,\quad z=\pm1.\tag{3.10}$$

令

$$\phi_{11}=A(\chi,\tau)\psi_1(z),\tag{3.11}$$

其中振幅常数 A 待求,$\psi_1(z)$为已知,它满足方程

$$(1-z^2-c_r)(\psi''_1-\alpha_c^2\psi_1)+2\psi_1+\left(\frac{i}{\alpha_c}R_c\right)(\psi''''_1-2\alpha_c^2\psi''_1+\alpha_c^4\psi_1)=0,\tag{3.12}$$

$$\psi_1(0)=1.\tag{3.13}$$

ε 阶系数为零得

$$(1-z^2-c_r)\left(\frac{\partial^2\phi_{22}}{\partial z^2}-4\alpha_c^2\phi_{22}\right)+2\phi_{22}+\frac{i}{2\alpha_cR_c}\left[\frac{\partial^4\phi_{22}}{\partial z^4}-8\alpha_c{}^2\frac{\partial^2\phi_{22}}{\partial z^2}+16\alpha_c^4\phi_{22}\right]=-\frac{1}{2}A^2[\psi'_1\psi'_1-\psi_1\psi''_1],\tag{3.14}$$

$$\frac{1}{R_c}\frac{\partial^4\phi_{22}}{\partial z^4}=i\alpha_cA\tilde{A}[\psi'_1\tilde{\psi}'_1-\psi_1\tilde{\psi}'_1]''.\tag{3.15}$$

因 ϕ_{22}满足如同 ϕ_{11}的边界条件,使(3.4)的解惟一,令

$$\phi_{22}=A^2\psi_2(z),$$

类似地,

$$\phi_{02}=|A|^2F(z), \tag{3.16}$$

其中

$$F'(z)=S(z)-\frac{3}{2}(1-z^2)\int_0^1 S(z)\mathrm{d}z, S=i\alpha_c R_c\int_1^r(\psi_1'\tilde{\psi}_1-\psi_1\tilde{\psi}_1')\mathrm{d}z, \tag{3.17}$$

$\varepsilon^{\frac{3}{2}}$的系数为 0,可得

$$\begin{aligned}
&(1-z^2-c_r)\left(\frac{\partial^2\phi_{13}}{\partial z^2}-\alpha_c^2\phi_{13}\right)+2\phi_{13}\\
&\quad+\frac{i}{\alpha R_c}\left[\frac{\partial^4\phi_{13}}{\partial z^2}-2\alpha_c^2\frac{\partial^2\phi_{13}}{\partial z^2}+\alpha_c^4\phi_{13}\right]\\
&=\frac{i}{\alpha}\frac{\partial A}{\partial\tau}[\psi_1''-\alpha_c{}^2\psi_1]+\frac{iA}{\alpha_c\mathrm{d}_{1r}R_c{}^2}[\chi''''_1-2\alpha_c{}^2\psi_1''+\alpha_c^4\psi_1]\\
&\quad-\frac{i}{\alpha_c}\frac{\partial A}{\partial\chi}\left[2\alpha_c{}^2(1-z^2-c_r)\psi_1-\left\{1-z^2-\frac{4i\alpha_c}{R_c}\right\}\right.\\
&\quad\left.\times\{\psi_1''-\alpha_c^2\psi_1\}-2\psi_1\right]+A|A|^2[\psi_2''(\tilde{\psi}_1''-\alpha_c^2\psi_1')\\
&\quad+2\psi_2(\tilde{\psi}_1''-\alpha_c^2\tilde{\psi}_1')-2\psi_1'(\psi_2''-4\alpha_c^2\psi_2)\\
&\quad-\tilde{\psi}_1(\psi_2''-4\alpha_c^2\psi_2')-F'(\psi_1''-\alpha_c^2\psi_1)+F'''\psi_1].
\end{aligned} \tag{3.18}$$

(3.18)的左端含有如同(3.9)一样的微分算子.ϕ_{13}满足如同 ϕ_{11}的边界条件,因此(3.18)的右端和满足(3.9)共轭方程的共轭函数 Φ 正交.因此乘(3.18)以 Φ, z 从 -1 到 $+1$ 积分,对于满足一定条件的 Φ 和$\psi_1(z)$可得方程

$$\frac{\partial A}{\partial\tau}-a_{1r}\frac{\partial A}{\partial\chi}=\frac{\mathrm{d}_1}{\mathrm{d}_{1r}}A+\kappa A|A|^2, R>R_c, \tag{3.19}$$

其中 d_{1r},d_1,κ 均为物理常数.

如在 $\chi=-a_{1r}t$ 附近考虑,则令

$$\xi=(x+a_{1r}t)\varepsilon^{\frac{1}{2}},$$

$$\phi_1=\varepsilon^{\frac{1}{2}}\phi(\tau,\xi,z)+\varepsilon\phi_{12}(\tau,\xi,z)+\varepsilon^{\frac{3}{2}}\phi_{1s}(\tau,\xi,z)+O(\varepsilon^2), \tag{3.20}$$

利用变换

$$\frac{\partial}{\partial x}\to\frac{\partial}{\partial x}+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\tau}\to\frac{\partial}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau}+b_1\varepsilon^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial\xi}, \tag{3.21}$$

代入方程,$\varepsilon^{\frac{1}{2}}$的系数为0,可得类似于(3.11)的结果

$$\phi_{11}=A(\tau,\xi)\psi_1(z), \tag{3.22}$$

其中 A 为τ,ξ 的函数,ε 阶系数为0,可得方程

$$\begin{aligned}&(1-z^2-c_r)\left[\frac{\partial^2\phi_{12}}{\partial z^2}-\alpha_c^2\phi_{12}\right]+2\phi_{12}\\&\quad+\frac{i}{\alpha R_c}\left[\frac{\partial^4\phi_{12}}{\partial z^4}-2\alpha_c{}^2\frac{\partial^2\phi_{12}}{\partial z^2}+\alpha_c^4\phi_{12}\right]\\&=\frac{i}{\alpha}\frac{\partial A}{\partial\xi}\Big[a_{1r}(\psi_1''-\alpha_c^2\psi_1)-2\alpha_c^2\psi_1(1-z^2-c_r)\\&\quad+\left\{1-z^2-\frac{4i\alpha_c}{R_c}\right\}\{\psi_1''-\alpha_c^2\psi_1\}+2\psi_1\Big].\end{aligned} \tag{3.23}$$

类似可得

$$\phi_{12}=-i\left(\frac{\partial A}{\partial\xi}\right)\psi_{10}(z)+A_2(\tau,\xi)\psi_1(z). \tag{3.24}$$

可得 Ginzburg-Landau 方程

$$\frac{\partial A}{\partial\tau}-a_2\frac{\partial^2 A}{\partial\xi^2}=\frac{\mathrm{d}_1}{\mathrm{d}_{1r}}A+\kappa A|A|^2,R>R_c. \tag{3.25}$$

§4 化学反应中的湍流问题

我们先考虑 Stuart-Landau 方程.

设 X 和F 为n 维实向量,μ 为实参数,$X_0(\mu)$为方程

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=F(X;\mu) \tag{4.1}$$

的定态解,

$$F(X_0(\mu);\mu)=0. \tag{4.2}$$

我们对方程(4.1)在 $X=X_0$ 处作 Taylor 展开,令 $u=X-X_0$ 得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=Lu+Muu+Nuuu+\cdots,\tag{4.3}$$

其中 L 表 Jacobi 矩阵,$L=(L_{ij}),L_{ij}=\dfrac{\partial F_i(X_0)}{\partial X_{0j}}$,

$$\begin{cases}(Muu)_i=\sum\limits_{jk}\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2F_i(X_0)}{\partial X_{0j}\partial X_{0k}}u_ju_k,\\(Nuuu)_i=\sum\limits_{jkl}\dfrac{1}{3!}\dfrac{\partial^3F_i(X_0)}{\partial X_{0j}\partial X_{0l}}u_ju_ku_l.\end{cases}\tag{4.4}$$

高阶展开类似.

设 μ 在 $\mu=0$ 附近变化,当 $\mu=0$ 时解 X_0 是稳定的.设当 $\mu>0$ 时失稳,考虑特征值问题:

$$Lu=\lambda u.\tag{4.5}$$

设当 $\mu<0$ 时 λ 在左半平面,考虑二种情况:(a)仅有一个特征值在实轴上通过原点,(b)一对共轭特征值通过虚轴,如图 4.1 所示.

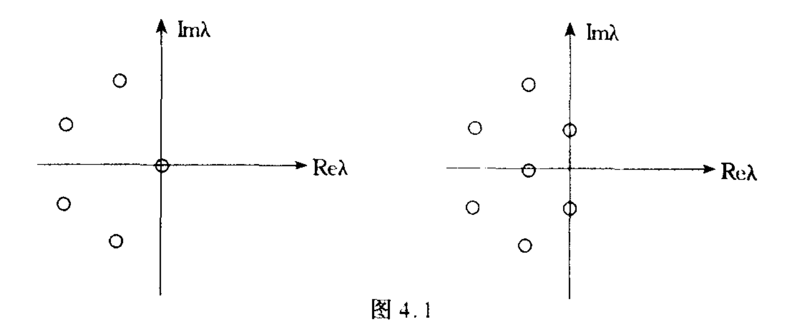


图 4.1

设

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\mathrm{Re}\lambda(\mu)|_{\mu=0}>0.\tag{4.6}$$

靠近临界处,L 和 $\lambda(\mu)$ 依 μ 作幂级数展开

$$L=L_0+\mu L_1+\mu^2L_2+\cdots,\tag{4.7}$$

$$\lambda=\lambda_0+\mu\lambda_1+\mu^2\lambda_2+\cdots,\tag{4.8}$$

其中 $\lambda_\nu=\sigma_\nu+i\omega_\nu$,依假设

$$\sigma_0 = 0, \sigma_1 > 0. \tag{4.9}$$

设 U 表示对应于特征值 $\lambda_0 = (iw_0)$ 的 L_0 的右特征向量.

$$L_0 U = \lambda_0 U, \quad L_0 \overline{U} = \overline{\lambda}_0 \overline{U},$$

类似,U^* 表示 L_0 的左特征向量,

$$U^* L_0 = \lambda_0 U^*, \quad \overline{U}^* L_0 = \overline{\lambda}_0 \overline{U}^*, \tag{4.10}$$

其中 $U^* \overline{U} = \overline{U}^* U = 0$,且为规范的,$U^* U = \overline{U}^* \overline{U} = 1$,$\lambda_0$,$\lambda_1$ 可表为

$$\lambda_0 = iw_0 = U^* L_0 U, \tag{4.11}$$

$$\lambda_1 = \sigma_1 + iw_1 = U^* L_1 U. \tag{4.12}$$

令 $\varepsilon^2 \chi = \mu$,设

$$u = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \cdots, \tag{4.13}$$

则 L 变成

$$\begin{cases} L = L_0 + \varepsilon^2 \chi L_1 + \varepsilon^4 L_2 + \cdots, \\ M = M_0 + \varepsilon^2 \chi M_1 + \cdots, \\ N = N_0 + \varepsilon^2 \chi N_1 + \cdots. \end{cases} \tag{4.14}$$

令 $\tau = \varepsilon^2 t$,则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \to \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau}. \tag{4.15}$$

将(4.15)代入(4.3)得

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau} - L_0 - \varepsilon^2 \chi L_1 - \cdots\right)(\varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \cdots) \\ &= \varepsilon^2 M_0 u_1 u_1 + \varepsilon^3 (2M_0 u_1 u_2 + N_0 u_1 u_1 u_1) + O(\varepsilon^4). \end{aligned} \tag{4.16}$$

比较(4.16)中关于 ε 的阶数得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - L_0\right) u_\nu = B_\nu, \quad \nu = 1, 2, \cdots, \tag{4.17}$$

其中

$$\begin{cases} B_1 = 0, \\ B_2 = M_0 u_1 u_2, \\ B_3 = -\left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \chi L_1\right) u_1 + 2M_0 u_1 u_2 + N_0 u_1 u_1 u_1. \end{cases} \tag{4.18}$$

对于线性非齐次方程(4.17),有重要性质

$$\int_0^{\frac{2\pi}{w_0}} U^* B_\nu e^{-iw_0 t}\mathrm{d}t = 0. \tag{4.19}$$

事实上,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{2\pi}{w_0}} U^* \cdot B_\nu e^{-iw_0 t}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{2\pi}{w_0}} \left[U^* \left(\frac{\partial}{\partial t} - L_0 \right) u_\nu \right] e^{-iw_0 t}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{2\pi}{w_0}} (iw_0 U^* \cdot u_\nu - iw_0 U^* u_\nu) e^{-iw_0 t}\mathrm{d}t = 0.
\end{aligned}$$

方程(4.19)被称为可解条件.可设 $B_\nu(t,\tau)$对于 $w_0 t$ 为 2π 周期的.

$$B_\nu(t,\tau) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} B_\nu^{(l)} e^{ilw_0 t}, \tag{4.20}$$

可解条件为

$$U^* \cdot B_\nu^{(1)}(\tau) = 0, \tag{4.21}$$

$\nu=1$,有

$$u_1(t,\tau) = W(\tau) U e^{iw_0 t} + c.c, \tag{4.22}$$

其中 $W(\tau)$为某个复振幅函数.设

$$u_2 = V_+ W^2 e^{2iw_0 t} + V_- \cdot \overline{W}^2 e^{-2iw_0 t} + V_0 |W|^2 + v_0 u_1, \tag{4.23}$$

代入(4.17),$\nu=2$,可得

$$\begin{cases} V_+ = \overline{V}_- = -(L_0 - 2iw_0)^{-1} M_0 UU, \\ V_0 = -2c_0^{-1} M_0 U\overline{U}, \end{cases} \tag{4.24}$$

v_0 为常数.将 u_1, u_2 的表达式(4.22)、(4.23)分别代入(4.18)第三式得

$$\begin{aligned} B_3^{(1)} = &-\left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \chi L_1 \right) WU + (\tau M_0 U V_0 + \tau M_0 \overline{U} V_+ \\ &+ 3N_0 UU\overline{U}) |W|^2 W, \end{aligned} \tag{4.25}$$

可解条件

$$U^* \cdot B_\nu^{(1)} = 0 \tag{4.26}$$

导致 Stuart－Landau 方程

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \chi \lambda_1 W - g |W|^2 W, \tag{4.27}$$

其中 g 为复数，

$$\begin{aligned} g &= g' + i g'' \\ &= -2U^* M_0 U V_0 - 2U^* M_0 \overline{U} V_+ - 3U^* N_0 U U \overline{U}. \end{aligned} \tag{4.28}$$

由 $W = R\exp(i\theta)$定义 R, θ 满足(4.27)

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \chi \sigma_1 R - g' R^3, \\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \chi \omega_1 - g'' R^2, \end{cases} \tag{4.29}$$

非平凡解

$$R = R_s, \theta = \tilde{w} t + \text{canst},$$

$$R_s = \sqrt{\frac{\sigma_1}{|g'|}}, \tilde{w} = \chi(w_1 - g'' R_s^2).$$

相元的原来向量 X，近似为

$$X = X_0 + \varepsilon u_1 = X_0 + \varepsilon U R_s \exp[i(w_0 + \varepsilon^2 \overline{w})t] + c.c.$$

现考虑 u 的反应扩散程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (L + D\nabla^2)u + Muu + Nuuu + \cdots, \tag{4.30}$$

引入

$$S = \varepsilon r,$$

则

$$\nabla \to \varepsilon \nabla_s. \tag{4.31}$$

(4.30)对 ε 作展开式有

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau} - \varepsilon^2 D \nabla_s^2 - L_0 - \varepsilon^2 \chi L_1 - \cdots\right)(\varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \cdots) \\ &= \varepsilon^2 M_0 u_1 u_1 + \varepsilon^3 (2M_0 u_1 u_2 + N_0 u_1 u_1 u_1) + O(\varepsilon^4). \end{aligned} \tag{4.32}$$

同样可得平衡方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-L_0\right)u_\nu = \tilde{B}_\nu,\nu = 1,2,\cdots, \tag{4.33}$$

其中

$$\begin{cases}\tilde{B}_1 = 0,\\ \tilde{B}_2 = M_0u_1u_1,\\ \tilde{B}_3 = -\left(\frac{\partial}{\partial t}-\chi L_1 - D\nabla_s^2\right)u_1 + 2M_0u_1u_2 + N_0u_1u_1u_1.\end{cases} \tag{4.34}$$

可解条件为

$$\int_0^{2\pi/w_0} U^*\tilde{B}_\nu e^{-iw_0t}\mathrm{d}t = 0, \tag{4.35}$$

$$\tilde{B}_\nu(t,\tau,s) = \sum_{l=-\infty}^{\infty}\tilde{B}_\nu{}^{(l)}(\tau,s)e^{ilw_0t}, \tag{4.36}$$

可解条件可表为

$$U^*\tilde{B}_\nu{}^{(1)}(\tau,s) = 0, \tag{4.37}$$

可得中性解

$$u_1(t,\tau,s) = w(\tau,s)Ue^{iw_0t} + c.c. \tag{4.38}$$

u_2 可从 u_1 得到,有

$$\tilde{B}_3{}^{(1)} = -\left(\frac{\partial}{\partial \tau}-\chi L_1 - D\nabla_s^2\right)wU + (2M_0UV_0 + 2M_0\overline{U}V_+ + 3N_0UU\overline{U})\,|\,w\,|^2w. \tag{4.39}$$

最后从可解条件(4.37),$\nu = 3$,可解 Ginzburg-Landau 方程

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \chi\lambda_1 w + d\nabla_s^2 w - g\,|\,w\,|^2 w, \tag{4.40}$$

其中

$$d = d' + id'' = U^*Dv, \tag{4.41}$$

λ,g_1 如前.

若引入变换

$$(\tau,s,w)\to(\sigma_1{}^{-1}\tau,\sqrt{d'/\sigma_1}s,\sqrt{\sigma_1/|\,g'\,|}w), \tag{4.42}$$

则可得如下形式的 Ginzburg-Landau 方程

$$\frac{\partial w}{\partial t} = (1 + ic_0)w + (1 + ic_1)\nabla^2 w - (1 + ic_2) | w |^2 w, \tag{4.43}$$

其中

$$c_0 = w_1/\sigma_1, c_2 = d''/d', c_2 = g''/g'. \tag{4.44}$$

令 $w \to w \exp(ic_0 t)$,则可得

$$\frac{\partial w}{\partial t} = w + (1 + ic_1)\nabla^2 w - (1 + ic_2) | w |^2 w. \tag{4.45}$$

在没有扩散的情况下,$\lambda - w$ 方程组为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(R) & -w(R) \\ w(R) & \lambda(R) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \tag{4.46}$$

其中 $R = \sqrt{x^2 + y^2}$,显然,Stuart-Landau 方程为 λ-w 方程组的特殊形式.其中 $w = X + iY$ 具扩散的 λ-w 方程组为

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda(R) + D_X\nabla^2 & -w(R) \\ w(R) & \lambda(R) + D_Y\nabla^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

$$D_X, D_Y > 0. \tag{4.47}$$

很重要的事实是,Ginzburg-Landau 方程不是(4.47) 的特殊情况,事实上(4.45) 可写成

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda(R) + \nabla^2 & -w(R) - c_1\nabla^2 \\ w(R) + c\nabla^2 & \lambda(R) + \nabla^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \tag{4.48}$$

其中

$$\lambda(R) = 1 - R^2, w(R) = c_0 - c_2 R^2.$$

方程(4.48) 不像通常的反应扩散方程,因它的扩散矩阵是反对称的,它具有某些新的特征.

§5 从 KS 方程过渡到 Ginzburg-Landau 方程

设有 Kuramoto-Shivashinsky 方程

$$\begin{aligned} \partial_t u &= -(1 + \partial_x^2)^2 u + \varepsilon^2 u + u\partial_x u \\ &= \lambda(i\partial_x, \varepsilon^2)u + \rho(i\partial_x)u^2, \end{aligned} \tag{5.1}$$

其中 $t \geqslant 0, x \in R, 1 \gg \varepsilon^2 > 0$ 为分义参数，平凡解 $u \equiv 0$ 是不稳定的，在 $u \equiv 0$ 处线性化(5.1)并寻求形式解 $u(x,t) = e^{\tilde{\lambda} t + ikx}$，$\tilde{\lambda}(k,\varepsilon^2) = -(1-k^2)^2 + \varepsilon^2$，显然，$\lambda(k,\varepsilon^2)$，当 $k \to \pm 1$ 时为正的，且有 $O(\varepsilon^2)$，现在临界模 $e^{\pm ix}$ 作小调制展开，令

$$T = \varepsilon^2 t, \quad X = \varepsilon x, \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned} u(x,t,\varepsilon) &= \psi_\varepsilon(x) + O(\varepsilon^{3/2}) \\ &= [\varepsilon A(X,T)e^{ix} + \varepsilon \bar{A}(X,T)e^{-ix}] + O(\varepsilon^{3/2}). \end{aligned} \tag{5.3}$$

设

$$\begin{aligned} \psi = &(\varepsilon A_1^0(\varepsilon x, \varepsilon^2 t)e^{ix} + \varepsilon^2 A_2^0(\varepsilon x, \varepsilon^2 t)e^{2ix} + c.c) \\ &+ \varepsilon^2 A_0^0(\varepsilon x, \varepsilon^2 t), \end{aligned}$$

代入(5.1)可得最低阶调制方程

$$e^{ix}, \varepsilon^3: \quad \partial_T A_1^0 = (1 + 4\partial_x^2)A_1^0 + i\overline{A_1^0}A_2^0 + iA_1^0 A_0^0$$

$$e^{2ix}, \varepsilon^2: \quad 0 = -9A_2^0 + i(A_1^0)^2,$$

$$\Rightarrow \quad A_2^0 = \frac{1}{9}i(A_1^0)^2,$$

$$1, \varepsilon^2: \quad A_0^0 = 0.$$

于是可得 Ginzburg-Landau 方程.

$$\begin{aligned} \partial_T A_1^0(x,T) = &(1 + 4\partial_x^2)A_1^0(x,T) \\ &- \frac{1}{9}A_1^0(x,T) \mid A_1^0(x,T) \mid^2, \end{aligned} \tag{5.4}$$

对于GL方程(5.4)得到的近似 $\psi_\varepsilon(A)$ 和原来的KS方程的解有如下关系.

定理 5.1[8] 由 GL 方程(5.4)得到的近似 $\psi_\varepsilon(A)$ 是以 $O(\varepsilon^{3/2})$ 逼近于原来 KS 方程(5.1)的解 u 的.

定理 5.2[8] 因GL方程立方项的系数具有负的实部，则原来KS方程(5.1)的所有解 u(具初值 $O(\varepsilon)$)对一切 $t \in [0,\infty)$ 存在，且对一切 t 一致有界.

由此我们从另一个角度证明了 KS 方程是 L^∞ 小初值问题整体解的存在性，并由此构造了 Ginzburg-Landau 近似的拟轨线直到 $t = \infty$ 逼近于 KS 方程的解.

§6 超导中的 Ginzburg-Landau 模型

1908 年，H. Kamerlingh-Onnes 发现了在低温条件下某些材料具有超导性，1950 年 Ginzburg 和 Landau 基于“流体”的二次相变理论，建立了超导的宏观数学模型. 1957 年，Bardaen，Cooper 和 Schrieffer 建立了微观的数学模型. 1959 年，Gor'kov 指出了在适当的情况下，GL 宏观模型可由 BCS 微观模型导出，1968 年，Gor'kov 和 Eliashborg 建立了发展型 GL 方程.

超导材料的 Gibbs 自由解可表为

$$\varepsilon(\psi,\boldsymbol{A}) = \int_{\Omega}\left[\frac{1}{2}(|\psi|^2-1)^2+\left|\left(-\frac{i}{\kappa}\nabla-\boldsymbol{A}\right)\psi\right|^2 + |\nabla\times\boldsymbol{A}-\boldsymbol{H}|^2\right]\mathrm{d}x, \tag{6.1}$$

其中 $\Omega\subset R^N(N=2,3)$ 为有界开域，$\boldsymbol{A}$ 为实的磁势，$\boldsymbol{H}$ 为外磁场，ψ 为(复)序参数，$|\psi|^2$ 为超导载电体密度，$|\psi|\leqslant 1$，$|\psi|=1$ 为理想超导，$|\psi|=0$ 为正常导体，$\kappa>0$ 为 GL 常数，GL 理论认为，状态函数应使$(\psi,\boldsymbol{A})$使得 ε 取得极小，即

$$G(\psi,\boldsymbol{A}) = \min_{\mathscr{H}\times H}\varepsilon, \tag{6.2}$$

其中 $\mathscr{H}=\mathscr{H}^1(\Omega)$ 表示复值 Sobolev 空间，$H=H^1(\Omega)$ 表示实值 Sobolev 空间，由此可得 Euler 方程

$$\left(-\frac{i}{\kappa}\nabla-\boldsymbol{A}\right)^2\psi-\psi+|\psi|^2\psi=0, \tag{6.3}$$

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A} = -\frac{i}{2\kappa}(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*) - |\psi|^2\boldsymbol{A}+\nabla\times\boldsymbol{H},$$

边界条件为

$$\begin{cases}\left(\frac{i}{\kappa}\nabla\psi+\psi\boldsymbol{A}\right)\cdot\boldsymbol{n}\Big|_{\partial\Omega}=0,\\(\nabla\times A-\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{n}\big|_{\partial\Omega}=0,\end{cases} \tag{6.4}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的外法线方向的单位向量.

相对应的发展型 GL 方程为

$$\eta\frac{\partial\psi}{\partial t}+i\eta\kappa\Phi\psi+\left(-\frac{i}{\kappa}\nabla-\boldsymbol{A}\right)^2\psi-\psi+|\psi|^2\psi=0, \tag{6.5}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\nabla\Phi+\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=-\frac{i}{2\kappa}(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)$$
$$-|\psi|^2A+\nabla\times\boldsymbol{H}, \tag{6.6}$$

其中 Φ 为电位势，η 为物理参数.

边界条件为

$$\begin{aligned}&\left(\frac{i}{\kappa}\nabla\psi+\psi\boldsymbol{A}\right)\cdot\boldsymbol{n}\,|_{\partial\Omega}=0,\\&(\nabla\times\boldsymbol{A}-\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{n}\,|_{\partial\Omega}=0.\end{aligned} \tag{6.7}$$

为了使定解问题(6.5),(6.6),(6.7) 为适定的，需要引入各种形式的规范(Gauge).

(1) 库仑规范形

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0 \qquad (\Omega), \tag{6.8}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}=0 \qquad (\partial\Omega), \tag{6.9}$$

可得方程

$$\eta\frac{\partial\psi}{\partial t}+i\eta\kappa\Phi\psi+\left(-\frac{i}{\kappa}\nabla-A\right)^2\psi-\psi+|\psi|^2\psi=0, \tag{6.10}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\nabla\times\nabla\times A+\nabla\Phi$$
$$=-\frac{i}{2k}(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)-|\psi|^2A+\nabla\times\boldsymbol{H}, \tag{6.11}$$

$$-\Delta\Phi=\operatorname{div}\left[\frac{i}{2\kappa}(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)+|\psi|^2\boldsymbol{A}\right], \tag{6.12}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0. \tag{6.13}$$

边界条件为

$$\nabla\psi\cdot\boldsymbol{n}=0,\quad \nabla\Phi\cdot\boldsymbol{n}=0, \tag{6.14}$$

$$(\nabla\times\boldsymbol{A}-\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{n}=0,\quad \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}=0,\quad x\in\partial\Omega. \tag{6.15}$$

(2) $\Phi=-\operatorname{div}\boldsymbol{A}$ 规范形

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}+\Phi=0 \qquad (\Omega), \tag{6.16}$$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \qquad (\partial\Omega). \tag{6.17}$$

方程为

$$\eta \frac{\partial\psi}{\partial t} + i\eta\kappa \operatorname{div}\boldsymbol{A} + \left(-\frac{i}{\kappa}\nabla - A\right)^2 \psi - \psi + |\psi|^2\psi = 0, \tag{6.18}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} - \Delta\boldsymbol{A}$$

$$= -\frac{i}{2\kappa}(\psi^* \nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - |\psi|^2\boldsymbol{A} + \nabla \times \boldsymbol{H}. \tag{6.19}$$

边界条件为

$$(\nabla \times \boldsymbol{A} - \boldsymbol{H}) \times \boldsymbol{n} = 0, \tag{6.20}$$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} = 0, \quad \nabla\psi \cdot \boldsymbol{n} = 0. \tag{6.21}$$

(3) 零电势规范形，$\Phi = 0$

方程为

$$\eta \frac{\partial\psi}{\partial t} + \left(-\frac{i}{\kappa}\nabla - \boldsymbol{A}\right)^2 \psi - \psi + |\psi|^2\psi = 0, \tag{6.22}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A}$$

$$= -\frac{i}{2\kappa}(\psi^* \nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - |\psi|^2 A + \nabla \times \boldsymbol{H}. \tag{6.23}$$

边界条件为

$$(\nabla \times \boldsymbol{A} - \boldsymbol{H}) \times \boldsymbol{n} = 0, \quad \nabla\psi \cdot \boldsymbol{n} = 0, \tag{6.24}$$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} = 0. \tag{6.25}$$

(4) 序参数是零虚部规范形，$\arg\psi = 0$

方程为

$$\eta \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{\kappa^2}\Delta\psi + |A|^2\psi - \psi + \psi^3 = 0, \tag{6.26}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \times \nabla \times A + \nabla\Phi = \psi^2\boldsymbol{A} + \nabla \times \boldsymbol{H}, \tag{6.27}$$

$$\eta\kappa^2\Phi\psi^2 - \nabla(\boldsymbol{A}\psi^2) = 0. \tag{6.28}$$

此时 ψ 为实函数，边界条件为

$$\nabla\psi \cdot \boldsymbol{n} = 0, \quad \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} = 0, \tag{6.29}$$

$$(\nabla \times \boldsymbol{A} - \boldsymbol{H}) \times \boldsymbol{n} = 0. \tag{6.30}$$

对于稳态，非稳态 GL 模型和偏微分方程研究，已经有很长的时间. 稳态问题研究始于 1964 年，非稳态问题则在 90 年代兴起. 主要研究整体的古典解、弱解的存在、惟一性以及 $t \to \infty$ 解的渐近性等. 同时也开展了相应的数值方法的研究，可参考第四章、第五章引用的参考文献.

对于物体除了存在理想超导和正常导体两种状态外，还存在混合状态($|\psi| \leqslant 1$)的 Ⅱ 型超导. 一个有兴趣的问题是，在外磁场作用下，超导材料将逐渐转化为通常导体，人们发现两相(超导和正常导体)同时存在，而通常导体状态被限制在一些半径很小的“涡旋”之内. 在它们以外是超导状态，而这些“涡旋”的个数将与外磁场的强度有关.

作为模型问题，考虑

$$\min_{u \in H_g'} E_\varepsilon(u) = \min_{u \in H_g'} \left[\frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_\Omega (|u|^2 - 1)^2, \right. \tag{6.31}$$

其中

$$H_g' = \{u \in H^1(\Omega),\ u = g(\partial\Omega),\}\ |g| = 1.$$

其 Euler 方程

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = \dfrac{1}{\varepsilon^2} u_\varepsilon (1 - |u_\varepsilon|^2), & (6.32) \\ u_\varepsilon |_{\partial\Omega} = g. & (6.33) \end{cases}$$

提出如下问题:

当 $\varepsilon \to 0$ 时，u_ε 的极限是什么?

令 $d = \deg(g, \partial\Omega)$，$(g: \partial\Omega \to S^1)$.

定理 6.1 (F. Bethuel, H. Brezis, F. Helein) 当 $d = 0$ 时，$u_\varepsilon \to u_0$，在 $c^1(\overline{\Omega})$ ($c_{loc}^k(\overline{\Omega}), \forall k$). 其中 u_0 是下列问题的解:

$$\begin{cases} -\Delta u_0 = u_0 |\nabla u_0|^2, & (6.34) \\ |u_0| = 1, & (6.35) \\ u_0 |_{\partial\Omega} = g. & (6.36) \end{cases}$$

当 $d > 0$ 时，$\int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^2 \to +\infty, \varepsilon \to 0$.

定理 6.2(同上) $\exists \varepsilon_n \to 0$，以及 $\{a_1 \cdots, a_d\} \subset \Omega$ 和调和映射 u_0，使得(1) $u_0: \Omega \setminus \{a_1 \cdots, a_d\} \to S^1, u_0|_{\partial\Omega} = g$，(2) $u_{\varepsilon_n} \xrightarrow{一致} u_0$ 在 $\Omega \setminus \{a_1 \cdots, a_d\}$ 的任一紧子集 I 上.(3) 每一个 $a_i (i = 1, \cdots, d)$ 的 degree 为 $+1$.

类似调和映照热流的研究，林芳华等研究以下问题：

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \Delta u_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} u_\varepsilon (1 - |u_\varepsilon|^2), \tag{6.37}$$

$$u_\varepsilon |_{\partial\Omega} = g, \tag{6.38}$$

$$u_\varepsilon |_{t=0} = u_0. \tag{6.39}$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时，u_ε 的极限等，可见第五章参考文献[6].

参 考 文 献

[1] A. C. Nowell, J. A. Whitehead, Finite bandwidth, finite amplitude convection, J. Fluid Mech., 38, partz, 1969, 279—303.

[2] S. Kogel man, R. C. Diprima, Phys. Fluids, 13, 1970, 1.

[3] R. Stewartson and J. T. Stuart, J. Fluid Mech., 48, 1971, 529.

[4] Y. Kuramoto, Prog. Theor. Phys., 56, 1976, 679

[5] H. Haken, Syhergetics, an introduction, Springer-Verlag, Berlin, 1978.

[6] K. Katon, Nagoya. Universiby Report, No. DPNU-83-08, 1983.

[7] N. Bekhi, J, Phys Soc., Japn., 50, 1981, 656.

[8] G. Schneider, Global existence uia Ginzburg-Landau formulism and pseudo-orhits of Ginzburg-Landau approximations, Comm, Math. Phys., 164. 1994, 157—179.

第二章　一维 Ginzburg-Landau 方程的整体解及其渐近性态

§1　广义 Ginzburg-Landau 方程的整体解及其整体吸引子

考虑广义 GL 方程

$$\partial_t u + v u_x = \chi u + (\gamma_r + i\gamma_i) u_{xx} - (\beta_r + i\beta_i) |u|^2 u - (\delta_r + i\delta_i) |u|^4 u - (\lambda_r + i\lambda_i)(|u|^2) u_x - (\mu_r + i\mu_i) u^2 \overline{u}_x, \tag{1.1}$$

其中 γ_r, δ_r, χ 为正常数, $v, \gamma, \beta_r, \beta_i, \delta_i, \lambda_r, \lambda_i, \mu_r, \mu_i$ 均为实数. 考虑(1.1) 的周期初值问题

$$u(x,t) = u(x+L,t), x \in R^1, t \geqslant 0, \tag{1.2}$$

其中 $L > 0$ 为周期,初始条件为

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in R^1. \tag{1.3}$$

我们先证明(4.1)—(4.3) 整体解的存在性、惟一性.

引入符号 $H = L^2_{\text{per}}[0,L] = \{u \in L^2[0,L], u(x+L) = u(x)\}$, $V = H^1_{\text{per}}[0,L] = \{u : u \in H, u_x \in H\}$,用$(\cdot,\cdot) = \int_0^L u\overline{v}\mathrm{d}x$ 和 $\|\cdot\| = \sqrt{(u,u)}$ 分别表示依 H 的内积和模, $\|u\|_V^2 = \|u\|^2 + \|u_x\|^2$ 表示 V 的模.

引理 1.1　$u_0(x) \in V$,则问题(4.1)—(4.3) 存在惟一局部解

$$u(t) \in C([0,\tau); V) \cap C^1((0,\tau); V), \tag{1.4}$$

对某 $\tau > 0$,依赖于 u_0.

证　由标准的方法,如 A. Henry 和 A. Pazy 可证.

为使局部解延拓为整体解，须对(1.1)—(1.3)的解进行先验估计.

引理 1.2 设 $\gamma_r > 0, \delta_r > 0, \chi > 0$ 且

$$4\gamma_r\delta_r > (\lambda_i - \mu_i)^2, \tag{*}$$

则有估计

$$\| u(t) \| \leqslant e^{-2\chi t} \| u_0 \|^2 + \frac{p^2 L}{2\chi}(1 - e^{-2\chi t}), t \geqslant 0, \tag{1.5}$$

其中 $p = \dfrac{\chi + (\beta_r + 1)^2}{4\beta}$，$\beta$ 在证明中给出.

证 (1.1) 和 u 作 L^2 内积再取实部可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| u \|^2 = & - v\mathrm{Re}\int_0^L u_x\bar{u}\mathrm{d}x - \beta_r\int_0^L | u |^4\mathrm{d}x \\ & - \delta_r\int_0^L | u |^6\mathrm{d}x + \chi \| u \|^2 - \gamma_r \| u_x \|^2 \\ & - (\lambda_r + \mu_r)\mathrm{Re}\int_0^L | u |^2 u_x\bar{u}\mathrm{d}x \\ & - (\lambda_i - \mu_i)\mathrm{In}\int_0^L | u |^2\bar{u}_x u\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{1.6}$$

由于 $\mathrm{Re}\int_0^L u_x\bar{u}\mathrm{d}x = 0, \mathrm{Re}\int_0^L | u |^2 u_x\bar{u}\mathrm{d}x = 0$,

$$\begin{aligned}(\lambda_i - \mu_i)\mathrm{Im}\int_0^L | u |^2 u_x\bar{u}\mathrm{d}x & \leqslant | \lambda_i - \mu_i | \int_0^L | u |^3 | u_x | \mathrm{d}x \\ & = a_1 b_1\left(\int_0^L | u |^6\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \| u_x \| \\ & \leqslant \frac{a_1^2}{2}\int_0^L | u |^6\mathrm{d}x + \frac{b_1^2}{2}\int_0^L | u_x |^2\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中 $a_1 b_1 = | \lambda_i - \mu_i |$. 由假设能选取 a_1, b_1 使得

$$\alpha = 2\gamma_r - b_1^2 = 0,\ \beta = 2\delta_r - a_1^2 > 0,$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| u \|^2 \leqslant 2\chi \| u \|^2 - \alpha \| u_x \|^2$$

$$+2\beta_r\int_0^L |u|^4 dx - \beta\int_0^L |u|^6 dx, \qquad (1.7)$$

因为

$$\begin{aligned}
&-\beta|u|^6+2\beta_r|u|^4+2\chi|u|^2\\
=&-\beta\left(|u|^3-\frac{(\beta_r+1)}{\beta}|u|\right)^2-2|u|^4\\
&+\left(\frac{(\beta_r+1)^2}{\beta}+4\chi\right)|u|^2-2\chi|u|^2\leqslant-(|u|^2-p)^2\\
&+p^2-2\chi|u|^2\leqslant p^2-2\chi|u|^2,
\end{aligned}$$

其中 $p=\dfrac{\chi+(\beta_r+1)^2}{4\beta}$,则由(1.7),得

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2+2\chi\|u\|^2+\alpha\|u_x\|^2\leqslant p^2L. \qquad (1.8)$$

因而

$$\|u\|^2\leqslant e^{-2\chi t}\|u_0\|^2+\frac{p^2L}{2\chi}(1-e^{-2\chi t}).$$

引理 1.3 在引理 1.1,引理 1.2 的假设下,有

$$\alpha\int_s^t\|u_x(\cdot,\tau)\|^2 d\tau\leqslant\|u(s)\|^2+p^2L(t-s), \qquad (1.9)$$

$$\alpha\int_0^t\|u_x(\cdot,\tau)\|^2 d\tau\leqslant\|u(0)\|^2+p^2Lt, \qquad (1.10)$$

其中 $0\leqslant s\leqslant t$.

证 积分(1.8)依(s,t),$(0,t)$,即得(1.9),(1.10).

引理 1.4 在引理 1.1,1.2 假设下,我们有

$$\frac{d}{dt}\|u_x\|^2+\gamma_r\|u_{xx}\|^2\leqslant K_1(1+\|u_x\|^2)^2, \qquad (1.11)$$

其中 K_1 依赖于方程(1.1)的系数,与 v,L 和 $\|u_0\|$ 无关.

证 (1.1)和 u_{xx} 作内积取实部,得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_x\|^2+\gamma_r\|u_{xx}\|^2=&\chi\|u\|^2-2\beta_r\int_0^L|u|^2|u_x|^2 dx\\
&-\operatorname{Re}\left((\beta_r+i\beta_i)\int_0^L u^2\bar{u}_x^2 dx\right)-3\delta_r\int_0^L|u|^4|u_x|^2 dx
\end{aligned}$$

$$- 2\mathrm{Re}\left((\delta_r + i\delta_i)\int_0^L \overline{u}_x^2 |u|^2 u^2 \mathrm{d}x\right) - \mathrm{Re}\left((\mu_r + i\mu_i)\right.$$

$$\left.\times \int_0^L |u_x|^2 u u_x \mathrm{d}x\right) + \mathrm{Re}\left((\lambda_r + i\lambda_i)\int_0^L |u|^2 u_x \overline{u}_{xx} \mathrm{d}x\right)$$

$$\leqslant \chi \| u_x \|^2 + \left(\sqrt{\beta_r^2 + \beta_i^2} - 2\beta_r\right) \cdot \int_0^L |u|^2 |u_x|^2 \mathrm{d}x$$

$$+ \left(2\sqrt{\delta_r^2 + \delta_i^2} - 3\delta_r\right)\int_0^L |u|^4 |u_x|^2 \mathrm{d}x$$

$$+ \left(\sqrt{\mu_r^2 + \mu_i^2} + |\lambda_r|\right)\int_0^L |u_x|^3 |u| \mathrm{d}x$$

$$+ |\lambda_i| \int_0^L |u|^2 |u_x| |u_{xx}| \mathrm{d}x. \tag{1.12}$$

首先

$$\int_0^L |u|^2 |u_x|^2 \mathrm{d}x \leqslant \| u \|_{L^\infty}^2 \| u_x \|^2,$$

由 Agmon 不等式

$$\| u \|_{L^\infty}^4 \leqslant c_1(\| u \|^2 + \| u_x \|^2) \| u \|^2,$$

我们有

$$\int_0^L |u|^2 |u_x|^2 \mathrm{d}x \leqslant c_1^2(\| u \|^2 + \| u \| \| u_x \|) \| u_x \|^2$$

$$\leqslant c_2(\| u_x \|^2 + \| u_x \|^3) \leqslant 2c_2(\| u_x \|^2 + \| u_x \|^4), \tag{1.13}$$

$$\int_0^L |u|^4 |u_x|^2 \mathrm{d}x \leqslant \| u \|_{L^\infty}^2 \int_0^L |u|^2 |u_x|^2 \mathrm{d}x$$ (由 (1.13))

$$\leqslant c_1^2(\| u \|^2 + \| u \| \| u_x \|) c_2(\| u_x \|^2 + \| u_x \|^3)$$

$$\leqslant c_3(\| u_x \|^2 + \| u_x \|^4), \tag{1.14}$$

$$\int_0^L |u|^2 |u_x| |u_{xx}| \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \varepsilon_1 \| u_{xx} \|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_1}\int_0^L |u|^4 |u_x|^2 \mathrm{d}x \qquad (\text{由}(1.14))$$

$$\leqslant \varepsilon_1 \| u_{xx} \|^2 + \frac{c_3}{4\varepsilon_1}(\| u_x \|^2 + \| u_x \|^4), \tag{1.15}$$

$$\int_0^L |u||u_x|^3 \mathrm{d}x \leqslant \left(\int_0^L |u|^2 |u_x|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L |u_x|^4 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},$$

由 Nirenberg 不等式及$\int_0^L u_x \mathrm{d}x = 0$,可得

$$\int_0^L |u_x|^4 \mathrm{d}x \leqslant c \| u_{xx} \| \| u_x \|^3.$$

因此$\int_0^L |u||u_x|^3 \mathrm{d}x \leqslant c_4^2 \int_0^L |u|^2 |u_x|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{4} \| u_x \|^3 \| u_{xx} \|$,

由(1.13)和 Young 不等式得

$$\int_0^L |u||u_x|^3 \mathrm{d}x \leqslant c_5(\| u_x \|^2 + \| u_x \|^4) + \varepsilon_2 \| u_{xx} \|^2. \tag{1.16}$$

将(1.13)—(1.16)代入(1.12),取$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\gamma_r}{4}$,即得引理结论.

引理 1.5 在引理 1.1,引理 1.2 假设下,我们有

$$\| u(t) \|_V \leqslant K_2, \tag{1.17}$$

其中 K_2 依赖于 K_1 和 $\| u_0 \|_V$.

证 由引理 1.1、引理 1.4,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1 + \| u_x \|^2) \leqslant K_1(1 + \| u_x \|^2)^2, \tag{1.18}$$

令 $y = 1 + \| u_x \|^2$,当$\tau < (K_1 C_1 + \| u_{0x} \|^2)^{-1}$时,则从(1.18)得

$$1 + \| u_x \|^2 \leqslant \left(\frac{1}{1 + \| u_{0x} \|^2} - k_1 t\right)^{-1} t < \tau,$$

取 $t \leqslant (2K_1(1 + \| u_{0x} \|^2))^{-1} = \bar{\tau}$,可得

$$\| u_x \|^2 \leqslant 1 + 2 \| u_{0x} \|^2, t \leqslant \bar{\tau}.$$

当 $t > \bar{\tau}$,使得 $t - \bar{\tau} \leqslant s \leqslant t$,令

$$z(t) = y(t) \exp\left(-\int_s^t K_1 y(\tau) \mathrm{d}\tau\right),$$

则

$$z_t(t) \leqslant 0 \qquad (由(1.18)).$$

因此

$$z(t) \leqslant z(s) = y(s) = 1 + \| u_{0x} \|^2,$$

$$y(t) \leqslant z(t)\exp\left(K_1\int_s^t y(\tau)\mathrm{d}\tau\right)$$

$$\leqslant (1 + \| u_x \|^2)\exp\left(K_1\int_s^t y(\tau)\mathrm{d}\tau\right),$$

由(1.9)得

$$\exp\left(K_1\int_s^t y(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \leqslant \exp\left(\frac{1}{\alpha}K_1(c \| u(s) \|^2 + p^2L\bar{\tau}) + K_1\bar{\tau}\right)$$

$$\leqslant \exp(K_1c_6).$$

因此

$$y(s) \leqslant (1 + \| u_x(s) \|^2)\exp(K_1c_6). \tag{1.19}$$

积分(4.19), $s \in [t - \bar{\tau}, t]$, 得

$$\bar{\tau}\, y(t) \leqslant c_6\exp(K_1c_6),$$

$$y(t) \leqslant \frac{c_6\exp(K_1c_6)}{\bar{\tau}}.$$

即得引理的结论.

定理 1.6 对任何 $v_0 \in V$, 并设引理 1.1、引理 1.2 的条件满足, 则存在问题(1.1)—(1.3) 的惟一整体解 $u(t) \in C([0,\infty); V) \cap C^1((0,\infty); V)$.

证 由引理 1.1、引理 1.5, 我们能延拓 $\tau = +\infty$.

现在来证明整体吸引子的存在性.

首先建立在 V 中吸收集的存在性.

由(1.18) 我们有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \leqslant K_1y^2 = K_1y \cdot y$.

由(1.19) 用积分区间 $(t, t+1)$ 代替 (s, t), 则有

$$\int_t^{t+1}(1 + \| u_x \|^2)\mathrm{d}\tau \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha}(\| u(t) \|^2 + P^2L),$$

令 $\| u_0 \| \leqslant R$, $\rho^2 = \frac{P^2L}{2\chi}$, 当 $t \geqslant \frac{1}{\chi}\log\frac{R}{\rho} = T$ 时, 由(1.5) 有 $\| u(t) \|^2 \leqslant 2\rho^2$.

现 K_1 与 u_0 无关,且 $K_1\int_t^{t+1} y(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant K_1 + K_1(2\rho^2 + P^2L) = \rho_1$,由一致 Gronwall 不等式得

$$y(t+1) \leqslant \rho_1\exp(\rho_1), t \geqslant T.$$

于是,对 $t \geqslant T+1$,有 $\| u_x \|^2 \leqslant \rho_1\exp(\rho_1) - 1 = \rho_2^2$.

我们有

引理 1.7 设 u 为问题(1.1)—(1.3)的解,且 $\| u_0 \| \leqslant R$,则存在 $T = \frac{1}{\chi}\log\frac{R}{\rho}, \rho^2 = \frac{P^2L}{2\chi}$,当 $t \geqslant T+1$ 时有

$$\| u \|_V^2 \leqslant 2\rho + P_2^2.$$

因方程(1.1)是自治的,则 $S(t): u_0 \to S(t)u_0$ 形成一个半群,我们证明当 $t > 0$ 时,$S(t)$ 是紧的,为此,我们讨论解的正则性.

由定理 1.6 和引理 1.4、引理 1.5 可知

$u \in C((0,\infty); H_{\text{per}}^2(0,L)) \cap L^2([0,\infty), H_{\text{per}}^\infty[0,L))$,

反复利用正则性结果和穿靴法,可得

$$u \in C^1((0,\infty); C_{\text{per}}^\infty[0,c]).$$

作方程(1.1)和 u_{xxxx} 的内积,利用 Gagliardo-Nirenberg 不等式,Sobolev 嵌入定理以及某些基本不等式可得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| u_{xx} \|^2 + \gamma_r \| u_{xx} \|^2 \leqslant C_7 + C_8 \| u_{xx} \|^2$、因此 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t\| u_{xx} \|^2) + \gamma_r(t \| u_{xxx} \|^2) \leqslant C_7 + C_8(t\| u_{xx} \|^2) + \| u_{xx} \|^2$,由引理 1.4,有

$$\int_0^1 \| u_{xx} \|^2 \mathrm{d}t \leqslant C(R)t.$$

再由 Gronwall 引理可得

$$t\| u_{xx} \|^2 \leqslant C(R,t), t > 0.$$

因此,我们得到当 $t > 0$ 时,$S(t)$ 在 V 中是紧的,利用[2]的结果可得

定理 1.8 设 $u(t)$ 为问题(1.1)—(1.3)的解 $u(t) = S(t)u_0$,令

$$B = \{u \in V, \|u\|_V^2 \leqslant 2\rho^2 + \rho_2^2\},$$

则 B 的 ω 极限集 $\mathscr{A} = \omega(B)$ 为 $S(t)$ 在 V 中紧的整体吸引子.

现估计整体吸引子的维数,(1.1) 在 $u(t) = S(t)u_0$ 的线性化方程为

$$\begin{aligned}\partial_t w + v w_x = \chi w + (\gamma_r + i\gamma_i) w_{xx} - (\beta_r + i\beta_i)(2|u|^2 w + u^2\bar{w})\\ - (\delta_r + i\delta_i)(3|u|^4 w + 2|u|^2 u^2 \bar{w})\\ - (\lambda_r + i\lambda_i)(|u|^2 w_x + w\bar{u}u_x + \bar{w}uu_x)\\ - (\mu_r + i\mu_i)(u^2\bar{w}_x + 2u\bar{u}_x w),\end{aligned} \tag{1.20}$$

$$w(x,t) = w(x+L,t),\ x \in R^1, t \geqslant 0, \tag{1.21}$$

$$w(x,0) = w_0(x), \qquad x \in R^1. \tag{1.22}$$

引理1.9 如 $w_0(x) \in V$,则问题(1.20)—(1.22)存在惟一的解 $w(x,t) \in C([0,\infty);V) \cap C^1((0,\infty);V) \cap L^2([0,\infty), H_{per}^2(0,L])$.

令 $w(x,t) = DS(t)u_0$,设 R, T 为两个正常数,使得对任何 u_0, v_0, t 满足

$$\|u_0\|_V, \|v_0\|_V \leqslant R, t \leqslant T,$$

则有

$$\|S(t)(u_0+v_0) - S(t)u_0 - DS(t)u_0\|_V \leqslant C\|v_0\|_V^2. \tag{1.23}$$

证 类似于问题(1.1)—(1.3) 存在、惟一性的证明. 我们能得到问题(1.20)—(1.22) 的存在惟一性. 即(1.23) 意味着半群算子 $S(t)$ 在 V 中是 Frechlet 可微. 令 $u_1 = S(t)u_0, u_2 = S(t)(u_0 + v_0)$,则 u_1, u_2 为方程(1.1) 的解分别具有初值 u_0 和 $u_0 + v_0$,令 $w = DS(t)v_0$,则 w 为(1.20) 具初值 v_0 的解,由于 $\|u_0\|_R$, $\|v_0\|_V \leqslant R$,依上面的证明方法可知

$$\|u_1\|_V, \|u_2\|_V, \|w\|_V \leqslant C(R),$$

由 Sobolev 嵌入定理,

$$\|u_1\|_{L^\infty}, \|u_2\|_{L^\infty} \leqslant C_1(R). \tag{1.24}$$

由(1.24),易得(1.23)的证明.

再记(1.20)为

$$w_t = F(u)w, \tag{1.25}$$

其中 $F(u)w$ 表示(1.20)右端减去 vw_x.

对任何 $m \in \mathbb{N}$,令 $w_0 = w_{01},\cdots,w_{0m}$ 为 V 中元素,问题(1.21)—(1.22)的解对应于 $w_1,\cdots,w_m$, $u = u(\tau) = S(\tau)u_0$ 为问题(1.1)—(1.3)的解,依[2]有

$$| w_1(t) \wedge \cdots \wedge w_m(t) |_{\wedge^m V} \leqslant | w_{01} \wedge w_{02} \wedge \cdots \wedge w_{0m} |_{\wedge^m V} \cdot \exp\left(\int_0^t \mathrm{ReTr}F(u(\tau)) \cdot Q_m(\tau)\mathrm{d}\tau\right), \tag{1.26}$$

其中 $Q_m(\tau)$ 表示 V 在 $w_1(\tau),\cdots,w_m(\tau)$ 所张成子空间的正交投影,Tr 表示该算子的迹,令 $\varphi_j(\tau), j \in \mathbb{N}$,表示对应于下列问题特征值 λ_j 的特征函数:

$$-u_{xx} = \lambda_1 u, u(x+L) = u(x),$$

则 $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ 为在 H 和 V 中的标准正交基,现来估计 $\mathrm{ReTr}F(u(\tau)) \cdot Q_m(\tau)$,以下计算省略 τ.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ReTr}F(u) \cdot Q_m \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{Re}(F(u) \cdot Q_m\varphi_j, \varphi_j)_V \\
&= \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Re}(F(u)\varphi_j, \varphi_j)_V \\
&= \sum_{j=1}^{m} (\mathrm{Re}(F(u)\varphi_j, \varphi_j) + \mathrm{Re}((F(u)\varphi)_x, \varphi_{jx})) \\
&= \chi \| \varphi_3 \|^2 - \gamma_r \| \varphi_{jx} \|^2 - \mathrm{Re}((\beta_r + i\beta_i)(2|u|^2\varphi_j + u^2\bar{\varphi}_j, \varphi_j)) \\
&\quad - \mathrm{Re}((s_r + is_j)(3|u|^4\varphi_j + 2|u|^2u^2\bar{\varphi}_j, \varphi_j) \\
&\quad - \mathrm{Re}((\lambda_r + i\lambda_i)(|u|^2 \cdot \varphi_{3x} + \varphi_3 u_x\bar{u} + \bar{\varphi}_j u u_x, \varphi_3)) \\
&\quad - \mathrm{Re}((\mu_r + i\mu_i)(u^2\bar{\varphi}_{jx} + 2u\bar{u}_x\varphi_j, \varphi_j)) \\
&\leqslant \chi \| \varphi_j \|^2 - \gamma_r \| \varphi_{jx} \|^2 - (2\beta_r - \sqrt{\beta_r^2 + \beta_r^2})\int_0^L |u|^2 |\varphi_j|^2 \mathrm{d}x \\
&\quad + (2\sqrt{\delta_r^2 + \delta_i^2} - 3\delta_r)\int_0^L |u|^4 |\varphi_j|^2 \mathrm{d}x + (\sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}
\end{aligned}$$

$$+\sqrt{\mu_r^2+\mu_i^2})\cdot\int_0^L(|u|^2|\varphi_{jx}||\varphi|+2|\varphi_j|^2|u||u_x|)\mathrm{d}x. \tag{1.27}$$

由于

$$\int_0^L |u|^2|\varphi_j|^2\mathrm{d}x\leqslant\|u\|_{L^\infty}^2\|\varphi_j\|^2\leqslant C_9\|u\|_v^2\|\varphi_j\|^2, \tag{1.28}$$

$$\int_0^L |\varphi_j|^2|u|^4\mathrm{d}x\leqslant\|u\|_{L^\infty}^4\|\varphi_j\|^2\leqslant C_{10}\|u\|^4\|\varphi_j\|^2, \tag{1.29}$$

$$\begin{aligned}\int_0^L |u|^2|\varphi_{jx}||\varphi_j|\,\mathrm{d}x&\leqslant\|u\|_{L^\infty}^2\int_0^L|\varphi_{jx}||\varphi_j|\,\mathrm{d}x\\&\leqslant\|u\|^2\left(\varepsilon_3\|\varphi_{jx}\|^2+\frac{1}{4\varepsilon_3}\|\varphi_j\|^2\right),\end{aligned} \tag{1.30}$$

$$\begin{aligned}\int_0^L |\varphi|^2|u||u_x|\,\mathrm{d}x&\leqslant\|u\|_{L^\infty}^2\int_0^L|\varphi_j|^2|u_x|\,\mathrm{d}x\\&\leqslant C_{11}\|u\|_V^2\left(\int_0^L|\varphi_j|^4\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

再由 Gagliardo－Nirenberg 不等式

$$\begin{aligned}\int_0^L |\varphi_j|^4\mathrm{d}x&\leqslant C_{12}(\|\varphi_{jx}\|+\|\varphi_j\|)\|\varphi_j\|^3\\&\leqslant C_{13}\|\varphi_j\|^4+\varepsilon_4\|\varphi_{jx}\|^4,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\int_0^L |\varphi_j|^2|u||u_x|\,\mathrm{d}x\\&\leqslant C_{11}\|u\|_V^2(C_{13}\|\varphi_j\|^2+\varepsilon_4\|\varphi_{jx}\|^2).\end{aligned} \tag{1.31}$$

适当选取 $\varepsilon_3,\varepsilon_4$,将(1.28)—(1.31)代入(1.2),得

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(F(u)\varphi_j,\varphi_j)\leqslant&-\frac{\gamma_r}{2}\|\varphi_{jx}\|^2\\&+K_3(\|u\|_V^2+\|u\|_V^4)\|\varphi_j\|^2,\end{aligned}$$

其中 K_3 为正常数,仅依赖于 L 和(1.1)的系数.

现再估计

$$\mathrm{Re}((F(u)\varphi_j)_x,\varphi_{jx})\leqslant\chi\|\varphi_{jx}\|^2-\gamma\|\varphi_{jxx}\|^2+(2\beta_r$$

$$+\sqrt{\beta_r^2+\beta_i^2})\int_0^L(|u||u_x||\varphi_j||\varphi_{jx}|+|u^2||\varphi_{jx}|^2)\mathrm{d}x$$

$$+\sqrt{\delta_r^2+\delta_i^2}\int_0^L(16|u|^3|u_x||\varphi_j||\varphi_{jx}|+|u|^4||\varphi|^2)\mathrm{d}x$$

$$+(\sqrt{\lambda_r^2+\lambda_i^2}+\sqrt{\mu_r^2+\mu_i^2})\int_0^L(4|u||u_x||\varphi_{jx}|^2+|u|^2|\varphi_{jxx}|$$

$$\cdot|\varphi_{jx}|+2|\varphi_j||u_x|^2|\varphi_{jx}|+2|\varphi_j||\varphi_{jx}||u||u_{xx}|)\mathrm{d}x, \tag{1.32}$$

$$\int_0^L|u|^2|\varphi_{jx}|^2\mathrm{d}x\leqslant C_9\|u\|_V^2\cdot\|\varphi_{jx}\|^2, \tag{1.33}$$

$$\int_0^L|u||u_x||u_{jx}||\varphi_j|\mathrm{d}x\leqslant\|u\|_{L^\infty}\int_0^L|u_x||\varphi_{jx}|\mathrm{d}x$$

$$\cdot\|\varphi_j\|_{L^\infty}\leqslant C_{14}\|u\|_V^2\|\varphi_j\|_{L^\infty}\|\varphi_{jx}\|,$$

再由 Agmon 不等式 $\|\varphi_j\|_{L^\infty}^2\leqslant C(\|\varphi_j\|^2+\|\varphi_{jx}\|\|\varphi_j\|)$，于是

$$\int_0^L|u||u_x|\varphi_j||\varphi_{jx}|\mathrm{d}x\leqslant C_{14}(\|u\|_V^2\|\varphi_{jx}\|+\|\varphi_j\|), \tag{1.34}$$

$$\int_0^L|u|^4|\varphi_{jx}|^2\mathrm{d}x\leqslant C_{10}\|u\|_V^4\|\varphi_{jx}\|^2, \tag{1.35}$$

$$\int_0^L|u|^3|u_x||\varphi_j||\varphi_{jx}|\mathrm{d}x\leqslant C_{15}\|u\|_V^4\|\varphi_j\|_{L^\infty}\|\varphi_{jx}\|.$$

从以上讨论可得

$$\int_0^L|u|^3|u_x||\varphi_j||\varphi_{jx}|\mathrm{d}x\leqslant C_{16}\|u\|^4(\|\varphi_j\|^2+\|\varphi_{jx}\|^2), \tag{1.36}$$

$$\int_0^L|u||u_x||\varphi_j|^2\mathrm{d}x\leqslant C_7(\|u\|_V^2+\|u_{xx}\|^2)\|\varphi_{jx}\|^2, \tag{1.37}$$

$$\int_0^L|u|^2|\varphi_{jxx}||\varphi_{jx}|\mathrm{d}x\leqslant C_9\|u\|_V^2\Big(\varepsilon_5\|\varphi_{jxx}\|^2$$

$$+\frac{1}{4\varepsilon_5}\|\varphi_{jx}\|^2\Big),\tag{1.38}$$

$$\int_0^L |u_x|^2|\varphi_j||\varphi_{jx}|\,\mathrm{d}x \leqslant C_{18}\|u_{xx}\|^2(\|\varphi_j\|^2+\|\varphi_{jx}\|^2),\tag{1.39}$$

$$\int_0^L |u||u_{xx}|\,\Big|\varphi_j||\varphi_{jx}|\,\mathrm{d}x \leqslant C_{19}\|u\|_V\cdot\|u_{xx}\|$$

$$\times C\Big(\int_0^L|\varphi_j|^2|\varphi_{jx}|^2\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}},$$

$$\int_0^L |u||u_{xx}|\,\Big|\varphi_j||\varphi_{jx}|\,\mathrm{d}x \leqslant C_{20}(\|u\|_V^2+\|u_{xx}\|^2)$$

$$\times(\|\varphi_j\|^2+\|\varphi_{jx}\|^2).\tag{1.40}$$

选取 ε,将(1.33)—(1.40) 代入(1.32),得

$$\mathrm{Re}\,((F(u)\varphi_3)_x,\varphi_{jx}) \leqslant -\frac{\gamma_1}{2}\|\varphi_{jx}\|^2+K_4(\|u\|^2$$

$$+\|u\|^4+\|u_{xx}\|^2)(\|\varphi_j\|^2+\|\varphi_{jx}\|^2),$$

其中常数 K_4 依赖于参数的关系如同 K_3,于是

$$\sum_{j=1}^m \mathrm{Re}(F(u)\varphi_j,\varphi_j)_V \leqslant -\frac{\gamma_r}{2}\sum_{j=1}^m\|\varphi_{jxx}\|^2+K_3(\|u\|_V^2$$

$$+\|u\|_V^4)\sum_{j=1}^m\|\varphi_j\|^2+K_4(\|u\|_V^2+\|u\|_V^4+\|u_{xx}\|^2)$$

$$\cdot\Big(\sum_{j=1}^m(\|\varphi_j\|^2+\|\varphi_{jx}\|^2)\Big),$$

因 $\varphi_j(x)=\frac{1}{L}\exp\Big(\frac{2ijx}{L}\Big)$,对 $t\geqslant T+1$,有

$$\sum_{j=1}^m \mathrm{Re}(F(u)\varphi_j,\varphi_j)_V \leqslant -\frac{\gamma_r}{2}\sum_{j=1}^m\|\varphi_{jxx}\|+K_3(\rho_3+\rho_3^2)m$$

$$+K_4(\rho_3+\rho_3^2+\|u_{xx}\|^2)(m+C(L)m^3),$$

其中 $\rho_3=2\rho^2+\rho_2^2$,于此我们用到了公式

$$1^2+2^2+\cdots+m^2=\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1).$$

令 $\rho_0=\sum_{j=1}^m|\varphi_j|^2$,由 Sobolev-Lieb-Thirring 不等式

$$\int_0^L \rho_0^5 \mathrm{d}x \leqslant K_5 \sum_{j=1}^{m} \| \varphi_{jxx} \|^2,$$

其中 K_5 绝对常数,仅依赖于 L.

$$\sum_{j=1}^{m} \| \varphi_{jxx} \|^2 \geqslant K_5^{-1} \int_0^L \rho_0^5 \mathrm{d}x \geqslant K_5^{-1} L^{-4} \left(\int_0^L \rho_0 \mathrm{d}x \right)^5 = K_5^{-1} L m^5,$$

$$\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Re}(F(u)\varphi_j, \varphi_j)_V \leqslant - \frac{\gamma_r}{2} L K_5^{-1} m^5 + K_3(\rho_3 + \rho_3^2) m$$
$$+ K_4(\rho_3 + \rho_3^2 + \| u_{xx} \|^2)(m + C(L) m^2).$$

令 $\mathscr{Q}_m = \overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \inf\limits_{u_0 \in \mathscr{A}} \frac{1}{t} \int_0^t \mathrm{ReTr}(F(u(\tau)) \cdot Q_m(\tau)) \mathrm{d}\tau$. 由引理1.1、引理1.4,有

$$\frac{1}{t} \int_0^t \| u_{xx} \|^2 \mathrm{d}\tau \leqslant K_1 \gamma_r^{-1} \frac{1}{t} \int_0^L (1 + \| u_x \|^2)^2 \mathrm{d}\tau.$$

故当 $t \geqslant T + 1$ 时,有

$$\frac{1}{t} \int_0^t \| u_{xx} \|^2 \mathrm{d}\tau \leqslant K_1 \gamma_r^{-1} \rho_2^4,$$

$$\mathscr{Q}_m \leqslant - \frac{\gamma_r}{2} L K_5^{-1} m^5 + K_3(\rho_3 + \rho_3^2) m$$
$$+ K_4(\rho_3^2 + \rho_3^2 + K_1 \gamma_r^{-1} \rho_2^4) \cdot (m + C(L) m^3).$$

于是当 $m \geqslant m_0 = [2(K_6 + K_7)\gamma_r^{-1} K_5 L^{-1}] + 1$ 时, $\mathscr{Q}_m < 0$, 其中 $K_6 = K_3(\rho_5 + \rho_3^2), K_7 = \dfrac{L^4 K_5}{\gamma_r} K_4(\rho_4 + \rho_3^2 + K_1 \gamma_r \rho_2^4)^2 C^2(L)$, $[x]$ 表示 x 的整数部分,则由[1] 的结果有

$$\mathrm{d}_H(\mathscr{A}) \leqslant m_0, \mathrm{d}_F(\mathscr{A}) \leqslant 2 m_0,$$

其中 $\mathrm{d}_H(\mathscr{A})$、$\mathrm{d}_F(\mathscr{A})$ 分别表示吸引子 $\mathscr{A}$ 的 Hausdorff 维数和 Fractal 维数.

§2　广义 Ginzburg-Landau 方程的行波解分析

考虑如下广义 GL 方程

$u_t = a_0 u + (1 + i b_1) u_{xx} + (a_2 + i b_2) | u |^2 u + (a_3$

$$+ib_3)|u|^2u_x + (a_4+ib_4)u^2\overline{u}_x$$
$$-(1+ib_5)|u|^4u, \tag{2.1}$$

其中 $x\in R',t>0,\overline{u}$ 表示 u 的复数共轭,a_j,b_j 为实数.

当 $a_3=a_4=b_3=b_4=0$ 时可得五次 GL 方程

$$u_t = a_0u+(1+ib_1)u_{xx}+(a_2+ib_2)|u|^2u$$
$$-(1+ib_5)|u|^4u. \tag{2.2}$$

设

$$u = re^{i(kz-wt)}, \tag{2.3}$$

其中 r,k,w 为实数,$z=x-ct$ 将(2.3)代入(2.1)得

$$r^4+[(b_3-b_4)k-a_2]r^2+k^2-a_0=0, \tag{2.4}$$

$$w=-ck+b_1k^2-[b_2+(a_3-a_4)k]r^2+b_5r^4. \tag{2.5}$$

求解(2.4)得

$$r^2=\frac{a_2-(b_3-b_4)k\pm\sqrt{[(b_3-b_4)^2-4]k^2-2a_2(b_3-b_4)k+a_2^2+4a_0}}{2}. \tag{2.6}$$

从上式可看出,当 $|b_3-b_4|\geqslant 2$ 时,k 增加时,$r\to\infty$,因此总设整体存在性条件满足 $|b_3-b_4|<2$,为使平方根有意义,取 $a_0>-a_2^2/4$. 此处对于平面波,当 $k\in[k_{\text{lower}},k_{\text{upper}}]$ 时总是存在的,其中

$$k_{\text{lower}}=\frac{a_2(b_3-b_4)+2\sqrt{-a_0(b_3-b_4)^2+a_2^2+4a_0}}{(b_3-b_4)^2-4}, \tag{2.7}$$

$$k_{\text{upper}}=\frac{a_2(b_3-b_4)-2\sqrt{-a_0(b_3-b_4)^2+a_2^2+4a_0}}{(b_3-b_4)^2-4}. \tag{2.8}$$

当 $-a_4^2/4<a_0<0$ 时零振幅波是线性稳定的,而当 $a_0>0$ 时,它是不稳定的,我们先讨论 $a_0<0$,再讨论 $a_0>0$. 且设 $a_2>0$,为寻求更一般的行波解,令

$$u=Be^{-iwt},B(z)=r(z)e^{i\int k(z)\mathrm{d}z}z=x-ct, \tag{2.9}$$

代入(2.1)得

$$-cB_z = i\omega B + a_0 B + (1 + ib_1)B_{zz} + (a_2 + ib_2)|B|^2 B + (a_3 + ib_3)\cdot|B|^2 B_z + (a_4 + ib_4)B^2 \bar{B}_z - (1 + ib_5)|B|^4 B. \quad (2.10)$$

易得如下一阶方程组

$$r' = (1 + b_1^2)s, \quad (2.11)$$

$$s' = [-a_0 - b_1 w - b_1 ck + (1 + b_1^2)k^2]r - cs - (a_2 + b_1 b_2)r^3 - [(a_3 + a_4) + b_1(b_3 + b_4)]r^2 s - [b_1(a_3 - a_4) - (b_3 - b_4)]r^3 k + (1 + b_1 b_5)r^5, \quad (2.12)$$

$$k' = [b_1 c - 2(1 + b_1^2)k]s/r + a_0 b_1 - w + ck + (a_2 b_1 - b_2)r^3 + [b_1(a_3 + a_4) - (b_3 + b_4)]rs - [(a_3 - a_4) + b_1(b_3 - b_4)]r^2 k + (b_5 - b_1)r^4, \quad (2.13)$$

其中 $' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}, \tau = \frac{z}{(1 + b_1^2)}, s = \frac{r'}{(1 + b_1^2)}$.

(r,s,k) 方程组(2.11)—(2.13) 在 $r = 0$ 上有奇性,为此,引入

$$v = s/r, \quad (2.14)$$

则有

$$v' = s'/r - (1 + b_1^2)v^2. \quad (2.15)$$

此时(2.11)—(2.13) 方程变化为(r,v,k) 方程组

$$r' = (1 + b_1^2)rv, \quad (2.16)$$

$$v' = -a_0 - b_1 w - b_1 ck + (1 + b_1^2)k^2 - cv - (1 + b_1^2)v^2 - (a_2 + b_1 b_2)r^2 - [(a_3 + a_4) + b_1(b_3 + b_4)]r^2 v - [b_1(a_3 - a_4) - (b_3 - b_4)]r^2 k + (1 + b_1 b_5)r^4, \quad (2.17)$$

$$k' = [b_1 c - 2(1 + b_1^2)k]v + a_0 b_1 - w - ck + (a_2 b_1 - b_2)r^2 + [b_1(a_3 + a_4) - (b_3 + b_4)]r^2 v - [(a_3 - a_4) + b_1(b_3 - b_4)]r^2 k + (b_5 - b_1)r^4. \quad (2.18)$$

这个方程组对 $r = 0$ 平面是不变的,因此奇点变成奇不变平面.

在不变平面 $r=0$ 上，(r,v,k) 方程组为

$$v' = -a_0 - b_1 w - b_1 ck + (1+b_1^2)k^2 - cv - (1+b_1^2)v^2, \tag{2.19}$$

$$k' = [b_1 c - 2(1+b_1^2)k]v + a_0 b_1 - w - ck. \tag{2.20}$$

这个方程组不依赖于 a_3,a_4,b_3,b_4，也不依赖于 b_2 或 b_3，方程组(2.19)(2.20) 可看成方程组(r,s,k) 当 $r\to 0$ 时解的状态.

以下设 b_1,b_2,b_5,a_3,a_4 为小量，令

$$\varepsilon = (b_1,b_2,a_3,a_4,b_5), \tag{2.21}$$

当 $\varepsilon=0$ 时，(2.16)—(2.18) 归结为

$$r' = rv, \tag{2.22}$$

$$v' = -a_0 + k^2 - cv - v^2 - a_2 r^2 + (b_3 - b_4)r^2 k + r^4, \tag{2.23}$$

$$k' = -w - (c+2v)k - (b_3+b_4)r^2 v. \tag{2.24}$$

附设 $b_3+b_4=0$，可得

$$r' = rv, \tag{2.25}$$

$$v' = -a_0 + k^2 - cv - v^2 - a_2 r^2 + (b_3 - b_4)r^2 k + r^4, \tag{2.26}$$

$$k' = -w - (c+2v)k. \tag{2.27}$$

如果 $w=0$，则平面 $k=0$ 对于第二个方程组是不变的，这有利于寻找(r,v,k) 方程组的临界点，$\varepsilon_1 b_3 + b_4$ 和 w 为充分小，对于零振幅波的临界点为$[0,v^{\pm}(\varepsilon,b_3,b_4,w,c),k^{\pm}(\varepsilon,b_3,b_4,w,c)$ 为

$$v^{\pm}(0,0,0,0,c) = \frac{-c \pm \sqrt{c^2-4a_0}}{2}, \tag{2.28}$$

$$k^{\pm}(0,0,0,0,c) = 0. \tag{2.29}$$

由线性分析，当 $-a_2^2/4 < a_0 < 0$ 时可知临界点$(0,v^+,k^+)$具有一维不稳定流形，$(0,v^-,k^-)$，具有一维稳定流形，相关的特征向量对任何 c 垂直于 $r=0$ 平面. 当限制在 $r=0$ 不变平面上，(v^+,k^+) 是一个汇，而(v^-,k^-) 是一个源，对任何 c.

对 $a_0>0$，当 $|c|>2\sqrt{a_0}$ 时，一对临界点存在，对 $c>2\sqrt{a_0}$，$(0,v^+,k^+)$ 为一个汇，$(0,v^-,k^-)$ 具有一维稳定流形，其特征向量垂直于 $r=0$ 平面，对 $c<-2\sqrt{a_0}$，$(0,v^-,k^-)$ 是一个源，而 $(0,v^+,k^+)$ 具有一维不稳定流形，其特征向量垂直于 $r=0$ 平面，当限制在 $r=0$ 不变平面上，(v^+,k^+) 是一个汇，(v^-,k^-) 是一个源，$|c|>2\sqrt{a_0}$.

当 $r_{0,1}(\varepsilon_1,b_3,b_4,w,c)$ 和 $k_{0,1}(\varepsilon_1,b_3,b_4,w,c)$ 满足(2.4)，(2.5)时，则具有平面波临界点 $(r_0,0,k_0)$ 和 $(r_1,0,k_1)$，特别

$$r_0^2(0,0,0,0,c)=\frac{a_2+\sqrt{a_2^2+4a_0}}{2},$$

$$r_1^2(0,0,0,0,c)=\frac{a_2-\sqrt{a_2^2+4a_0}}{2},$$

$$k_0(0,0,0,0,c)=0,k_1(0,0,0,0,c)=0.$$

r_0 对应于大振幅平面波，r_1 对应于小的振幅平面波，线性化(2.25)，(2.26)，(2.27)可得特征值

$$\lambda^{\pm}=\frac{-c\pm\sqrt{c^2+4\gamma}}{2},\lambda_3=-c,$$

其中 $\gamma=a_2^2+4a_0+a_2\sqrt{a_2^2+4a_0}$.

对应的特征向量为 $(r_0,\lambda^{\pm},0)$，$(0,0,1)$. 由线性分析，在空间 (r,v,k) 上，当 $-a_2^2/4<a_0<0$ 时，$(r_0,0,k_0)$ 具有二维稳定流形和一维不稳定流形，$c>0$；一维稳定流形和二维不稳定流形，$c<0$；一维稳定流形，一维不稳定流形和一维中心流形，$c=0$. 无论如何，当限制在 $k=0$ 平面上，$(r_0,0,k_0)$ 具有一维不稳定流形和一维稳定流形，对任何 c，在 $(r_1,0,k_1)$ 上，线性化算子具有一对复共轭特征值和一个实特征值，对任何 c，更详细一点，在 $(r_1,0,k_1)$ 上，对 $c>0$ 为稳定焦点，$c<0$ 为不稳定焦点，当 $c=0$ 时，具有一对纯虚特征值和一个零特征值.

对 $a_0>0$，仅有一个平面波临界点 $(r_0,0,k_0)$，r_1^2 为负的，当 $-a_2^2/4<a_0<0$ 时，它具有相同的线性化结构.

方程组(2.16),(2.17),(2.18),流的整体结构对小的 $\epsilon, b_3 + b_4$ 和 w 解的 $\epsilon = 0, b_3 + b_4 = 0, w = 0$ 推得,附设 $c = 0$,则下列两个函数

$$E = \frac{1}{2}r^2(v^2 + k^2) + \frac{a_0}{2}r^2 + \frac{a_2}{4}r^4 - \frac{r_6}{6}, \tag{2.30}$$

$$M = r^2 k \tag{2.31}$$

为运动常数.计算

$$E' = -(c(v^2 + k^2) + wk)r^2, \tag{2.32}$$

$$M' = -(w + ck)r^2. \tag{2.33}$$

事实上,对 $b_3, b_4 \neq 0$,可修改积分

$$\widetilde{E} = E + b_4 k + b_4(b_3 + b_4)\frac{r^6}{6}, \tag{2.34}$$

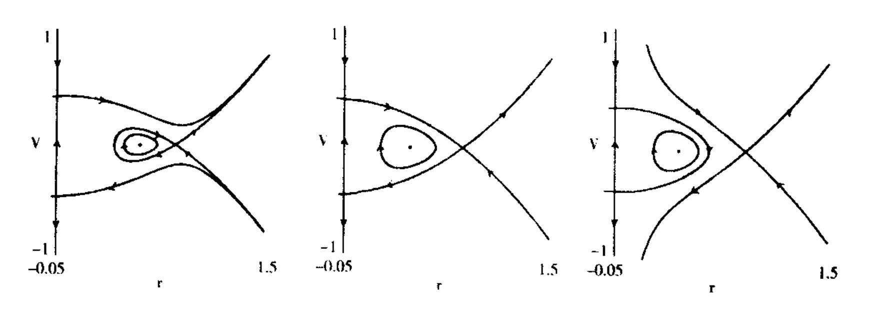
$$\widetilde{M} = M + (b_3 + b_4)r^2/4, \tag{2.35}$$

$$\widetilde{E}' = -(c(v^2 + k^2) + wk)r^2 - b_4(w + ck)r^4, \tag{2.36}$$

$$\widetilde{M}' = -(w + ck)r^2, \tag{2.37}$$

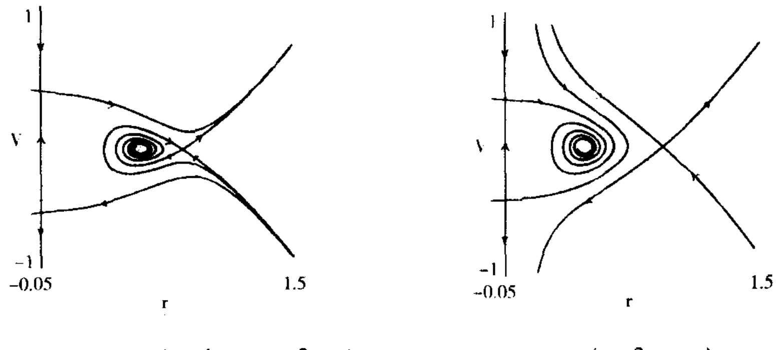
当 $w = c = 0$ 时,$\widetilde{M}' = 0$.

我们得到局部和整体结果如图 2.1($w = c = 0$) 所示,在图 2.1 中我们看到三种类型的解:初始状态的波前(fronts)、筹壁(domain wall)、脉冲(pulse) 在图 2.2 和图 2.3 中,$w = 0, c > 0$,对于 $c < 0$ 可由 $c > 0$ 的对称性可得到



(a)$a_0 \in \left(-\frac{1}{4}a_2^2, -\frac{3}{16}a_2^2\right)$; (b)$a_0 = -\frac{3}{16}a_2^2$; (c)$a_0 \in \left(-\frac{3}{16}a_2^2, 0\right)$

图 2.1 (2.16)—(2.18) 在不变平面 $k = 0$ 上 (r, v, k) 的相图,$c = w = 0$.



(a)$a_0 \in \left(-\frac{1}{2}a_2^2, -\frac{3}{16}a_2^2\right)$, (b)$a_0 \in \left(-\frac{3}{16}a_2^2, 0\right)$

图 2.2 方程组(2.16)—(2.18)($\varepsilon = 0$)(r, v, k)

在不变平面 $k = 0$ 上的相图,$c > 0, w = 0$

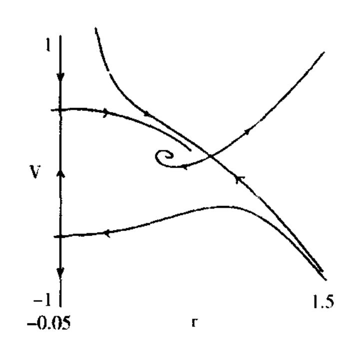


图 2.3 $g^s(c_0) > g^u(c_0)$

$$(r, v, k, w, c, z) \to (r, -v, k, -w, -c, -z). \tag{2.38}$$

这里研究可积结构形态,对小的 $\varepsilon, b_3 + b_4, w$,适当选取波速 c.

现考虑波前和筹壁:$a_0 < 0$.

当 $a_0 < 0$ 时,存在着连接任何二个零振幅 $r = 0$ 波和大振幅波 $r = r_0$ 的各种可能性,对于小振幅波 $r = r_1$,如图 2.1 所示,虽然小振幅平面波是动力学不稳定的,但存在多种连接性.

定理 2.1 设 $\varepsilon = (b_1, b_2, a_2, a_4, b_5)$,$b_3 + b_4$ 和 w 充分小,则

(1) 对 $a_0 \in \left(-\frac{1}{4}a_2^2, -\frac{3}{16}a_2^2\right)$和任何 $c > 0$,存在异宿墙连接大振幅波($z \to -\infty$) 和小振幅波($z \to \pm\infty$).

(2) 对 $a_0 \in \left(-\frac{3}{16}a_2^2, 0\right)$ 和任何 $c > 0$ 存在连接零振幅波($z \to -\infty$) 和小振幅波($z \to \pm\infty$) 波前.

(3) 对任何 $a_0 \in \left(-\frac{1}{4}a_2^2, 0\right)$, 存在两个局部惟一函数 $\tilde{c} = \tilde{c}(a_0, a_2) \geqslant 0, \tilde{\tilde{c}} = \tilde{\tilde{c}}(a_0, a_2) \geqslant 0$, 有 $\tilde{c}(-\frac{3}{16}a_2^2, a_2) = \tilde{\tilde{c}}(-\frac{3}{16}a_2^2, a_2) = 0$.

(A) 情况(1); 如 $c = \tilde{c}$, 存在连接零振幅波($z \to -\infty$) 和大振幅平面波($z \to +\infty$) 波前; 如 $c > \tilde{c}$, 存在连接零振幅波($z \to -\infty$) 和小振幅波($z \to +\infty$) 波前.

(B) 情况(2); 如 $c = \tilde{\tilde{c}}$, 存在连接大振幅平面波($z \to -\infty$) 和零振幅波($z \to +\infty$) 波前; 如 $c > \tilde{\tilde{c}}$, 则异宿墙连接大振幅波($z \to -\infty$) 和小振幅波($z \to +\infty$) 存在.

(4) 类似结果对 $c < 0$ 成立, 前波或异宿墙依相反方向跑.

证 置 $\varepsilon = 0, b_3 + b_4 = w = 0$, 考虑流在 $k = 0$ 的不变平面(r, v) 上.

先设 $a_0 \in \left(-\frac{1}{4}a_2^2, -\frac{3}{16}a_2^2\right)$, 对于 $c = 0$ 存在 $r = r_0$ 的同宿轨道(图2.1(a)), 以(2.33) 表达式($E' = -cr^2v^2, w = k = 0$), 可知, 它对一切 $c \neq 0$ 破裂, 产生结构稳定(横截), 鞍点 → 汇连接从 r_0 到 $r_1, c > 0$(图2.2(a)). 而源 → 鞍连接从 r_1 到 r_0 时 $c < 0$, 从对称性(2.38) 和(图 2.2(a)) 能证明第一部分.

现转向第三部分(A), 考虑系统

$$r' = rv, \tag{2.39}$$

$$v' = -a_0 - cv - v^2 - a_2r^2 + r^4, \tag{2.40}$$

$$c' = 0. \tag{2.41}$$

在 $k = 0$ 上, 能看出参数 c 为一平几分量, 因此可研究参数化的流形族, 令 $\omega^s = w^s(r_0, 0, k_0)$ 和 $w^u(0, v^+, k^+)$ 均依赖于 c. 当限制在平面 $k = 0$ 上, 它们是一维的. 令 $w^{cs} = \bigcup_c (w^s x\{c\})$ 表示中心稳定流形, $w^{cu} = \bigcup_c (w^u x\{c\})$ 为中心不稳定流形, 它们都是二维的.

令 $s=\{(r,v,c):r=r_1,v>0\}$ 表示流(2.39)—(2.41)的横截面.因 $r'>0$ 对一切 $0<r<r_0,v>0,w^s$ 和 w^u 相交 s 仅一次对每个 c.令 $g^s(c),g^u(c)$ 分别表示曲线 $w^{cs}\cap s$ 和 $w^{cu}\cap s$,它们至少属于 c'.

从上面(见1(A)),可知 $g^s(0)$,我们仅需证明存在一个 $c_0>0$ 使得 $g^s(c_0)>g^u(c_0)$(见图2.3),由此推出 $\bar{c}>0$ 的存在性,使得 $g^s(\bar{c})=g^v(\bar{c})$ 推出波前的存在性,即在 $\bar{c}>0$ 上 w^{cs} 和 w^{cu} 相交.

考虑在 (r,v,c) 空间中参数面 $v=\alpha(r-r_0),\alpha<0$,在这个平面上向量满足

$$\frac{v'}{r'}=-\frac{[c+\alpha(r-r_0)]}{r}+\frac{(r^2-r_1^2)(r+r_0)}{\alpha r},\quad(2.42)$$

因此存在 $c_1>0$,使得 $(v'/r')<\alpha,c>c_1,r\in[r_1,r_0)$,另一个方面,在 $v=v^+$ 上,$0<r<r_1$ 有 $v'=r^4-a_2r^4<0$,注意到 $c\to+\infty,v^+\to0$,因此,存在 $c_2>0$,使得 $v^+<\alpha(r_1-r_0)$.于是存在 $c_0>0$,使得 $g^s(c_0)>g^4(c_0)$.

对 $c>\bar{c}_1,(0,v^+,k^+)$ 的不稳定流形 w^u,上零振幅不动点位于 $(r_0,0,k)$ 的稳定流形 w^s 上支的下面(限制于 $k=0$ 平面),因此位于 $(r_1,0,k_1)$ 的吸引区域内,它是这个不变平面的汇,这就建立了结构稳定鞍点 → 汇的存在性,即对应对相连为波前当 $c>0$ 和 $c>\bar{c}$ (图2.4(a))(对 $c<0$,为源 → 鞍点).

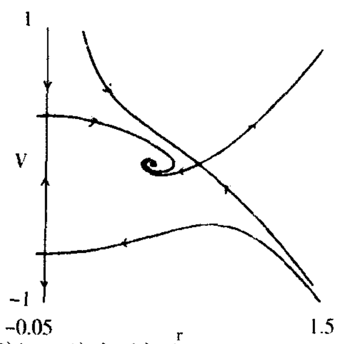


图2.4 (A)(2.16)—(2.18)($\varepsilon=0$)在不变平面 $k=0$ 上 (r,v,k) 的相图,$c>0,w=0$.

(A) $a_0\in\left(-\frac{1}{4}a_2^2,-\frac{3}{16}a_2^2\right),c>\bar{c}$

定理的第一部分和 $c > \bar{c}$（第三部分）从这个事实即$(r_1,0,k_1)$.在整体(r,v,k)为汇空间,$c>0$得出,因此这种连接是结构稳定的.

为证明第三部分(A)$c=\bar{c}$的情况,我们还需要证明w^{cs}和w^{cu}横截相交于$\bar{c}$,$k=0$,对它可利用微分形式去证明稳定、不稳定流形的横截相交:设x,y,z为R^3的坐标系,w^s和w^u分别为二维(中心)稳定和(中心)不稳定流形,设w^s,w^u相交具有任意正交基$\{f_1,f_2\}\{g_1,g_2\}$,分别沿着它们相交的k平面,当2形式,$dxdy$作用于基上,可得一个数,它为一个行列式所给定,这个行列式的元素为基向量是依x、y分量所组成.令

$P_{xy}=dxdy,P_{xy}^{-}=dxdy(f_1,f_2),P_{xy}^{+}=dxdy(g_1,g_2)$,(－为稳定,＋为不稳定),因此相当于$w^s$,$w^u$的切平面有两个向量$(P_{xy}^{-},P_{xz}^{-},P_{yz}^{-})$,$(P_{xy}^{+},P_{xz}^{+},P_{yz}^{+})$.这些向量对有同一方向的任何正交基(右手系)取相同数值.如两个向量无关,则w^s和w^u的切平面不相交或平行,它推出w^s和w^u横截相交.

相同的原理对于R^{n-1}的m维(中心)稳定和(中心)不稳定流形成立,此时得考虑n形式和n向量.

现完成第三部分(A)$c=\bar{c}$情况的证明,从(2.39),(2.40),(2.41)可算出1形式的微分方程(微分或作一阶变分)

$$\delta r'=v\delta r+r\delta v, \tag{2.43}$$

$$\delta v'=(4r^3-2a_2r)\delta r-(c+2v)\delta v-v\delta c, \tag{2.44}$$

$$\delta c'=0. \tag{2.45}$$

我们也能得到2形式$P_{rv}=\delta r\delta v$的方程,我们仅需

$$P'_{rv}=-(c+v)P_{rv}-vP_{rc}. \tag{2.46}$$

注意到$\Lambda_1^{\pm}=(rv,-a_0-cv-v^2-a_2r^2+r^4,0)$,这个向量沿着(2.43)—(2.45)的轨线,是w^{cs}和w^{cu}的切向量,令

$$\Lambda_2^{\pm}=(\delta r^{\pm},\delta v^{\pm},1),$$

分别表示w^{cs}和w^{cu}切平面的第二个基向量,它们显然是线性无关的.因此对每个切平面构造一组基.利用 Gram－Schmidt 过程,可

得正交基$\{\hat{\Lambda}_1^{\pm},\hat{\Lambda}_2^{\pm}\}$,令 $N>0$ 为规范因子,则有

$$P_{rc}^{\pm}=\delta_r\delta_c(\Lambda_1^{\pm},\Lambda_2^{\pm})=N\begin{vmatrix} rv & 0 \\ \delta r^{\pm} & 1 \end{vmatrix}=Nrv>0,\quad v>0. \tag{2.47}$$

从(2.46)得

$$P_{rv}^{\pm\prime}=-(c+v)P_{rv}^{\pm}-Nrv^2. \tag{2.48}$$

因此,w^{cs},w^{cu} 均会有临界点组成的线,它的切向量在 c 方向,对于任何平面会有这样一条线,2 形式 $P_{rv}=0$ 推出

$$P_{rv}^{\pm}\to 0,z\to-\infty,$$

$$P_{rv}^{-}\to 0,z\to+\infty.$$

因 $P_{rv}^{\pm}=0,z\to-\infty$,(2.48) 表明初始 $P_{rv}^{\pm}$ 是负的,且必须保持严格负的.对一切 z,因 $P_{rv}^{\pm\prime}=-Nrv^2<0,\forall r,v>0$,在 $P_{rv}^{\pm}=0$ 上,因此(2.48) 的解不能依 P_{rv}^{+} 增加的方向越过 $P_{rv}^{+}=0$,类似原理推出 P_{rv}^{-} 有结论

$$P_{rv}^{+}<0;\quad P_{rv}^{-}>0.$$

从(2.47)可知 $P_{re}^{+}=P_{re}^{-}$,类似计算得 $P_{vc}^{+}=P_{vc}^{-}$,因此二个向量 $(P_{rv}^{+},P_{rc}^{+},P_{vc}^{+})$,$(P_{rv}^{-},P_{rc}^{-},P_{vc}^{-})$ 是无关的,这就推出 w^{cs} 和 w^{cu} 在 $c=\bar{c}>0(k=0)$ 横截相交,由维数公式,w^{cs} 和 w^{cu} 在空间(r,v,k,c)上 $\bar{c}$ 上相交,以上推导故由 $\epsilon=0,b_3+b_4=0,w=0$ 得到.最后,对于充分小的和非零的 ϵ_1,b_3+b_4,v,我们仅需注意到交面是保持平移不变的.

这就证明了第三部分(A) 的 $c=\bar{c}$ 的情况.

第二部分和 3(B) 解被类似证明,第四部分由对称性$(r,v,k,w,c,t)\to(r,-v,k,-w,-c,-t)$得到.

简单利用 Melnikov 扰动方法可得函数 $\bar{c}$ 和 $\bar{\bar{c}}$ 的估计,

$$a_0\approx-\frac{3}{16}a_2^2,$$

对于方程组

$$r'=rv, \tag{2.49}$$

$$v' = \frac{3}{16}a_2^2 - cv - v^2 - a_2 r^2 + r^4 + \alpha, \tag{2.50}$$

其中 $a_0 = -\frac{3}{16}a_2^2 - \mathrm{d}$,对 $c = \mathrm{d} = 0$ 积分正变成

$$\hat{E} = \frac{1}{2}r^2 v^2 - \frac{r^2}{6}\left(\frac{3}{4}a_2 - r^2\right)^2, \tag{2.51}$$

则存在鞍→鞍相连以$(0, v^+, 0) \to (r_0, 0, 0)$和$(r_0, 0, 0) \to (0, \bar{v}, 0)$(图 2.1(b))这些相连的保持性对于 $a_0 < -\frac{3}{16}a_2^2, a_0 > -\frac{3}{16}a_2^2$ 分别对应于临界点 $\tilde{c}$ 和 $\tilde{\tilde{c}}$,于此部分(3) 的波前或异宿墙存在.为此估计 $\tilde{c}$ 和 $\tilde{\tilde{c}}$,计算

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}' \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} (-cr^2 v^2 + \alpha r^2 v)\mathrm{d}z. \tag{2.52}$$

从(2.51),对于上轨道,

$$v = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{3}{4}a_2 - r^2\right), \tag{2.53}$$

由(2.52) 和在(2.49) 中改变积分变量计算得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{E}' \mathrm{d}z &= \int_0^{\sqrt{3a_2/4}} \left(-\frac{cr}{\sqrt{3}}\left(\frac{3}{4}a_2 - r^2\right) + \alpha r\right)\mathrm{d}r \\ &= \frac{3a_2}{8}\left(\alpha - \frac{\sqrt{3}}{8}a_2 c\right).\end{aligned} \tag{2.54}$$

类似地,对于下轨道有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{E}' \mathrm{d}z = \frac{3a_2}{8}\left(-\alpha - \frac{\sqrt{3}}{8}a_2 c\right). \tag{2.55}$$

从 Melnikov 分支结果,可得估计

$$\tilde{c} : c = \frac{8\alpha}{\sqrt{3}a_2}\left(\frac{3}{16}a_2^2 + a_0\right) \tag{2.56}$$

和

$$\tilde{\tilde{c}} = -\frac{8\alpha}{\sqrt{3}a_2} = \frac{8}{\sqrt{3}a_2}\left(\frac{3}{16}a_2^2 + a_0\right). \tag{2.57}$$

对于小的 c,和 $a_0 \approx -\frac{3}{16}a_2^2$ 是好的近似.

对于前波和墙：$a_0>0$ 的情况.

定理 2.2 令 $\varepsilon=(b_1,b_2,a_3,a_4,b_5)$ 和 w 充分小，$a_0>0$，则对系数在 $(b_1,b_2,b_3,b_4,a_3,b_5)$ 空间的一个子集上，存在同宿连接惟一平面波 $(z\to-\infty)$ 和它自己 $(z\to+\infty)$，适当选择频率 w 和波速 c.

定理 2.3 令 $\varepsilon=(b_1,b_2,a_3,a_4,b_5)$，$b_3+b_4$ 和 w 充分小，设 $a_0>0$，则对 $c>2\sqrt{a_0}$ 且充分大，存在波前惟一平面波 $(z\to-\infty)$ 和零振幅波 $(z\to+\infty)$，对 $c<-2\sqrt{a_0}$ 和 $|c|$ 充分大，存在波前从相反方向路过，进一步，对任何 $|c|>2\sqrt{a_0}$ 没有同宿墙存在.

证 考虑(2.25)—(2.27)在不变平面 $k=0$ 上，$w=0$，我们仅需证明 $c>2\sqrt{a_0}$ 情况. 因为 $c<-2\sqrt{a_0}$ 能从对称性(2.38)得到. 因不稳定流形 $w^u(r_0,0,k_0)$ 正切于特征向量 $(r_0,\lambda^+,0)$(靠近 $(r_0,0,k_0)$)，它的下支进入 $v<0$ 半平面(见图 2.5). 论这支，r 是减少，$r=rv<0$ 近一点，这支不能进入 $v>0$ 上半空间，因在 $v=0$ 上，

$$v'=-a_0-a_2r^2+r^4=(r^2-r_0^2)\left[r^2-\frac{a_2-\sqrt{a_2^2+4a_0}}{2}\right]<0. \tag{2.58}$$

因此下支沿 r 的减少方向，这支不能穿过半线 $\{v=v^+,r>\sqrt{a_2}\}$ 上. 于此

$$v'=r^2(r^2-a_2)>0. \tag{2.59}$$

无论如何，它能穿过半线 $\{v=v^+,r<\sqrt{a_2}\}$，如果成立，能选取 c 充分大，使得

$$\begin{aligned}v'&=-a_0-cv-v^2-a_2r^2+r^4\\&=-(v-v^+)(v-v^-)+r^2(r^2-a_2)>0.\end{aligned} \tag{2.60}$$

因此我们用这个事实：$c\to+\infty$，$v^+\to0$，$v^-\to-\infty$，可知 $r^2(r^2-a_2)$ 具有极子：$-a_2^2/4$，对这样的 c，下支向上运动进入汇 $(0,v^+,k^+)$ 的吸引区，我们得到结构稳定，鞍 → 汇连接，因

$w^u(r_0,0,r_0)$ 的下支永远依 r 的减少方向离开,它不能再回到 r_0,类似能证上支永远离开依 r 的增加方向,因此不存在同宿区域墙.

再看脉冲:$a_0 < 0$ 和 $a_0 > 0$ 的情况.

定理 2.4 设 $a_0 \in \left(-\frac{1}{4}a_2^2, 0\right)$,$(w, c) \neq (0,0)$ 或 $a_0 > 0$,$|c| > 2\sqrt{a_0}$,则对 $\varepsilon = (b_1, b_2, a_3, a_4, b_5)$,$b_3 + b_4$ 和 w 充分小,不存在 pulses.

证 初始置 $\varepsilon = 0$,$b_3 + b_4 = 0$,则可得到结构稳定和横截性.首先考虑 $w = 0$ 的情况,此时 $k = 0$ 平面保持不变,无损于一般性,设 $c > 0$($c < 0$,对称性),因零振幅波不动点 $(0, v^+, 0)$,$(0, v^-, 0)$,有

$$v^{\pm} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4a_0}}{2}, \tag{2.61}$$

点位于这个平面上,对于 $a_0 \in \left(-\frac{1}{4}a_2^2, -\frac{3}{16}a_2^2\right)$,$(0, v^+, 0)$ 的不稳定流形不能进入 $v < 0$ 半空间,$(0, v^-, 0)$ 位于其中,由于定理 2.1 第一部分(见图 2.2(a))的相连轨线,和在 $\{v = 0, 0 < r < r_1\}$ 上,导致满足

$$v' = -a_0 - a_2 r^2 + r^4 = (r^2 - r_0^2)(r^2 - r_1^2) > 0,$$

当 $a_0 \in \left(-\frac{3}{16}a_2^2, 0\right)$,因 $E' = -cr^2v^2 \leqslant 0$,则

$$E = \frac{1}{2}r^2v^2 + \frac{a_0}{2}r^2 + \frac{a_2}{4}r^2 + \frac{a_2}{4}r^4 - \frac{r^6}{6} \tag{2.62}$$

的任何水平集的分量的内部是正不变的(见图 2.2(b)).因为 $(0, v^+, 0)$ 位于水平集合有点 $r = 0$,$v = \pm\sqrt{-a_0}$ 的内部,而 $(0, v^-, 0)$ 在其外部,因此没有轨线从第一者通过它者.

现设 $w \geqslant 0$,$c \leqslant 0$,不动点 $(0, v^+, k^+)$ 和 $(0, v^-, k^-)$ 分别位于 (k, v) 平面的左($k < 0$)和右($k > 0$),我们有 $k^{\pm} = -w/(c + 2v^{\pm})$,考虑不稳定流形 $w^u(0, v^+, k^+)$,它进入半空间 $H = \{(r, v, k) \mid k < 0 < r\}$,任何包含在这个流形上的任何轨线有

$$\mu' = -(w + ck)r^2, \tag{2.63}$$

它在 H_- 上是严格负的，因此轨线穿过水平集，$M = r^2 k$ = 常数在 M 减小的方向上，推出这样的轨线不能离开 H_- 且进入正半空间 $H_+ = \{(r, v, k) \mid k, r > 0\}$，其中局部稳定流形 $w^s\{0, v^-, k^-\}$ 位于其中，因此不存在脉冲.

对 $w > 0, c \geq 0$ 类似讨论表明稳定流形 $w^s(0, v^-, k^-) t_0 H_+$. 因此不能和不稳定流形 $w^u(0, v^+, k^+)$ 相连，对于 $w < 0$ 情况处理是类似的.

对 $a_0 > 0, c > 2\sqrt{a_2}$, $(0, v^+, k^+)$ 为在 (r, v, k) 空间中的一个汇，而 $(0, v^-, k^-)$ 中的二维不稳定流被限制于不变平面 $r = 0$. 因此没有(不平凡)pulse 存在，$c < 2\sqrt{a_0}$ 情况类似.

§3 Ginzburg-Landau 方程拟周期解的不稳定性

考虑 GL 方程

$$v_t = (1 - |u|^2)u + u_{xx}. \tag{3.1}$$

定常问题

$$0 = (1 - |u|^2)u + u_{xx}. \tag{3.2}$$

如表示(3.2) 的解 $u(x) = \rho(x)e^{i\theta(x)}$, 则有

$$w = \rho^2\theta',$$

$$K = \rho_x^2 + \rho^2 - \frac{\rho^4}{2} + \frac{w^2}{\rho^2}$$

为(3.2) 的积分，则 $\rho(x)$ 满足方程

$$\rho'' + f(\rho) = 0, \tag{3.3}$$

其中

$$f(\rho) = -\frac{w^2}{\rho^3} + \rho - \rho^3.$$

(3.3) 的周期解 $\rho(x)$ 形成(3.2) 的拟周期解，为了利用于特征值指数，作 $z(x, t) = u(x, t)e^{-i\theta(x)}$，其中 $u(x, t)$ 为(3.1) 的

解，且 $\theta(x)=\int_0^x \frac{w}{\rho(s)^2}\mathrm{d}s$. 其中 $\rho(x)$ 为正的(3.3)的周期解，于是可得方程

$$z_t = z_{xx}+\frac{2iw}{\rho^2}z_x-\left(\frac{2iw}{\rho^3}\rho_x+\frac{w^2}{\rho^4}\right)z+z-|z|^2z.$$

令 $z=\alpha+i\beta$，可得

$$\alpha_t=\alpha_{xx}-\frac{2w}{\rho^2}\beta_x+\frac{2w\rho_x}{\rho^3}\beta+\left(1-\frac{w^2}{\rho^4}-(\alpha^2+\beta^3)\right)\alpha, \tag{3.4}$$

$$\beta_t=\beta_{xx}+\frac{2w}{\rho^2}\alpha_x-\frac{2w\rho_x}{\rho^3}\alpha+\left(1-\frac{w^2}{\rho^4}-(\alpha^2+\beta^2)\right)\beta. \tag{3.5}$$

由此可得 $(\rho(x),0)$ 为(3.4)，(3.5) 的周期定常解. 此时解(3.4)，(3.5) 线性化得特征值的线性方程组

$$\lambda\alpha=\alpha_{xx}-\frac{2w}{\rho^2}\beta_x+\frac{2w\rho_x}{\rho^3}\beta+\left(1-\frac{w^2}{\rho^4}-3\rho^2\right)\alpha, \tag{3.6}$$

$$\lambda\beta=\beta_{xx}+\frac{2w}{\rho^2}\alpha_x-\frac{2w\rho_x}{\rho^3}\alpha+\left(1-\frac{w^2}{\rho^4}-\rho^2\right)\beta. \tag{3.7}$$

线性方程组具有 T 周期系数，它能写为等价的一阶方程组

$$Y'=A(x,\lambda)Y, \tag{3.8}$$

其中 $Y\in\mathbb{C}^4$ 为向量 $(\alpha,a,\beta,b)^t$，$A(x,\lambda)$ 为矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ (\lambda+w^2/\rho^4-1+3\rho^2) & 0 & -2w\rho_x/\rho^3 & 2w/\rho^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2w\rho_x/\rho^3 & -2w/\rho^2 & (\lambda+w^2/\rho^4-1+\rho^2) & 0 \end{pmatrix}.$$

定义 3.1 设 $\Phi(x,\lambda)$ 为(3.8)的矩阵解，满足 $\Phi(0,\lambda)=\mathrm{I}$，其中 I 为 4×4 单位矩阵，令 I 为由(2.6)，(2.7) 右端所确定的作用于一段有界连续函数空间的二阶算子. 给定 $\gamma\in S^1$，称 λ 为 L 的一个 γ 特征值，是指 γ 为 $\Phi(T,\lambda)$ 的一个特征值，λ 的几何 γ 重数为 $(\Phi(T,x)-\gamma\mathrm{I})$ 的维数，代数 r 重数的定义则更为复杂. 以下可知，算子 I 不具有广义特征函数，因而几何和代数 r 重数是一样

的.

现设 $K \subset \mathbb{C}$ 为一简单闭曲线,有定理

定理 3.2 设 $S_*^1 = \{\gamma \in S^1 : \gamma \neq 1\}, \gamma \in S_*^1$,设 K 为在 $\{\mathrm{Re}\lambda \geqslant 0\}$ 中的简单闭曲线.它和虚轴相交仅在 $\lambda = 0$ 一点,它含有一个凸区域.设 $c > 0$ 为 K 和正 λ 轴相交的惟一交点.

(1) 对每个固定 $w_0 \in \left(0, \sqrt{\frac{4}{27}}\right)$ 存在 $c(w_0) > 0$ 使得如 $c \geqslant c(w_0)$,则 K 对于 L 的 γ 特征值,$\forall \gamma \in S_*^1$,对于一切(3.3)的周期解,$w_0 < w < \sqrt{\frac{4}{27}}$ 是不相连的.

(2) r 特征值指标 $c_1(\epsilon(K, \gamma, \rho)) = 2, \forall \gamma, T, w$,因此 L 的谱含有一个区间,$\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_1$,其中 $\lambda_1 > \lambda_0 \geqslant 0$.

定理 3.3 关于(3.4),(3.5) 周期解$(\rho(x), 0)$,线性化方程组(3.6),(3.7) 的谱可从(3.3) 的周期解 $\rho(x), w = 0$ 得到,且它振荡地通过零点,含有一个区间位于正实轴的一个部分.

为了证明定理3.2(1) 的断言,必须证明 K 对于适当的参数值 T 和 w, L 的 γ 特征值是不相连的.这从以下三个断言得到

(ⅰ) L 的谱是实的;

(ⅱ) $\lambda = c$ 决不是 L 的特征值,对于适当的参数,c 充分大;

(ⅲ) $\lambda = 0$ 决不是 γ 特征值,$\forall \gamma \in S_*^1$.

证(ⅰ) 因 λ 为 L 的谱当且仅当它是 γ 特征值对 $\gamma \in S^1$ 充分证明 L 的 γ 特征值是实的.这从为(2.6)(2.7) 所定义的线性算子是关于 L^2 内积对称性得出,即

$$\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, L\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right)_{L_2} = \left(L\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right)_{L_2},$$

其中在 R^1 上光滑函数配对 α, β 的空间满足 γ 特征值条件

$$(\alpha(T), \beta(T)) = (\gamma\alpha(0), r\beta(0)),$$

$$(\alpha'(T)\beta'(T)) = (\gamma\alpha'(0), r\beta'(0)).$$

更详细一些,乘(3.6) 以 $\bar{\alpha}$,(3.7) 以 $\bar{\beta}$,部分积分取虚部.计算表明 $\mathrm{Im}\lambda = 0$,因此 L 的谱是实的,L 的对称性推出对 L 的每个 γ

特征值 λ 具有上升性.因此 λ 的几何 γ 重数等于它们代数 γ 重数.

（ⅱ）对 $w_0 \leqslant \omega < \sqrt{\frac{4}{27}}$,存在 $\kappa > 0$,仅依赖于 w_0,使得对 L 的每个系数关于 $|\kappa|$ 是一致有界的,$0 \leqslant x \leqslant T(p)$,$\forall p \in (\rho_0, \rho_1)$,设$\lambda > 0$ 为 L 的一个特征值,(α, β) 为相应的规范化特征函数,使得

$$\int_0^T (\alpha^2 + \beta^2) \mathrm{d}x = 1.$$

对任何 $\varepsilon > 0$,有

$$|\beta_x \alpha| \leqslant \frac{\varepsilon^2}{2} \beta_x^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2} \alpha^2.$$

选取 $\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{\kappa}}$,估计 $\alpha_x \beta$ 项,可得

$$\lambda < \int_0^T \left(\kappa + \frac{\kappa}{2\varepsilon^2} \right) (\alpha^2 + \beta^2) \mathrm{d}x.$$

因此 $\lambda < \kappa + \frac{\kappa^2}{2}$.因 κ 仅依赖于 w_0,如选取 $c(w_0) = \kappa + \frac{\kappa^2}{2}$,则 $c \geqslant c(w_0)$,推出 $\lambda = c$ 不是 L 的一个特征值,$\forall p \in (\rho_0, \rho_1]$,$|\omega| \in \left(w_0, \sqrt{\frac{4}{27}} \right)$.

（ⅲ）现证没有 γ 特征值能通过原点,$\gamma \in S^1_* t$.这个命题等价于证明如 $\Phi(T, \lambda, P)$ 为线性化方程组(3.8)的 Floquet 矩阵,则 γ 不是矩阵 $\Phi(T, 0, P)$($\forall p \in (p_0 \rho_1]$)的一个特征值,一般说来,证明是困难的,计算量是大的,但这里由于方程组(3.2)的对称性,导致(3.2)的是 4 个参数的解具有某些附加的结构,此时解集可表示为

$$u = u(x, p, \omega, \psi) = \rho(x, p, \omega) e^{i(\psi + \theta(x, p, \omega))},$$

其中 ρ 为(3.3)的解,满足初始条件

$$\rho(0, p, \omega) = 0, \tag{3.9}$$

$$\rho_x(0, p, \omega) = p. \tag{3.10}$$

$\rho^2\theta' = \omega$，ψ 为附加的自由参数，为方便计算，解依赖于参数 p,ω,ψ，(3.2) 的变分方程为

$$0 = v_{xx} + (1 - 2u\bar{u})v - u^2\bar{v}.$$

简单计算表明 $\alpha + i\beta = \exp(-i\theta)v$ 为方程组(3.6)、(3.7) 在 $\lambda = 0$ 的解. $u(x)$ 对 x,ψ,p,ω 分别微商得

$$y_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho(x) \\ \rho'(x) \end{pmatrix}, \qquad y_2(x) = \begin{pmatrix} \rho'(x) \\ \rho''(x) \\ \dfrac{\omega}{\rho(x)} \\ \dfrac{-\omega\rho'(x)}{\rho(x)} \end{pmatrix},$$

$$y_3(x) = \begin{pmatrix} \rho_p \\ \rho_{px} \\ \rho R \\ (\rho R)_x \end{pmatrix}, \qquad y_4(x) = \begin{pmatrix} \rho_\omega \\ \rho_{\omega x} \\ \rho S \\ (\rho S)_x \end{pmatrix},$$

其中

$$R(x) = -\int_0^x \frac{2\omega\rho_p(s)}{\rho(s)^3}\mathrm{d}s = \theta_p,$$

$$S(x) = -\int_0^x \left(\frac{2\omega}{\rho^3}\rho_\omega - \frac{1}{\rho^2}\right)\mathrm{d}s = \theta_\omega.$$

注意到 $\rho(x)$ 为(3.2) 的是周期 $T(p)$ 的周期解，显然 $p \to \rho_0$ 时，$T(p) \to +\infty$，因为周期轨道逼近于同宿轨道，从基本的分支理论可知，当 $p \to \rho_1$ 时 $T(p) \to \dfrac{2\pi}{\sqrt{f'(p_1)}}$，还可证明 $T(p)$ 关于 p 单调减少，见附录 B，对于(3.8) 的四个独立解. 我们计算 Floquet 矩阵，为此需要这四个解在 $x = 0$ 和 $x = T(p)$ 上的正确边界条件，我们边界条件对这些参量微分，方便记 ρ 为 $\rho(x,F,\omega)$，从(3.9)，(3.10) 有

$$Y_1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ 0 \end{pmatrix} = Y_1(T(p)),$$

$$Y_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ B \\ \dfrac{\omega}{p} \\ 0 \end{pmatrix} = Y_2(T(p)),$$

其中 $B = \rho_{xx}(0) > 0, p \in (\rho_0, \rho_1)$. Y_3, Y_4 的边界条件易从(3.9),(3.10)得到,特别有

$$\rho(0, p, \omega) = \rho(T(\rho), p, \omega) = p.$$

因此

$$\rho_p(0, p, \omega) = 1,$$

$$\rho_x(T(p), p, \omega)T'(\rho) + \rho_p(T(p), p, \omega) = 1.$$

无论如何，由(3.10)知，上式左端第一项为零，因此 $\rho_p(T(p), p, w) = 1$.

从(3.10)得 $\rho_x(0, p, \omega) = 0 = \rho_x(T(p), p, \omega)$. 因此

$$\rho_{px}(0, p, \omega) = 0,$$

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\rho_x(T(\rho), p, \omega)\rho_{xx}T(p), p, \omega)T'(p) + \rho_{px}(T(p), p, \omega).$$

因此有

$$Y_3(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{-2\omega}{p^2} \end{pmatrix}, Y_3(T(p)) = \begin{pmatrix} 1 \\ -BT'(p) \\ PR(T(p), p) \\ \dfrac{-2\omega}{p^2} \end{pmatrix}.$$

现计算 Y_4 边界条件,(3.9),(3.10)对 ω 微分, ρ_ω、$\rho_{\omega x} = 0$; $x = 0$、$T(p)$,故有

$$Y_4(0)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\ \frac{1}{p}\end{pmatrix},\quad Y_4(T(p))=\begin{pmatrix}0\\0\\ \rho S(T(p))\\ \frac{1}{\rho}\end{pmatrix}.$$

再考虑(3.8)的基本矩阵解在 $\lambda=0$ 上：

$$\Psi(x)=[y_1(x),y_2(x),y_3(x),y_4(x)].$$

Floquet 矩阵 $\Phi(x,0)$，有 $\Phi(x,0)=\Psi(x)\Psi(0)^{-1}$.
简单计算表明

$$\Psi(0)=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&B&0&0\\p&\frac{\omega}{p}&0&0\\0&0&\frac{-2\omega}{p^2}&\frac{1}{p}\end{pmatrix},$$

$$\Psi(0)^{-1}=\begin{pmatrix}0&\frac{-\omega}{(p^2B)}&p^{-1}&0\\0&B^{-1}&0&0\\1&0&0&0\\ \frac{2\omega}{p}&0&&p\end{pmatrix}.$$

因此

$$\Phi(T(p),0)=\Psi(T(p))\Psi(0)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-BT'(p)&1&0&0\\pR+2\omega S&0&1&p^2S\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

其中 R,S 在 $T(p)$ 上取值，虽然 $\Phi(T(p),0)$ 只有简单特征值 $\gamma=1$ 是代数重数为4，因 $T'(p)<0$ 下面的，推出 $\gamma=1$ 的几何重数至多为3，除非 $S=0$ 在 $T(p)$ 上，此时重数为2，由此可知，对任何 $\lambda=0$ 不是 $\Phi(T(p),0)$ 的 γ 特征值，$\forall\gamma\in S_*^1$，$p\in(\rho_0,\rho_1]$，这就完成了定理3.2(1)的证明.

现在计算 γ 特征值指标 $c_1(\varepsilon(k,\gamma,\rho_1))$ 在常数解 $\rho=\rho_1$ 上这对应于GL方程(3.2)的周期解 $u(x)$, $u(x)=\rho_1 e^{ikx}$,其中波数 k 满足 $k^2+\rho_1^2=1$, $k=\dfrac{\omega}{\rho_1^2}$,此时线性化方程(3.8)的矩阵 $A(x,\lambda)$ 具有常数系数.

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda+2(1-k^2) & 0 & 0 & 2k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2k & \lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

简单计算可得这个矩阵的特征值满足的特征方程为

$$\sigma^4-2(3-(3k^2-1))\sigma^2+\lambda(\lambda+2(1-k^2))=0.$$

因此

$$\sigma^2=\lambda-H\pm\sqrt{(\lambda-H)^2-\lambda(\lambda+2(1-k^2))},\quad(3.11)$$

其中 $H=3k^2-1$. 因 $f(\rho)=\dfrac{-\omega^2}{\rho^3}+\rho-\rho^3$,则 $f'(\rho_1)=2H$,因此 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}<k\leqslant 1, H>0$;这是因为 ρ_1 为 $f(\rho)$ 两个正根较小的一个,令 $T_0=T(\rho_1)$ 为极限周期($p\to\rho_1$),可由以下方法得到. 对方程

$$\frac{4\pi^2}{T^2}r''+f(\rho_1+r)=0.$$

由分支理论可构造小振幅周期,其中 $r=r(y), 0\leqslant y\leqslant 2\pi$.

分支的线性化准则可得方程 $\dfrac{4\pi^2}{r^2}r''+f'(\rho_1)r=0$,具有 2π 周期解,产生于参数值

$$T_0=\frac{2\pi}{\sqrt{f'(\rho_1)}}=\frac{2\pi}{\sqrt{2H}}.\qquad(3.12)$$

L 的 γ 的特征值 λ 能在 $p=\rho_1$ 处显式计算.

注意到 λ 为这个算子的 γ 特征值,当矩阵 $A(\lambda)$ 具有纯虚特征值 σ(因 Floquet 矩阵 $\Phi(T_0,\lambda)=\exp(A(\lambda)T_0)$),对此 λ 值 σ^2 是非正的,如图 4.1 所示. 从图 4.1 中可看到,具有分支点 $\lambda=\lambda_0=$

$\frac{H^2}{2(H+(1-k^2))}$,对 $\lambda \in [0,\lambda_0)$,具有两个非正 σ^2. 从(3.11)可设 $-2H \leqslant \sigma^2 \leqslant 0$,对于 $\lambda \in [0,\lambda_0)$,令 $-\sigma_\pm^2(\lambda)$ 表示对应 σ^2 的两个值,σ_+ 取正实数,对于 $\lambda \in [0,\lambda_0]$,$L$ 的 γ 特征值为

$$\gamma_1(\lambda) = e^{\pm T_0\sigma_+(\lambda)i}.$$

令

$$\gamma_2(\lambda) = e^{-T_0\sigma_+(\lambda)i},$$
$$\gamma_3(\lambda) = e^{T_0\sigma_-(\lambda)i},$$
$$\gamma_4(\lambda) = e^{-T_0\sigma_-(\lambda)i}.$$

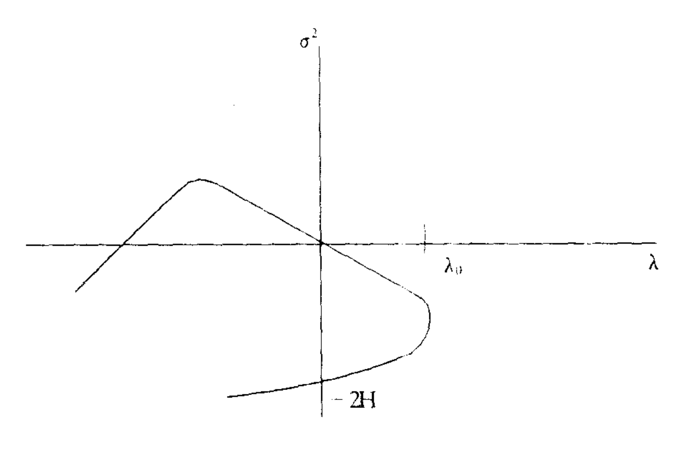


图 4.1

这四个函数在 S^1 上的像如图 4.2 所示,特别 $\lambda=-1$ 特征值,$\left(\sigma^2=\frac{-H}{2}\right)$简单计算表明,$\sigma_\pm^2(\lambda_0)<\frac{H}{2}$,因此 $\gamma_1(\lambda_0)$ 和 $\gamma_4(\lambda_0)$ 位于第三象限,从图 4.1 中可清楚看出,对任何 $\gamma \in S_*^1$,存在 $\lambda \in (0,\lambda_0]$ 二个值从图中可看到,在 $\lambda=\lambda_1$ 上,Floquet 矩阵 $\Phi(T_0,\lambda_1)$ 具有其他三个不同特征值,$\gamma_2(\lambda_1),\gamma_3(\lambda_1),\gamma_4(\lambda_1)$ 分别在第三、第一、第四象限,因此 γ 是 Floquet 矩阵的简单特征值,类似可看到对 Floquet 矩阵 $\Phi(T,\lambda_2)$,γ 也是一个简单特征值,这就推出 γ 特征指标 $c_1(\varepsilon(k,\gamma,\rho_1))=2$,定理 3.2 的证明现已完成. 由此对于任何 $\gamma \in S_*^1$,存在在 K 中二个 γ 特征值.

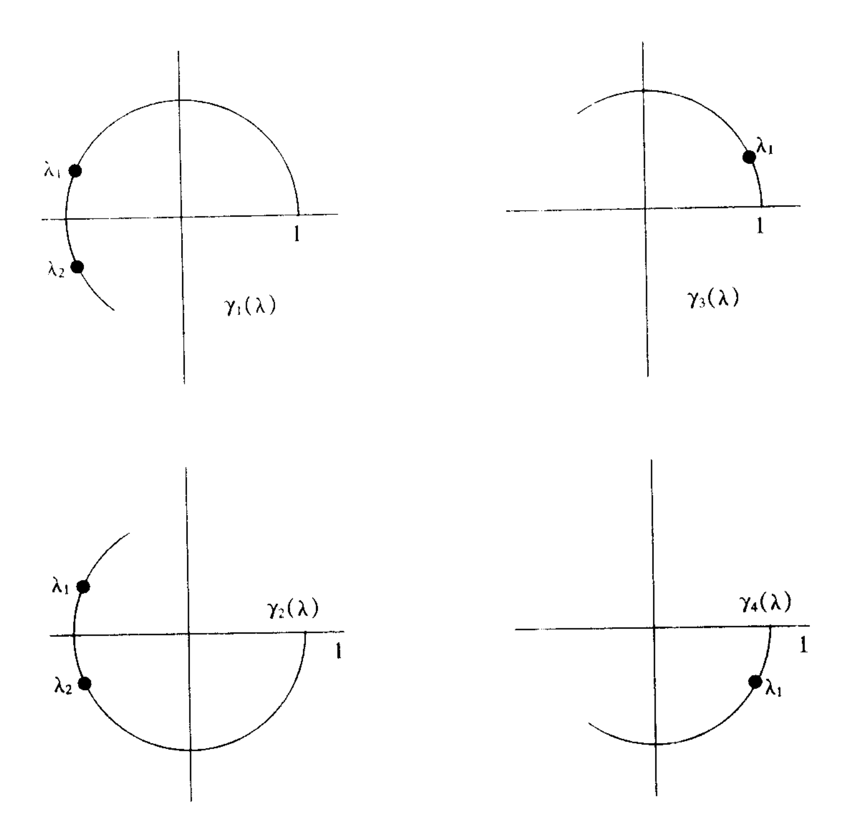


图 4.2

$\lambda_{\min}(\gamma) \leqslant \lambda_{\max}(\sigma)$，因 γ 特征值指数给出精确在闭曲线 K 内一切 γ 特征值的数目，于是有

$$\lambda_0 = \inf\{\lambda_{\min}(\gamma) : \gamma \in S_*^1\},$$

$$\lambda_1 = \max\{\lambda_{\max}(\gamma) : \gamma \in S_*^1\}.$$

这就推出区间 $\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda$ 位于 L 的谱中.

附录 A　γ 特征值指标

我们提供一个从 $\varepsilon(K, \gamma)$ 构造 γ 特征值和计算 γ 特征值指标的方法. 设 L 为二阶微分算子.

$$Lp = Dp'' + a(x)p' + b(x)p,$$

其中 $p \in C^n$, $a(x)$, $b(x)$ 具有 T 周期矩阵，$K \subset$ ℂ 为简单闭曲线，它和 L 的 γ 特征值 $|\gamma| = 1$ 不连接. 考虑一阶方程组

$$Y' = A(x,\lambda)Y, \tag{A.1}$$

其中 $Y = (p,g)^t \in C^{2n}$,且

$$A(x,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ D^{-1}(\lambda I - b(x)) & -D^{-1}a(x) \end{pmatrix}.$$

它等价于方程组 $Lp = \lambda p$,如 λ 为这个方程组的 γ 特征值,则存在相应的解 $Y(x,\lambda)$ 满足边界条件 $Y(T,\lambda) = \gamma Y(0,\lambda)$,为了给出边界条件的几何解释,附加 $2n$ 个变元 W:

$$Y' = A(x,\lambda)Y, \tag{A.2}$$

$$W' = 0. \tag{A.3}$$

令

$$X_\gamma = \{(\gamma W, W) \in C^{4n} : W \in C^{2n}\}$$

为子空间,显然,$Y(x)$ 是 (A.1) 满足边界条件 $Y(T) = \gamma Y(0)$ 的一个解当且仅当 $Z(x) = (Y(x), W)$ 为(A.2)、(A.3) 的一个解,满足几何边界条件

$$Z(0) = X_1, Z(T) \in X_\gamma. \tag{A.4}$$

γ 特征值丛构造如下:令 $K_0 \subset K$,丛的基空间 $B : B = \{0\} \times K^0 \cup [0,T] \times K \cup \{T\} \times K^0$.因此 B 为 2 球.其次,定义 $\varepsilon(K,\gamma)$ 的纤维,令 $\gamma(x) \in S^1$,为连续曲线使得 $\gamma(0) = 1, \gamma(T) = \gamma$,令 $\mathscr{A}$ 为平凡丛

$$\mathscr{A} = \bigcup_{(X,\lambda)\in B} \mathbb{C}^{4n}/X_{\gamma(x)} \times \mathbb{C}^{4n}/X^{\perp}_{\gamma(x)}.$$

令 $e_i(1 \leqslant i \leqslant 2n)$ 为 $\mathbb{C}^{2n}$ 中的标准基,$Z(x,\lambda)$ 为(A.3),(A.4) 的解满足初始条件

$$Z_i(0,\lambda) = (e_i, e_i). \tag{A.5}$$

用 Zi 形成截面

$$\chi_i(x,\lambda) = (Z_i(x,\lambda) + X_{\gamma(x)}, \frac{T-x}{T}Z_i(x,\lambda) + X^{\perp}_{\gamma(x)}).$$

注意到条件(A.5) 构成半个边界条件(A.4),为 γ 特征函数所满足,在 $x = 0$ 上,这些截面展成空间 $\{\bar{o}\} \times \mathbb{C}^{4n}/X_1^{\perp}$;在 $x = T$ 上,如 λ 不是 L 的 γ 特征值,则它们展成空间 $\mathbb{C}^{4n}/X_\gamma \times \{\bar{o}\}$.

定义 A.1 γ 特征值丛 $\varepsilon(K,\gamma) = (E,B,\pi)$,其中 $\pi : B \to B$

为投影映照,定义为

$$\pi^{-1}(x,\lambda)=\begin{cases}\{\overline{o}\}\times\mathbb{C}^{4n}/X_1^{-} & (x=0,\lambda\in K^0),\\ \operatorname{Span}\chi_i(x,\lambda) & (0\leqslant x\leqslant T,\lambda\in K),\\ \mathbb{C}^{4n}/X_\gamma\times(\overline{o}) & (x=T,x\in K^0).\end{cases}$$

γ 特征数值指标定义为在丛 $\varepsilon(K,\gamma)$ 上的第一阵数 $C_1(\varepsilon(K,\gamma))$.已经被证明,这个数不变是等于在 K 中 L 的 γ 特征值的数目,这两者之联系是通过某解析函数 $D(\lambda,r)$(该函数被称为 Evans 函数)来进行的,Evans 函数的根精确等于 L 的 γ 特征值.

附录 B　$T(p)$ 的单调性

方程(3.3)是可积的,具有积分 $k=(\rho')^2+\rho+\frac{1}{2}\rho^4+\frac{\omega^2}{\rho^2}$,初始条件 p 为多项式

$$F_{k,w}(\rho)=\frac{1}{2}\rho^6-\rho^4+k\rho^2-\omega^2 \tag{B.1}$$

的零点,$F_{k,w}$ 具有三个零点$P>0$:$P_1(k,w)=p\leqslant P_2(k,w)\leqslant P_3(k,w)$,$P_2$ 对应于 p' 的第二个零点,ρ 为(3.3)方程具初值 $\rho(0,p)=p,p'(0,p)=0$ 的周期解;$P_3>\rho_2$,现证

$$\frac{\partial}{\partial k}T(p)=\frac{\partial}{\partial k}T(p(k),\omega)>0. \tag{B.2}$$

因此,因 p 为 k 的单调减少函数,T 为 P 的单调函数(固定 w)可证:

$$T(k,w)=\frac{\pi\sqrt{2}}{\mathscr{M}(\sqrt{p_3^2-p_2^2},\sqrt{p_3^2-p_1^2})}.$$

其中 $\mathscr{M}(a,b)$ 为 a,b 的代数几何平均,定义为:$0<a=a_0\leqslant b=b_0$.

$$a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n},b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n),\mathscr{M}(a,b)=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n.$$

因而(B.2)是对的,如果

$$\begin{aligned}M(k+\delta)&=\mathscr{M}(\sqrt{P_3^2(k+\delta)-P_2^2(k+\delta)},\sqrt{P_3^2(k+\delta)-P_1^2(k_1+\delta)})\\ &<\mathscr{M}(\sqrt{P_3^2(k)-P_2^2(k)},\sqrt{P_3^2(k)-P_1^2(k)})\\ &=\mathscr{M}(k)\qquad\forall\,\delta>0,w\text{ 固定}.\end{aligned}$$

展开 $P_i(k+\delta)$ 为 $p_i(k)+r_i\delta+0(\delta^2)'(i=1,2,3)$, $0<\delta\ll 1$. r_i 能由(B.1)决定,因此常数 a_0,a_1,b_0,b_1 能被找到使得

$$\begin{aligned}\mathscr{M}(k+\delta) &= \mathscr{M}(a_0+a_1\delta+0(\delta^2),b_0+b_1\delta+0(\delta^2)) \\ &= \mathscr{M}(\sqrt{a_0b_0}+s_1\delta+0(\delta^2), \\ &\quad \frac{1}{2}(a_0+b_0)+s_2\delta+0(\delta^2)),\end{aligned}$$

$$s_1=\frac{a_1b_0+a_0b_1}{2\sqrt{a_0b_0}},s_2=\frac{1}{2}(a_1+b_1).$$

推出 $s_j<0(j=1,2)$,因而 $\mathscr{M}(k+\delta)<\mathscr{M}(k)$.

§4 广义 Ginzburg-Landau 方程平面波的非线性稳定性

考虑如下的 Ginzburg-Landau 方程

$$\begin{aligned}w_t &= \alpha_1 w_{xx}+(\lambda(w)+i\omega(|w|))w \\ &\quad +\alpha_3|w|^2w_x+\alpha_4w^2w_x^*,\end{aligned}\tag{4.1}$$

其中 $w\in\mathbb{C},(x,t)\in R\times R^+,\alpha_j=a_j+ib_j\in\mathbb{C}$,且

$$\lambda(r)=c_1+c_2r^2+c_3r^4,$$

$$w(r)=d_1r^2+d_2r^4.$$

因此 $c_j,d_j\in R$,设 GL 方程的平面波解为

$$w_p(x,\rho_1)=r_0e^{-i(\theta_0x-\sigma_0t)},$$

其中

$$\lambda(r_0)=\theta_0^2-(b_3-b_4)r_0^3\theta_0,$$

$$\omega(r_0)=(a_3-a_4)r_0^2\theta_0+\sigma_0.$$

若作变换 $w\to we^{i\sigma_0t}$,即可设 $\sigma_0=0$.

定义 4.1 平面波称为是谱稳定的,如果曲线 $\mathrm{Re}\gamma=-C(\mathrm{Im}\gamma)^2,(C>0)$ 所界的复平面的谱是有界的.

令 $w(x,t)=r(x,t)e^{i\theta(x,t)}$,方程(4.1)变为

$$r_t = r_{xx} + r\lambda(r) - r\theta_x^2 + A_+ r^2 r_x + B_- r^3\theta_x,$$
$$\theta_t = \theta_{xx} - \omega(r) + 2\frac{r_x}{r}\theta_x - B_+ rr_x + A_- r^2\theta_x, \tag{4.2}$$

其中 $A_\pm = a_3 \pm a_4, B_\pm = b_3 \pm b_4$.

在此坐标系下,平面波解对应于 $r = r_0, \theta = \theta_0 x$.

为了研究平面波的稳定性,引入以下参数:

$$\Gamma_1 = 4\theta_0^2 - 4b_3 r_0^2\theta_0 + (B_+ B_- - a_4^2)\gamma_0^4,$$
$$\Gamma_2 = 2r_0\theta_0 w'(r_0) + a_4 T_3\gamma_0^2 + 2A_- B\quad \gamma_0^4\theta_0$$
$$- 4A_-\gamma_0^2\theta_0^2 - B_-\gamma_0^3 w'(r_0),$$
$$\Gamma_3 = \gamma_0\lambda'(r_0) + 2B_-\gamma_0^2\theta_0.$$

假设 A,设这些参数 Γ_i 满足条件

(a) $\Gamma_3 < 0$,

(b) $\Gamma_1 + \Gamma_3 + \left(\frac{\Gamma_2}{\Gamma_3}\right)^2 < 0$.

当 $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$ 时,上述条件简化为

(a) $\lambda'(r_0) < 0$,

(b) $\gamma_0\lambda'(r_0) + 4\theta_0^2\left[1 + \frac{\omega'(r_0)}{\lambda'(r_0)}\right] < 0$.

引入波的扰动

$$r = r_0 + \rho, \theta = \theta_0 x + \phi. \tag{4.3}$$

我们这一节要证明如下定理

定理4.2 设 $u = (\rho,\varphi)$,令 $\mu = \left(2^{\frac{3}{4}} + \max\left(1,\left(\frac{2}{|\Gamma_3|}\right)^{\frac{3}{4}}\right)\Big/|\Gamma_3|\right)$.

设(s)$\mu\,|\,r_0(B_- r_0^2 - 2\theta_0)\,| < 1$,则当 $E_0 = \|u_0\|_{H^3} + \|u_0\|_{L^1}$ 充分小时,平面波是稳定的,且其扰动满足估计:

(a) $\|\rho(t)\|_{H^3} \leqslant c(1+t)^{-\frac{3}{4}}E_0$,

(b) $\|\varphi_x(t)\|_{H^2} \leqslant c(1+t)^{-\frac{3}{4}}E_0$,

(c) $\|\varphi(t)\|_{H^2} \leqslant c(1+t)^{\frac{1}{4}}E_0$.

推论 4.3 在定理 4.1 假设下，平面波的扰动满足估计：

(a) $\| \partial_x^i \rho(t) \|_{L^\infty} \leqslant c(1+t)^{-\frac{3}{4}} E_0, \qquad i = 0,1,2;$

(b) $\| \varphi(t) \|_{L^\infty} \leqslant c(1+t)^{-\frac{1}{4}} E_0, \qquad i = 0,1,2,$

推论 4.4 在推论 4.3 假设下，有估计：

(c) $\| \partial_x^i \varphi(t) \|_{L^\infty} \leqslant c(1+t)^{-\frac{3}{4}} E_0, \qquad i = 1,2.$

为了证明以上定理，需要证明某些引理.

将(4.3) 代入(4.2) 可得发展方程

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix}_t = L\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} + H(\rho, \rho_x, \varphi_x), \tag{4.4}$$

其中线性算子 L 为

$$L = \begin{pmatrix} L_1, L_2 \\ L_3, L_4 \end{pmatrix},$$

$$L_1 = \partial_x^2 + A^+ r_0^2 \partial_x + r_0(\lambda'(r_0) + 2B_- \gamma_0 \theta_0),$$

$$L_2 = \gamma_0(B_- r_0^2 - 2\theta_0)\partial_x,$$

$$L_3 = \left(\frac{2\theta_0}{r_0} - B_+ r_0\right)\partial_x + (2A - \gamma_0\theta_0 - \omega'(\gamma_0)),$$

$$L_4 = \partial_x^2 + A_- r_0^2 \partial_x.$$

高阶项满足 $\quad | H(u) | = O((u)^2), \ | u | \to 0.$

线性算子 L 能写成 $L = I_2\partial_x^2 + N\partial_x + M$，其中 I_2 为 2×2 恒等矩阵，M, N 为

$$N = \begin{pmatrix} A^+ r_0^2 & B_- r_0^3 - 2r_0\theta_0 \\ 2\theta_0/r_0 - B_+ r_0 & A_- r_0^2 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} r_0\lambda'(r_0) + 2B_- r_0^2\theta & 0 \\ 2A_- r_0\theta_0 - \omega'(\theta_0) & 0 \end{pmatrix}.$$

从文献[27]可知，L 的谱在任何 L^p 空间中($1 \leqslant p \leqslant \infty$)是界于此曲线

$$C_s = \{\gamma : | -k^2 I_2 + iNk + (M - \gamma I_2) | = 0, k \in R\}.$$

引理 4.5 设假设 A 成立，则平面波是谱稳定的，

证 通过计算可知对 $\gamma \in C_s$，

$$\gamma(k) = -k^2 + \frac{\Gamma_3}{2} + ia_3 r_0^2 k + \left(\left(\frac{\Gamma_3}{2}\right)^2 + \Gamma_1 k^2 + i\Gamma_2 k\right)^{\frac{1}{2}},$$

由此得

$$k_0 \gamma(k) = -k^2 + \frac{\Gamma_3}{2} + \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}(\Lambda + \Omega)^{\frac{1}{2}},$$

其中

$$\Lambda = \left(\frac{\Gamma_3}{2}\right)^2 + \Gamma_1 k^2.$$

注意到因 $\Gamma_3 < 0$，则 $\mathrm{Re}\gamma(0) = 0$，且

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\mathrm{Re}\gamma\right]_{k=0} = -1 + \frac{1}{(\Gamma_3)}\left(\Gamma_1 + \left(\frac{\Gamma_2}{\Gamma_3}\right)^2\right),$$

故

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}(\mathrm{Re}\gamma) < 0$(假设 1 成立) 因

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\gamma\right]_{k=0} = i\left(a_3 r_0^2 + \frac{\Gamma_2}{|\Gamma_3|}\right).$$

因此平面波对小的 k 是谱稳定的.

由文献[27]可知，算子 L 当 $|\gamma| \to \infty$ 时为谱稳定，于是余下来是证明对一切 k，$\mathrm{Re}\gamma(k) < 0$，这等价于证明

$$\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}(\Lambda + \Omega)^{\frac{1}{2}} < k^2 - \frac{\Gamma_3}{2}.$$

因 $\Gamma_3 < 0$，以上等式两端平方可得

$$\Omega < 2k^4 - (2\Gamma_3 + \Gamma_1)k^2 + \left(\frac{\Gamma_3}{2}\right)^2.$$

由假设 A 可知上式右端为正，再平方之，由简单计算，可知条件 $\mathrm{Re}\gamma(k) < 0$ 包含在引理假设中.

由于 L 为 Laplace 算子的低阶振动，因此 L 形成解析半群，现

已知平面波为谱稳定，我们能对半群进行估计，因矩阵 M 和 N 为常系数，故可进行 F 氏变换.

引理 4.6 由 L 形成的半群 $S(t)$ 满足估计

(a) $\| \partial_x^k S(t)u \|_{L^2} \leqslant e(1+t)^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+k)} \| u \|_{L^1} + Ce^{-\beta t} \| \partial_x^k u \|_{L^2}$,

(b) $\| \partial_x^k S(t)u \|_{L^2} \leqslant e(1+t)^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+k)} \| u \|_{L^1} + Ct^{-\frac{1}{2}} e^{-\beta t} \cdot \| \partial_x^{k-1} u \|_{L^2}$,

对某 $\beta > 0$.

证 此证明是标准的，(a) 从略，证明(b)，考虑线性方程

$$\begin{cases} v_t = Lv, \\ v(0) = v_0. \end{cases} \tag{4.5}$$

它的解为 $v(t) = S(t)v_0$，以 $p(\xi)$ 表示 L 的符号，故对(4.5)的解有

$$\partial_x^k v(\xi t) = (i\xi)^k e^{ip(\xi)} \hat{v}_0(\xi), \quad k = 0,1,\cdots.$$

因 L 是谱稳定的，故存在常数 $C,\beta > 0$，使得 $| e^{ip(\xi)} | \leqslant ce^{-\beta \xi^2 t}$.

先设 $k = 1$，有 $| \partial_x \hat{v}(\xi,t) | \leqslant C\xi^2 e^{-\beta\xi^2 t}$. 由两端平方积分得

$$\begin{aligned} \| \partial_x \hat{v}(k) \|_{L^2}^2 \leqslant & C\int_{|\xi|\leqslant 1} \xi^2 e^{-2\beta\xi^2 t} | \hat{v}_0(\xi) |^2 \mathrm{d}\xi \\ & + C\int_{|\xi|>1} \xi^2 e^{-2\beta\xi^2 t} | \hat{v}_0(\xi) |^2 \mathrm{d}\xi, \end{aligned} \tag{4.6}$$

因 $\| \widehat{\partial_x^k v} \|_{L^2} = \| \partial_x^k v \|_{L^2}, k \geqslant 0$，和 $\| \hat{v} \|_{L^\infty} \leqslant \| v \|_{L^1}$ 中的第一项可估计为

$$\begin{aligned} \int_{|\xi|\leqslant 1} \xi^2 e^{-2\beta\xi^2 t} | \hat{v}_0(\xi) |^2 \mathrm{d}\xi & \leqslant \| \hat{v}_0 \|_{L^\infty}^2 \int_{|\xi|\leqslant 1} \xi^2 e^{-2\beta\xi^2 t} \mathrm{d}\xi \\ & \leqslant C \| v_0 \|_{L^1}^2 (1+t)^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

为估计第二项，注意到 $| y | e^{-2\beta y} \leqslant ce^{-2\alpha y}, 0 < \alpha < \beta$，因此

$$\int_{|\xi|>1}\xi^2\cdot e^{-2\beta\xi^2 t}\,|\hat{v}_0(\xi)|^2\mathrm{d}\xi = t^{-1}\int_{|\xi|>1}(\xi^2 t)e^{-2\beta\xi^2 t}\,|\hat{v}_0(\xi)|^2\mathrm{d}\xi$$

$$\leqslant ct^{-1}\int_{|\xi|>1}e^{-2\alpha\xi^2 t}\,|\hat{v}_0(\xi)|^2\mathrm{d}\xi$$

$$\leqslant ct^{-1}e^{-2\alpha t}\int_{|\xi|>1}|\hat{v}_0(\xi)|\,\mathrm{d}\xi$$

$$\leqslant ct^{-1}e^{-2\alpha t}\|v_0\|_{L^2}^2.$$

注意到 $a^2+b^2\leqslant(a+b)^2, a, b>0$,(4.6) 两端开方,得到 $k=1$ 的结果,对于 $k>1$ 的证明是类似的.

现证明主要定理 4.2,令线性算子 L_1 为

$$L_1=\partial_x^2+A_+ r_0^2\partial_x+\Gamma_3.$$

用 F 氏变换易证 L_1 生成半群 $S_1(t)$,且对 $k\geqslant 0$ 满足

$$\|\partial_x^k S_1(t)\|_{L^2}\leqslant e^{\Gamma_3 t}\|\partial_x^k u\|_{L^2}. \tag{4.7}$$

因 $\Gamma_3<0$,令 $H=(H_1,H_2)$,使得

$$\rho_t=L_1\rho+r_0(B_- r_0^2-2\theta_0)\phi_x+H_1(\rho,\rho_x,\phi_x). \tag{4.8}$$

令 $u=(\rho,\phi)$,考虑积分方程

$$\begin{cases}\rho(t)=S_1(t)\rho_0+r_0(B_- r_0^2-2\theta_0)\displaystyle\int_0^t S_1(t-\tau)\partial_x u_2(\tau)\mathrm{d}\tau\\ \qquad\qquad+\displaystyle\int_0^t S_1(t-\tau)H_1(\rho(\tau),u_x(\tau))\mathrm{d}\tau,\\ u_x(t)=\partial_x S(t)u_0+\displaystyle\int_0^t\partial_x S(t-\tau)H(\phi(\tau),u_x(\tau))\mathrm{d}\tau.\end{cases} \tag{4.9}$$

显然,如果(ρ,ϕ) 为(4.9) 的解,则它也是原来问题(4.4) 的解,更简化些,令 $v=u_x$,注意到 $\partial_x S(t)=S(t)\partial_x$,由(4.9) 得

$$\begin{cases}\rho(t)=S_1(t)\rho_0+r_0(B_- r_0^2-2\theta_0)\displaystyle\int_0^t S_1(t-\tau)v_2(\tau)\mathrm{d}\tau\\ \qquad\qquad+\displaystyle\int_0^t S_1(t-\tau)H_1(\rho(\tau),u_x(\tau))\mathrm{d}\tau,\\ v(t)=S(t)v_0+\displaystyle\int_0^t\partial_x S(t-\tau)H(\phi(\tau),v(\tau))\mathrm{d}\tau.\end{cases} \tag{4.10}$$

以下引理证明(4.10) 至少具有局部解

引理 4.7 设$(\rho_0, v_0) \in H^2$,则存在 $T>0$ 使得

$$\rho(t), v(t) \in H^2, t \in [0, T).$$

证 由引理 4.6 知 $S(t)$ 满足估计

$$\| \partial_x^k S(t) u \|_{H^2} \leqslant C t^{-\frac{k}{2}} \| u \|_{H^2}, k=0,1,$$

注意 $t^{-\frac{1}{2}}$ 当 $x \to 0$ 时可积,由(4.7)知

$$\| S(t) u \|_{H^2} \leqslant e^{\Gamma_3 t} \| u \|_{H^2}.$$

由 Sobolev 嵌入定理知 $\| u^2 \|_{H^2} \leqslant c \| u \|_{H^2}^2$,高阶项 H_1 和 H 在 H^2 中连续,存在性证明可由标准的应用半群理论得到.

现已知(4.9)的解至少在短时间内存在,现作长时间形态分析,令

$v=(\rho, u_x), u=(\rho, \phi)$,令

$$E_0 = \| u_0 \|_{H^3} + \| u_0 \|_{L^1}.$$

以下引理将给出定理 4.2 的(a),(b)部分,

$\| \rho \|_{H^3} \leqslant \| v \|_{H^2}, \| \phi_x \|_{H^2} \leqslant \| v \|_{H^2}.$

引理 4.8 如 E_0 充分小,则(1.9)的解满足估计

$$\| v(t) \|_{H^2} \leqslant c(1+t)^{-\frac{3}{4}} E_0$$

证 首先注意到 $\| H_1(v) \|_{H^2} \leqslant C \| v \|_{H^2}^2, \| H_1(v) \|_{L^1} \leqslant C \| v \|_{H^2}^2$,由引理 4.6 和方程(4.9)可得

$$\| \rho(t) \|_{H^2} \leqslant e^{\Gamma_3 t} \| v_0 \|_{H^2} + \alpha \int_0^t \Gamma_3(t-\tau) \| \phi_x(\tau) \|_{H^2} \mathrm{d}\tau + \int_0^t e^{\Gamma_3(t-\tau)} \| v(\tau) \|_{H^2}^2 \mathrm{d}\tau,$$

$$\| u_x(t) \|_{H^2} \leqslant C(1+t)^{-\frac{3}{4}} E_0 + C\int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{3}{4}} \| v(\tau) \|_{H^2}^2 \mathrm{d}\tau + C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} e^{-\beta(t-\tau)} \| v(\tau) \|_{H^2}^2 \mathrm{d}\tau,$$

其中

$$\alpha = | r_0(B - r_0^2 - 2\theta_0) |.$$

注意到 $\| \rho_0 \|_{H^2} \leqslant E_0, \| \phi_x \|_{H^2} \leqslant \| v \|_{H^2}$,则有

$$\| v(t) \|_{H^2} \leqslant CE_0(1+t)^{-\frac{3}{4}} + \alpha\int_0^t e^{\Gamma_3(t-\tau)} \| v(\tau) \|_{H^2} d\tau$$
$$+ C\int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{3}{4}} \| v(\tau) \|_{H^2}^2 d\tau$$
$$+ C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} e^{-\beta(t-2)} \| v(\tau) \|_{H^2}^2 d\tau. \quad (4.11)$$

令

$$M(t) = \sup_{0\leqslant\tau\leqslant t} (1+\tau)^{-\frac{3}{4}} \| v(\tau) \|_{H^2},$$

由 $M(t)$ 的定义,(4.11) 可写为

$$\| v(t) \|_{H^2} \leqslant CE_0(1+t)^{-\frac{3}{4}} + 2M(t)\int_0^t T_3(t-\tau)(1+\tau)^{-\frac{3}{4}} d\tau$$
$$+ CM^2(t)\int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{3}{4}}(1+\tau)^{-\frac{3}{2}} d\tau$$
$$+ CM^2(t)\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} e^{-\beta(t-\tau)}(1+\tau)^{-\frac{3}{2}} d\tau, \quad (4.12)$$

$T_3 < 0$,先从$\left(0, \frac{t}{2}\right)$,再从$\left(\frac{t}{2}, t\right)$积分,可知

$$\int_0^t e^{T_3(t-\tau)}(1+\tau)^{-\frac{3}{4}} d\tau \leqslant \mu(1+t)^{-\frac{3}{4}},$$

其中

$$\mu = \left(\tau^{\frac{3}{4}} + \max\left\{1, \left(\frac{2}{|\Gamma_3|}\right)^{\frac{3}{4}}\right\}\right) \Big/ |\Gamma_3|.$$

类似有

$$\int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{3}{4}}(1+\tau)^{-\frac{3}{2}} d\tau \leqslant C(1+t)^{-\frac{3}{4}},$$
$$\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} e^{-\beta(t-\tau)}(1+\tau)^{-\frac{3}{2}} d\tau \leqslant C(1+t)^{-\frac{3}{2}}.$$

此时(4.12) 可写为

$$\| v(t) \|_{H^2} \leqslant CE_0(1+t)^{-\frac{3}{4}} + \alpha\mu M(t)(1+t)^{-\frac{3}{4}}$$
$$+ CM^2(t)(1+t)^{-\frac{3}{4}}. \quad (4.13)$$

因 $M(t)$ 为 t 的减函数,有 $M(t) \leqslant CE_0 + \alpha\mu M(t) + CM^2(t)$,由条件(s) 有 $\alpha\mu < 1$,因此如 E_0 充分小,则 $M(t) \leqslant CE_0$.

由上述引理还可得出定理的第三部分(c) 由(4.4) 有

$$\phi_t = L_3\phi + L_4\rho + H_2(v),$$

具有解

$$\phi(t) = S_3(t)\phi_0 + \int_0^t S_3(t-\tau)L_4\rho(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_0^t S_3(t-\tau)\cdot H(v(\tau))\mathrm{d}\tau,$$

其中 $S_3(t)$ 为 L_3 所形成的半群.

用 F 氏变换可证 $S_3(t)$ 满足引理 1.2 估计.

$\| S_3(t)u \|_{H^2} \leqslant C \| u \|_{H^2}$,

$\| L_4\rho \|_{H^2} \leqslant C \| \rho \|_{H^2} \leqslant C \| v \|_{H^2}$,

$\| H_2(v) \|_{H^2} \leqslant C \| v \|_H^2$, $\| H_2(v) \|_{L^1} \leqslant C \| v \|_{H^2}^2$.

因此,利用适当的半群估计可得

$$\| \phi(t) \|_{H^2} \leqslant C(1+t)^{-\frac{1}{4}}E_0 + C\int_0^t \| v(\tau) \|_{H^2}\mathrm{d}\tau + C\int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{1}{4}} \| v(\tau) \|_{H^2}^2\mathrm{d}\tau.$$

由引理 4.8 推出

$$\| \phi(t) \|_{H^2} \leqslant C(1+t)^{-\frac{1}{4}}E_0 + CE_0\int_0^t (1+\tau)^{-\frac{3}{4}}\mathrm{d}\tau + CE_0^2\int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{1}{4}}(1+\tau)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}\tau,$$

因

$$\int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{1}{4}}(1+\tau)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}\tau \leqslant C(1+t)^{-\frac{1}{4}},$$

由此得

$$\| \phi(t) \|_{H^2} \leqslant CE_0(1+t)^{-\frac{1}{4}} + CE_0(1+t)^{\frac{1}{4}} \leqslant CE_0(1+t)^{\frac{1}{4}}.$$

§5 广义 Ginzburg-Landau 方程的有限维惯性形式

在 §1 中,我们考虑了如下方程

$$\partial_t u + vu_x = \chi u + (\gamma_r + ir_i)u_{xx} - (\beta_r + i\beta_r)|u|^2 u$$
$$- (\delta_r + i\delta_i)|u|^4 u - (\lambda_r + i\lambda_i)|u|^2 u_x$$
$$- (\mu_r + i\mu_i)u^2 \bar{u}_x, \quad x \in R^1, t > 0, \qquad (5.1)$$

在条件之一 $4\gamma_r\delta_r > (\lambda_i - \mu_i)^2$ 下,证明了方程(5.1) 周期初值问题整体解的存在性、惟一性和整体吸引子的存在性. 现先来证明条件 $4\gamma_r\delta_r > (\lambda_i - \mu_i)^2$ 是不可改进的. 如果 $4\gamma_r\delta_r \leqslant (\lambda_i - \mu_i)^2$,考虑空间周期解 $u = \mathrm{Re}^{ikx}$ 代入(5.1) 或取实部解出 R^2,得

$$R^2 = \frac{1}{2\delta_r}(-c(\beta_r - (\lambda_i - \mu_i)k) \pm \sqrt{(\beta_r - (\lambda_i - \mu_i)k)^2 - 4\delta_r\gamma_r k^2 + 4\delta_r\chi}$$

$$= \frac{k}{2\delta_r}\left(-\frac{\beta_r}{k} - (\lambda_i - \mu_i)\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\beta_r}{k} - (\lambda_i - \mu_i)^2\right) - 4\delta_r\gamma_r + \frac{4\delta_r\chi}{k^2}},$$

可见当 $k \to \pm\infty$ 时,$R^2 \to +\infty$. 这说明解爆破. 因此 $4\gamma_r\delta_r > (\lambda_i - \mu_i)^2$ 是不可改进的.

因为(5.1) 的解半群 $S(t)$ 具有有限维吸引子,为了有效地考虑解的长时间行为,我们期望用一个有限维常微分方程组来描述吸引子,为此必须考虑惯性流形,但惯性流形存在的一个很重要条件是谱裂口条件:$\lambda_{m+1} - \lambda_m \geqslant M_0^2 \frac{1+l}{l}(\lambda_{m+1}^\alpha + \lambda_m^\alpha)$, 这里 $\{\lambda_m\}_{m=1}^\infty$ 是算子 $-\gamma_r\partial_{xx}$ 具周期条件的一组特征值 $\lambda_m = \gamma_r\left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2$, L 是空间周期长度, $l \leqslant \frac{1}{8}$ 所定, $M_0 > 0$ 是估计得到的一个常数,这里,因(5.1) 式中有非线性导数项,故此时 $\alpha = \frac{1}{2}$. 如谱裂口条件满足,即

$$\gamma_r\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2(2m+1) > M_0\frac{1+l}{l}\cdot\frac{2\pi}{l}\cdot\gamma_r^{\frac{1}{2}}(2m+1),$$

即

$$\frac{1+l}{l}\gamma_r^{\left(-\frac{1}{2}\right)}L < \frac{2\pi}{M_0}.$$

从上式可以看出,当 L 适当小或 γ_r 充分大时,谱裂口条件才能满足,此时可得到(5.1) 式惯性流形的存在性.

我们这里设法改进上述结果，考虑(5.1) 的一个适当简化形式：

$$\partial_t u = \chi u + \gamma u_{xx} - (\beta_r + i\beta_i)|u|^2 u - (\delta_r + i\delta_i)|u|^4 u - (\lambda_r + i\lambda_i)(|u|^2 u)_x, \qquad x \in R^1, t > 0, \tag{5.2}$$

其中 $\gamma > 0, \delta_r > 0$.

设 $A = -(\mu + \gamma\partial_{xx})$，对 $\gamma > 0$ 和适当的 μ，则周期边界条件的特征值问题，$-(\mu + \gamma\partial_{xx})g = \lambda g$ 没有零特征值，所以 A 是一个线性自伴无界正算子，故可定义 A 的幂次 $A^\alpha, \alpha \in [0,1], V_{2\alpha} = D(A^\alpha)$($A^\alpha$ 的定义域)，记 $V_1 = D(A^{\frac{1}{2}}) = H^1_{\text{per}}[0,L]$，$V_2 = D(A) = H^2_{\text{per}}[0,L]$，$V_1, V_2$ 的范数分别记为 $|\cdot|_1, |\cdot|_2$.

由于(5.2) 式是(5.1) 式的特殊形式，故 $\gamma, \delta_r > 0$，当 $4\delta_r\gamma > \lambda_i^2$ 成立时，(5.2) 周期初值问题的整体解在 V_1 中存在惟一，且在 V_1 中存在有限维的整体吸引子 $\mathscr{A}_{\text{GGL}}$，进而有

命题 5.1 如 $u \in \mathscr{A}_{\text{GGL}}$，则存在常数 $\rho_0, \rho_1, \rho_2 > 0$，有 $|u_0| \leqslant \frac{\rho_0}{2}, |u|_1 \leqslant \frac{\rho_1}{2}, |u|_2 \leqslant \frac{\rho_2}{2}$，即有 $\mathscr{A}_{\text{GGL}} \subset H^2_{\text{per}}[0,L]$.

证 由 §4 已知，如 $u \in \mathscr{A}_{\text{GGL}}$，则 $|u_0| \leqslant \frac{\rho_0}{2}, |u|_1 \leqslant \frac{\rho_1}{2}$. 下面只要证 $|u|_2 \leqslant \frac{\rho_2}{2}$. 由 §4 可知，当 $t > 0$ 时，$u(t)$ 是足够光滑的，则(5.2) 式与 u_{xxxx} 作内积取实部得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{dt}|u_{xx}|_0^2 + \gamma|u_{xxx}|_0^2 \\
&= \chi|u_{xx}|_0^2 - \mathrm{Re}\left((\beta_r + i\beta_i)\int_0^L |u|^2 u\,\bar{u}_{xxxx}\mathrm{d}x\right) \\
&\quad - \mathrm{Re}\left((\delta_r + i\delta_i)\int_0^L |u|^4 u\,\bar{u}_{xxxx}\mathrm{d}x\right) \\
&\quad - \mathrm{Re}\left((\lambda_r + i\lambda_i)\int_0^L (|u|^2 u)_x\,\bar{u}_{xxxx}\mathrm{d}x\right).
\end{aligned} \tag{5.3}$$

由于存在 $T > 0$，当 $t \geqslant T$ 时，有

$$|u_0| \leqslant \rho_0, \ |u|_1 \leqslant \rho_1.$$

在下面估计中，我们用到了嵌入 $|u|_{L^\infty} \leqslant c|u|_1$ 和 Gagliardo-Nirenberg 不等式，估计式中出现的常数 C 表示仅依赖于方程(5.2)的系数及 ρ_0, ρ_1 的正常数. 对 $t \geqslant T$ 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_{xx}|_0^2 + \gamma|u_{xxx}|_0^2 \leqslant \chi|u_{xx}|_0^2 \\ + \sqrt{\beta_r^2+\beta_i^2}\left|\int_0^L (|u|^2u)_x \bar{u}_{xxx}\mathrm{d}x\right| \\ + \sqrt{\delta_1^2+\delta_i^2}\left|\int_0^L (|u|^4u)_x \bar{u}_{xxx}\mathrm{d}x\right| \\ + \sqrt{\lambda_r^2+\lambda_i^2}\left|\int_0^L (|u|^2u)_{xx} \bar{u}_{xxx}\mathrm{d}x\right|.\end{aligned} \tag{5.4}$$

显然，我们只需处理最后一项即可：

$$\begin{aligned}\left|\int_0^L (|u|^2u)_{xx}\bar{u}_{xxx}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{\gamma}{4}|u_{xxx}|_0^2 + \frac{1}{\gamma}\int_0^L (6|u|^2|u_x|^2 \\ + 3(|u|^2|u_{xx}|)\mathrm{d}x \leqslant \frac{\gamma}{4}|u_{xxx}|_0^2 \\ + C(\rho_0,\rho_1)\int_0^L |u_x|^4\mathrm{d}x + C(\rho_0,\rho_1)|u_{xx}|_0^2.\end{aligned}$$

对 $\int_0^L |u_x|^4\mathrm{d}x$ 可利用 G-N 不等式估计，于是(5.4)变为

$$\frac{\mathrm{d}}{d\mathrm{t}}|u_{xx}|_0^2 \leqslant C + C|u_{xx}|_0^2.$$

由此可得 $\int_t^{t+1}|u_{xx}(\cdot,\tau)|_0^2\mathrm{d}\tau \leqslant C(\rho_0,\rho_1)$，对 $t \geqslant T$，利用一致 Gronwall 不等式得到

$$|u_{xx}|_0^2 \leqslant \rho^2, t \geqslant T,$$

其中 ρ 仅与方程中的系数 ρ_0, ρ_1 有关，所以

$$|u|_2 \leqslant \frac{\rho_2}{2}, \quad u \in \mathscr{A}_{\mathrm{GGL}}.$$

命题 5.1 得证.

为了保持变换后的方程组的耗散性，需要适当改变方程(5.2)为

$$u_t = \gamma u_{xx} - (\lambda_r + i\lambda_i)(|u|^2u)_x - \varphi_\rho \cdot g(u)$$

$$-(1-\varphi_\rho)\left(\delta_r+9\gamma+9\frac{\lambda_\gamma^2+\lambda_i^2}{\gamma}\right)|u|^4u, \quad (5.5)$$

这里

$$g(u)=(\beta_r+i\beta_i)|u|^2u+(\delta_r+i\delta_i)|u|^4u-\chi u,$$

$$\varphi_\rho=\varphi\left(\frac{|u|_0^2+2|u_x|_0^2+|u|_{L^6}^6}{\rho^2}\right),\ 0<\rho\leqslant\infty,$$

其中 $\varphi(s):R^+\to[0,1]$ 为光滑单调函数,使得 $\varphi(s)=1,0\leqslant s\leqslant 1,\varphi(s)=0,s\geqslant 2,|\varphi'(s)|\leqslant 2$. 如果 $\rho=\infty$,则 $\varphi_\rho=1$. (5.5)式就是(5.2)式. 给定初值 $u_0\in V_1$,有

命题 5.2 给定初值 $u_0\in V_1$,设 $\gamma,\delta_r>0,4\delta_r\gamma>\lambda_i^2$,则(5.5)式存在惟一解 $u\in C([0,\infty);V_1)\cap L^2(0,T;V_2)\cap C([0,\infty);H_{\mathrm{per}}^n)$($n\geqslant 2$ 任意). 进一步还有,存在常数 $\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2$(与 u_0 和 ρ 无关)有

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}|u|_0\leqslant r_0,\ \overline{\lim_{t\to+\infty}}|u|_1\leqslant r_1,\ \overline{\lim_{t\to+\infty}}|u|_2\leqslant r_2.$$

由此可见,方程(5.5)存在整体吸引子 $\mathscr{A}_\rho$,且当 $\rho^2\geqslant 4r^2=4(r_0^2+2r_1^2+r_3^2)$(这里 r_3 是 $|u|_{L^6}^3$ 的界)时,

$$\mathscr{A}_\rho=\mathscr{A}_{\mathrm{GGL}}.$$

命题 5.2 的证明类似于 §4 中吸收集的存在性的证明,从略.

由命题 5.2 引进下列函数变换

$$J(u)=(u,u_x,|u|^2u)=(u,v,w),$$

则 u,v,w 满足如下方程组

$$\begin{aligned}
u_t&=\gamma u_{xx}-(\lambda_r+i\lambda_i)w_x+\eta_1,\\
v_t&=\gamma v_{xx}-(\lambda_r+i\lambda_i)w_{xx}+\eta_2,\\
\omega_t&=\gamma w_{xx}+\eta_3,
\end{aligned}\quad (5.6)$$

这里

$$\eta_1=-\varphi_\rho g(u)-(1-\varphi_\rho)\left(9\gamma+\delta_r+9\frac{\lambda_r^2+\lambda_i^2}{\gamma}\right)|u|^4u,$$

$$\eta_2=-\varphi_\rho k(u,v)-(1-\varphi_\rho)\left(9\gamma+\delta_r+9\frac{\lambda_r^2+\lambda_i^2}{\gamma}\right)(3|u|^4v+2|u|^2u^2\overline{v}),$$

$$k(u,v) = (\beta_r + i\beta_i)(2|u|^2 v + u^2\overline{v}) + (\delta_r + i\delta_i)(3|u|^4 v + 2|u|^2 u^2\overline{v}),$$

$$\eta_3 = -(4\gamma|v|^2 u^2 + 2\gamma v^2\overline{u}) + 2|u|^2\eta_1 + u^2\overline{\eta}_1 - 2(\lambda_r + i\lambda_i)(2|u|^4 v + |u|^2 u^2\overline{v}) - (\lambda_r - i\lambda_i)(2|u|^2 u^2\overline{v} + |u|^4 v).$$

对方程组(5.6)加上一些附加项如下(也是为了保持耗散性):

$$\begin{cases} u_t = \gamma u_{xx} - (\lambda_r + i\lambda_i)w_x + \eta_1 + \xi_1, \\ v_t = \gamma v_{xx} - (\lambda_r + i\lambda_i)w_{xx} + \eta_2 - k_1(v - u_x) + \xi_2, \\ w_t = \gamma w_{xx} - (4\gamma|v|^2 u + 2\gamma v^2\overline{u}) + 2|u|^2(\eta_1 + \xi_1) \\ + u^2(\overline{\eta}_1 + \overline{\xi}_1), - (k_2 - 16(\lambda_r^2 + \lambda_i)\left(1 + \frac{1}{\gamma}|u|^4\right)(w - f(u)), \end{cases} \tag{5.7}$$

这里 $f(u) = |u|^2 u$;k_1,k_2 为待定常数;ξ_1,ξ_2 取为

$\xi_1 = -2\gamma|u|^2(w - f(u)) + \gamma u^2\overline{(w - f(u))}$,

$\xi_2 = 2\gamma\,\overline{u}v(w - f(u)) + 2\gamma uw\,\overline{(w - f(u))} + 2\gamma u\,\overline{v}(w - f(u))$.

注意到如果 $v = u_x, w = f(u)$,则附加项消失,设 $J(u) = (u, u_x, f(u)), u \in V_1$,这些附加项将导致(5.7)式的解指数收敛于 $J(u)$.

至此,我们已经看到,如果 $u(t)$ 是(5.5)式具初值 $u_0 \in V_1$ 的解,则 $J(u(t))$ 是(5.7)的解,由(5.7)式解的惟一性,反过来结论也对.(5.7)式的解的存在惟一性将在下面给出,因此,方程(5.5)的解和方程(5.7)式的解在集合 $J(V_1)$ 上具有相同的动力学,有

命题 5.3 设 $u(t)$ 是(5.5)式具初值 $U_0 \in V_1$ 的解,则 $J(u(t))$ 是(5.7)式的解.反之,如果 (u,v,w) 是(5.7)式具初值 $J(u_0), u_0 \in V_1$ 的解,则 $u(t)$ 是(5.5)式的解.

下面研究方程组(5.7)解的存在、惟一性.

设 $U = (u,v,w)^t$,定义 $D(A)\times D(A)\times D(A)$ 上算子 $\mathscr{A}$ 为

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} Au + (\lambda_r + i\lambda_i) w_x \\ Av + ku_x + (\lambda_r + i\lambda_i) w_{xx} \\ Aw \end{pmatrix}.$$

A 如前所定义,同样定义 $\widetilde{F} = (F_1, F_2, F_3)^t$,这里 $F_1 = \eta_1 + \xi_1 + \mu u$,$F_2 = \eta_2 + \xi - k_1 v + \mu v$,$F_3$ 为(5.7)式第三个方程的右端加 μw,则(5.7)式可写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U = -\mathcal{A} U + \widetilde{F}(U). \tag{5.8}$$

算子 $\mathcal{A}$ 显然不是自伴的,但可以证明 $\mathcal{A}$ 是一扇形算子,即 $-\mathcal{A}$ 在 $\mathbb{H} = H \times H \times H$ 上生成一解析半群.

引理 5.4 算子 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{H}$ 上的一扇形算子.

证 首先注意到 A 是 H 上的扇形算子,所以存在 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 和 $M \geqslant 1$,使得

$$\rho(A) \supset \Sigma = \{\lambda : \theta < |\arg \lambda| \leqslant \pi, \lambda \neq 0\},$$

$$\| (\lambda - A)^{-1} \|_{0p} \leqslant \frac{M}{|\lambda|}, \quad \lambda \in \Sigma. \tag{5.9}$$

定义

$$(\mathcal{A} - \lambda) U = \overline{F},$$

这里 $\lambda \in \Sigma$,$\overline{F} = (f_1, f_2, f_2)^t \in \mathbb{H}$,则关于 w 的方程可写为

$$Aw - \lambda w = f_3. \tag{5.10}$$

由(5.9)式有

$$|w|_0 \leqslant \frac{M}{|\lambda|} |f_3|_0. \tag{5.11}$$

(5.10)式与 w 作内积取实部,并利用(5.11)式得

$$\begin{aligned} |A^{\frac{1}{2}} w|_0^2 &\leqslant |\lambda| |w|_0^2 + |f_3|_0 |w|_0 \\ &\leqslant \frac{M^2 + M}{|\lambda|} |f_3|_0^2. \end{aligned} \tag{5.12}$$

由(5.10)式,有

$$|w_{xx}|_0 \leqslant (|\lambda| + |\mu|) |w|_0 + |f_3|_0. \tag{5.13}$$

关于 u 的方程为

$$Au + (\lambda_r + i\lambda_i) w_x - \lambda u = f_1.$$

由(5.9),(5.12)式可得

$$\begin{aligned}
| u |_0 &\leqslant \frac{M}{|\lambda|}\left(| f_1 |_0 + \sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} \, | w_x |_0\right) \\
&\leqslant \frac{M}{|\lambda|}\left(| f_1 |_0 + \left(\frac{M^2 + M}{\| A \|}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} \, | f_3 |_0\right) \\
&\leqslant \frac{M_1}{|\lambda|}(| f_1 |_0 + | f_3 |_0), \text{对某 } M_1 \geqslant 1. \qquad (5.14)
\end{aligned}$$

上面用到了 $| u_x |_0 \leqslant | A^{\frac{1}{2}} u |_0, u \in D(A^{\frac{1}{2}})$. 同样有

$$\begin{aligned}
& | A^{\frac{1}{2}} u |_0^2 \leqslant | \lambda | | u |_0^2 + \sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} \, | w_x |_0 | u |_0 + | f_1 |_0 | u |_0 \\
& \leqslant (| \lambda | + 1) | u |_0^2 + \frac{1}{2}(\lambda_r + \lambda_i^2) | w_x |_0^2 + \frac{1}{2} | f_1 |_0^2. \qquad (5.15)
\end{aligned}$$

最后考虑关于 v 的方程. 由(5.9)式得

$$| v_0 | \leqslant \frac{M}{|\lambda|}\left(k_1 | u_x |_0 + \sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} \, | w_{xx} |_0 + | f_2 |_0\right).$$

由(5.12),(5.13)和(5.15)式,得

$$| v |_0 \leqslant \frac{M_2}{|\lambda|}(| f_1 |_0 + | f_2 |_0 + | f_3 |_0), \text{对某 } M_2 \geqslant 1. \qquad (5.16)$$

由(5.11),(5.14)和(5.16)式,得到对 $\lambda \in \Sigma, (\mathbb{A} - \lambda I)^{-1}$ 存在且有 $\| (-\lambda I + \mathbb{A})^{-1} \|_{0p} \leqslant \frac{M_3}{|\lambda|}$, 对某 $M_3 \geqslant 1$. 这就证明了 $\mathbb{A}$ 是 $\mathbb{H}$ 上的一个扇形算子,由此可知 $-\mathbb{A}$ 在 $\mathbb{H}$ 上生成一解析半群. 由于 $-\mathbb{A}$ 是一扇形算子, 可以定义 $\mathbb{A}$ 的分数次幂, 且容易看出 $\tilde{F}: D(\mathbb{A}^{\frac{1}{2}}) = V_1 \times V_1 \times V_1 \to \mathbb{H}$ 是局部 Lip 连续. 因此,如果 $U(0) = U_0 \in D(\mathbb{A}^{\frac{1}{2}})$, 则(5.7)式存在惟一强解,使得 $U(x,t) \in C([0,T); D(\mathbb{A}^{\frac{1}{2}})), 0 < T \leqslant \infty$.

下面我们证明方程组(5.7)具有整体吸引子 $\mathscr{A}$. 事实上, $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{A}_\rho$ 在嵌入 J 之下的像,即

$$J(\mathscr{A}_\rho) = \mathscr{A}.$$

如果 U 是(5.7)式的充分光滑解,则 u 的方程为

$$u_t = \gamma u_{xx} - (\lambda_r + i\lambda_i) w_x + \eta_1 + \xi_1, \tag{5.17}$$

则(5.17)式关于 x 求导得

$$(u_x)_t = \gamma u_{xxx} - (\lambda_r + i\lambda_i) w_{xx} + \eta_{1x} + \xi_{1x},$$

则从(5.17)式中的 v 的方程减去上述方程得

$$(v - u_x)_t = \gamma (v - u_{xx})_x + \eta_2 - \eta_{1x} + \xi_2 - \xi_{1x} - k(v - u_x). \tag{5.18}$$

设 $\tilde{w} = f(|u|^2)u$,容易验证 $\tilde{w}$ 满足

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{w} = {} & \gamma \tilde{w}_{xx} - (4\gamma |u_x|^2 u + 2\gamma u_x^2 \bar{u}) \\ & + 2|u|^2(\eta_1 + \xi_1) + u^2(\bar{\eta}_1 + \bar{\xi}_1) \\ & - 2|u|^2(\lambda_r + i\lambda_i) w_x - u^2(\lambda_r - i\lambda_i)\overline{w}_x, \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} (w - \tilde{w})_t = {} & \gamma (w - \tilde{w})_{xx} - 4\gamma u(|v|^2 - |u_x|^2) - 2\gamma \bar{u}(v^2 - u^2) \\ & - 2(\lambda_r + i\lambda_i)|u|^2(2|u|^2 v + u^2 v - w_x) \\ & - (\lambda_r - i\lambda_i) u^2 (2|u|^2 \bar{v} + \bar{u}^2 v - \overline{w}_x) \\ & - \left(k_2 - 16(\lambda_r^2 + \lambda_i^2)\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)|u|^4\right)(w - \tilde{w}). \end{aligned} \tag{5.19}$$

首先估计 $|u|_0^2 + |u_x|_0^2 + |v - u_x|_0^2 + |w - \tilde{w}|_0^2$ 的一致上界,然后通过 Minkowsky 不等式,得到 $|U|_{\mathbb{E}}$ 的一致有界,即需要证明下面命题.

命题 5.5 设 $k_1 > 0, k_2 > \gamma + \dfrac{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}{2\alpha}, \gamma > 2\sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}$($\alpha$ 是一常数),U 为(5.7)具初值 $U_0 \in D(A^{\frac{1}{2}})$的解,则存在 $\rho_4 \geqslant \sqrt{2}\rho$ 时,有

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} |U|_{\mathbb{E}}^2 \leqslant \rho_4^2.$$

证 设 $U = (u, v, w)^t$ 为(5.7)式的光滑解,则(5.17)式和 u 作内积取实部,得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u|_0^2 = -\gamma |u_x|_0^2 - \mathrm{Re}\left((\lambda_r + i\lambda_i)\int_0^L w_x \bar{u} \mathrm{d}x\right)$$

$$+\operatorname{Re}(\eta_1+\xi_1,u)$$

因

$$-\operatorname{Re}\left((\lambda_r+i\lambda_i)\int_0^L w_x\bar{u}\,\mathrm{d}x\right)=\operatorname{Re}\left((\lambda_r+i\lambda_i)\int_0^L w\,\bar{u}_x\mathrm{d}x\right)$$

$$=\operatorname{Re}\left((\lambda_r+i\lambda_i)\int_0^L(w-f(u))\,\bar{u}_x\mathrm{d}x\right)$$

$$+\operatorname{Re}\left((\lambda_r+i\lambda_i)\int_0^L f(u)\,\bar{u}_x\mathrm{d}x\right)$$

$$=\operatorname{Re}\left((\lambda_r+i\lambda_i)(w-\overline{w},u_x)\right)-\lambda_i\operatorname{Im}\int_0^L|u|^2u\,\bar{u}_x\mathrm{d}x,$$

$$\operatorname{Re}(\eta_1+\xi_1,u)=-\operatorname{Re}\left(\varphi_\rho\int_0^L((\beta_r+i\beta_i)|u|^4+(\delta_r+i\delta_i)|u|^6-\chi|u|^2)\mathrm{d}x\right)-\operatorname{Re}\left((1-\varphi_\rho)\left(\delta_r+9\gamma+9\frac{\lambda_r^2+\lambda_i^2}{\gamma}\right)\int_0^L|u|^6\mathrm{d}x\right)$$

$$+\operatorname{Re}(\xi_1,u)\leqslant\delta_r\int_0^L|u|^6\mathrm{d}x+|\beta_r|\int_0^L|u|^4\mathrm{d}x$$

$$+|\chi|\int_0^L|u|^2\mathrm{d}x-\operatorname{Re}\left((1-\varphi_\rho)9\gamma\int_0^L|u|^6\mathrm{d}x\right)+\operatorname{Re}(\xi_1,u),$$

根据 ξ_1 的选取,有

$$\operatorname{Re}(\xi,u)\leqslant 3\gamma\int_0^L|u|^3|w-\overline{w}|\,\mathrm{d}x.$$

因此

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u|_0^2\leqslant-\gamma|u_x|_0^2-\operatorname{Re}((\lambda_r+i\lambda_i)(w-\tilde{w},u_x))+|\lambda_i|\cdot\int_0^L|u|^3|u_x|\,\mathrm{d}x-\delta_r\int_0^L|u|^6\mathrm{d}x+|\beta_r|\int_0^L|u|^4\mathrm{d}x+|\chi|\int_0^L|u|^2\mathrm{d}x-(1-\varphi_\rho)\int_0^L|u|^6\mathrm{d}x+3\gamma\int_0^L|u|^3|w-\tilde{w}|\,\mathrm{d}x,$$

$$3\gamma\int_0^L|u|^3|w-\tilde{w}|\,\mathrm{d}x\leqslant 9\gamma\int_0^L|u|^6\mathrm{d}x+\frac{\gamma}{4}|w-\tilde{w}|_0^2.$$

假设 $4\delta_r\gamma>\lambda_i^2$,可选择

$$2\alpha=2\gamma-b^2,\beta=2\delta_r-a^2,|a\cdot b|=|\lambda_i|,$$

可得估计

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_0|^2 \leqslant -2\alpha|u_x|_0^2 - |u|_0^2 + p + 18\varphi_\rho\gamma\int_0^L |u|^6\mathrm{d}x$$
$$+\frac{\gamma}{2}|w-\bar{w}|_0^2 - 2R((\lambda_r + i\lambda_i)(w-\overline{w}, u_x))$$
$$\leqslant -\alpha|u_x|_0^2 - |u|_0^2 + p + 18\varphi_\rho\gamma\int_0^L |u|^6\mathrm{d}x$$
$$+\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\lambda_r + \lambda_i^2}{\alpha}\right)|w-\bar{w}|_0^2, \qquad (5.20)$$

这里 $p = \frac{1}{8}\left(\frac{|\beta_r|+1)^2}{\beta} + 2|\chi|+1\right)^2$.

(5.17) 与 u_{xx} 作内积取实部,得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_x|_0^2 = -\gamma|u_{xx}|_0^2 + \mathrm{Re}\left((\lambda_r + i\lambda_i)\int_0^L w_x\bar{u}_{xx}\mathrm{d}x\right)$$
$$-\mathrm{Re}(\eta_1 + \xi_1, u_{xx}),$$

因

$$\mathrm{Re}\left((\lambda_r + i\lambda_i)\int_0^L w_x\bar{u}_{xx}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Re}\left((\lambda_r + i\lambda_i)\int_0^L (w-\bar{w})_x\bar{u}_{xx}\mathrm{d}x\right)$$
$$+\mathrm{Re}\left((\lambda_r + i\lambda_i)\int_0^L (|u|^2u)_x\bar{u}_{xx}\mathrm{d}x\right)$$
$$\leqslant \frac{\gamma}{2}|u_{xx}|_0^2 + \frac{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}{\gamma}|(w-\overline{w})_x|_0^2$$
$$+\frac{9}{\gamma}(\lambda_r^2 + \lambda_i^2)\int_0^L |u|^4|u_x|^2\mathrm{d}x, \mathrm{Re}(\eta_1 + \xi_1, u_{xx})$$
$$= -\varphi_\rho\mathrm{Re}(g(u), u_{xx}) - (1-\varphi_\rho)\left(9\gamma + \delta_r + 9\frac{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}{\gamma}\right)$$
$$\cdot\mathrm{Re}(|u|^4u, u_{xx}) + \mathrm{Re}(\xi_1, u_{xx}),$$

$$\mathrm{Re}(|u|^4u, u_{xx}) = 3\int_0^L |u|^4|u_x|^2\mathrm{d}x + 2\int_0^L |u|^2u^2\bar{u}_x\mathrm{d}x$$
$$\geqslant \int_0^L |u|^4|u_x|^2\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{Re}(\xi_1, u_{xx}) \leqslant 3\gamma\int_0^L |u|^2|w-\bar{w}|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant 9\gamma\int_0^L |u|^4|w-\bar{w}|^2\mathrm{d}x + \frac{\gamma}{4}|u_{xx}|_0^2.$$

综合上面的计算得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_x|_0^2 \leqslant -\frac{\gamma}{2}|u_{xx}|_0^2 + \varphi_\rho\frac{18}{\gamma}(\lambda_r + \lambda_i^2)\int_0^L |u|^4|u_x|^2\mathrm{d}x$$

$$-2\varphi_\rho \mathrm{Re}(g(u), u_{xx}) + \frac{2(\lambda_r^2 + \lambda_i^2)}{\gamma}|(w - \tilde{w})_x|_0^2$$

$$+ 9\gamma\int_0^L |u|^4|w - \tilde{w}|^2\mathrm{d}x. \tag{5.21}$$

(5.18) 式与 $v - u_x$ 作内积取实部得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|v - u_x|_0^2 = -\gamma|(v - u_x)_x|_0^2 + \mathrm{Re}(\eta_2 - \eta_{1x}, v - u_x)$$

$$+ \mathrm{Re}(\xi_2 - \xi_{1x}, v - u_x) - k_1|v - u_x|_0^2.$$

令

$$g_1(u) = (\beta_r + i\beta_i)(2|u|^2u_x + u^2\overline{u}_x)$$

$$+ (\delta_\gamma + i\delta_i)(3|u|^4u_x + 2|u|^2u^2\overline{u}_x) - \chi u_x,$$

则

$$\mathrm{Re}(\eta_2 - \eta_{1x}, v - u_x) = \varphi_\rho \mathrm{Re}((g_1(u) - k(u, v), (v - u_x))$$

$$-(1 - \varphi_\rho)\cdot\left(9\gamma + \delta_r + 9\frac{\lambda_r + \lambda_i^2}{\gamma}\right)\mathrm{Re}\int_0^L(3|u|^4|v - u_x|^2$$

$$+|2u|^2(\overline{v} - \overline{u}_x)^2\mathrm{d}x \leqslant \varphi_\rho \mathrm{Re}((g_1(u) - k(u, v), v - u_x))$$

$$-(1 - \varphi_\rho)\left(9\gamma + \delta_r + 9\frac{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}{\gamma}\right)\cdot\int_0^L |u|^4|v - u_x|^2\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{Re}(\xi_2 - \xi_{1x}, v - u_x) = \gamma\mathrm{Re}\left[\int_0^L(2\overline{u}(v + u_x)(w - \tilde{w})(\overline{v} - \overline{u}_x)\right.$$

$$+ 2u(\overline{v} + \overline{u}_x)(\overline{w - \tilde{w}})(\overline{v} - \overline{u}_x) + 2u(\overline{v} + \overline{u}_x)(w - \tilde{w})(\overline{v}$$

$$\left.-\overline{u}_x)\mathrm{d}x\right] + \gamma\mathrm{Re}\left[\int_0^L(2|u|^2(w - \tilde{w})_x + u^2(\overline{w - \tilde{w}})_x(\overline{v} - \overline{u}_x)\mathrm{d}x\right],$$

$$\mathrm{Re}(2\overline{u}(v + u_x)(w - \tilde{w})(\overline{v} - \overline{u}_x) + 2u(v + u_x)$$

$$\cdot(\overline{w - \tilde{w}})(\overline{v} - \overline{u}_x)) = 4\mathrm{Re}(\mathrm{Re}(\overline{u}(w - \tilde{w}))(|v|^2 - |u_x|^2$$

$$- v\overline{u}_x + \overline{v}u_x)) = 4\mathrm{Re}(\overline{u}(w - \overline{w}))\cdot(|v|^2 - |u_x|^2),$$

所以

$$\mathrm{Re}(\xi_2 - \xi_{1x}, v - u_x) \leqslant 4\gamma\mathrm{Re}\int_0^L(\overline{u}(w - \tilde{w}))(|v|^2$$

$$-|u_x|^2)\mathrm{d}x+2\gamma\mathrm{Re}\int_0^L u(w-\tilde{w})(\overline{v}-\overline{u}_x^2)\mathrm{d}x$$

$$+3\gamma\int_0^L|u|^2|(w-\tilde{w})_x||v-u_x|\mathrm{d}x\leqslant I+\frac{\gamma}{2}|(w$$

$$-\overline{w})_x|_0^2+\frac{9}{2}\gamma\int_0^L|u|^4|v-u_x|^2\mathrm{d}x,$$

这里

$$I=4\gamma\mathrm{Re}\int_0^L(\overline{u}(w-\tilde{w}))(|v|^2-|u_x|^2)\mathrm{d}x$$

$$+2\gamma\mathrm{Re}\int_0^L u\cdot(w-\tilde{w})(\overline{v}^2-\overline{u}_x^2)\mathrm{d}x.$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|v-u_x|_0^2\leqslant-2\gamma|(v-u_x)|_1^2-2k_1|v-u_x|_0^2+2I$$

$$+\gamma|(w-\tilde{w})_x|_0^2+\varphi_\rho\Big(9\gamma\int_0^L|u|^4|v-u_x|^2\mathrm{d}x$$

$$-(k(u,v)-g_1(u),v-u_x)\Big),\tag{5.22}$$

(5.19)式与 $w-\tilde{w}$ 作内积取实部,得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|w-\tilde{w}|_0^2=-\gamma|(w-\tilde{w})_x|_0^2-k_2|(w-\tilde{w})|_0^2$$

$$-\mathrm{Re}\Big(\int_0^L(4\gamma u\cdot(|v|^2-|u_x|^2)-2\gamma\overline{u}(v^2-u_x^2)\,\overline{(w-\tilde{w})}\mathrm{d}x\Big)$$

$$-\mathrm{Re}\Big(\int_0^L 2|u|^2\cdot(\lambda_r+i\lambda_i)(2|u|^2v+u^2v-w_x)\,\overline{(w-\tilde{w})}\mathrm{d}x\Big)$$

$$-\mathrm{Re}\Big(\int_0^L u^2(\lambda_r-i\lambda_i)(2|u|^2\overline{v}+\overline{u}^2v-\overline{w}_x)\overline{(w-\tilde{w})}\mathrm{d}x\Big)$$

$$-\Big(9\gamma+16(\lambda_r^2+\lambda_i^2)\Big(1+\frac{1}{\gamma}\Big)\Big)\int_0^L|u|^4|w-\tilde{w}|^2\mathrm{d}x.$$

对 $2|u|^2v+u^2\overline{v}-w_x$ 和 $2u^2\overline{v}+\overline{u}^2v-\overline{w}_x$ 的处理是分别插入 $\tilde{w}_x$ 和 $\overline{\tilde{w}}_x$ $(\tilde{w}=f(u)=|u|^2u)$,具体步骤从略,则

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|w-\tilde{w}|_0^2\leqslant-\gamma|(w-w)_x|_0^2-k_2|(w-\tilde{w})|_0^2-I$$

$$+12\sqrt{\lambda_r^2+\lambda_i^2}\int_0^L |u|^2 |v-u_x||w-\tilde{w}|\,\mathrm{d}x$$

$$+4\sqrt{\lambda_r^2+\lambda_i^2}\int_0^L |u|^2 |w-\tilde{w}|\,|(w-\tilde{w})_x|\,\mathrm{d}x$$

$$-\left(q\gamma+16(\lambda_r^2+\lambda_i^2)\left(1+\frac{1}{r}\right)\right)\int_0^L |u|^4|w-\tilde{w}|^2\mathrm{d}x$$

$$\leqslant -\frac{3}{4}\gamma|(w-\tilde{w})_x|_0^2-k_2|w-\tilde{w}|_0^2-I$$

$$+9\int_0^L |u|^4|v-u_x|^2\mathrm{d}x-9\gamma\int_0^L |u|^4|w-\tilde{w}|^2\mathrm{d}x. \tag{5.23}$$

将(5.20)—(5.23)四式相加,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|u|_0^2+|u|_0^2+|v-u_x|_0^2+|w-\tilde{w}|_0^2)\leqslant -|u|_0^2+p$$

$$-\alpha|u_x|_0^2+\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{\lambda_r^2+\lambda_i^2}{\alpha}-2k_2\right)|w-\tilde{w}|_0^2$$

$$+18\varphi_\rho\gamma\int_0^L|u|^6\mathrm{d}x-\frac{\gamma}{2}|u_{xx}|_0^2+18\varphi_\rho\cdot\frac{\lambda_r^2+\lambda_i^2}{\gamma}\int_0^L|u|^4|u_x|^2\mathrm{d}x$$

$$-2\varphi_\rho\mathrm{Re}(g(u),u_{xx})+18\gamma\varphi_\rho\int_0^L|u|^4|v-u_x|^2\mathrm{d}x$$

$$+\left(\frac{\lambda_r^2+\lambda_i^2}{\gamma}-\frac{\gamma}{2}\right)|(w-\tilde{w})_x|_0^2-2\gamma|(v-u_x)_x|_0^2. \tag{5.24}$$

对于给定的 $\rho>0$,不失一般性,假设 $|u|_0^2+|u_x|_0^2+|v|_0^2+|w|_0^2\geqslant 2\rho^2$,则命题 5.5 得证.此时 $\varphi_\rho=0$,这里

$$\varphi_\rho=\varphi\left(\frac{|u|_0^2+|u_x|_0^2+|v|_0^2+|w|_0^2}{\rho^2}\right).$$

所以当 $k_1>0,k_2>\gamma+\dfrac{\lambda_r^2+\lambda_i^2}{2\alpha},\gamma>2\sqrt{\lambda_r^2+\lambda_i^2}$ 时,由(5.24)式有 $|u|_0^2+|u_x|_0^2+|v-u_x|_0^2+|w-\tilde{w}|_0$ 指数衰减,且一致有界.又 $|u|_0^2+|u_x|_0^2+|v|_0^2+|w|_0^2\leqslant|u|_0^2+2|u_x|_0^2+|v-u_x|_0^2+|w-\tilde{w}|_0^2+|\tilde{w}|_0^2$, $|\tilde{w}|=\int_0^L|u|^6\mathrm{d}x$,利用 Sobolev 嵌入定理,

$\int_0^L |u|^6 dx \leqslant C(|u_x|_0^2 + |u|_0^2)^3$. 故存在 $\rho_4 \geqslant 2\rho$ 有

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\{|u|_0^2 + |u_x|_0^2 + |v|_0^2 + |w|_0^2\} \leqslant \rho_4^2.$$

命题 5.5 得证.

作为命题 5.5 的推论，得到(5.7) 式的解以指数收敛到集合 $J(V_1)$.

推论 5.6 在命题 5.5 的假设下，如果 $U(t)$ 是(5.7) 式的解，则存在 $T_1, K_1 > 0$，使得 $t \geqslant T_1$ 时有

$$\frac{d}{dt}(|v - u_x|_0^2 + |w - \tilde{w}|_0^2)$$
$$\leqslant (K_1 - 2\gamma)|v - u_x|_0^2 - k_2|w - \tilde{w}|_0^2.$$

证 将(5.22) 和(5.23) 相加，得

$$\frac{d}{dt}(|v - u_x|_0^2 + |w - \tilde{w}|_0^2) \leqslant -2\gamma|(v - u_x)_x|_0^2$$
$$-2k_1|v - u_x|_0^2 - \frac{3}{2}\gamma|(w - \tilde{w})_x|_0^2 - 2k_2|w - \tilde{w}|_0^2$$
$$+ 18\gamma\varphi_\rho\int_0^L |u|^4|v - u_x|^2 dx.$$

由于

$$\int_0^L |u|^4|v - u_x|^2 dx \leqslant |u|_{L^\infty}^4 |v - u_x|_0^2,$$

由命题 5.5 和 $H_{\text{per}}^1(I) \hookrightarrow L^\infty(I)$，知存在 $T_1 > 0$，使得

$$|u|_{L^\infty} \leqslant C_1, \quad t \geqslant T_1,$$

因此取 $K_1 = 18rc_1^4$，推论得证.

下面证明(5.7) 式的解在 $D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}})$ 一致有界且在 $D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}})$ 中存在整体吸引子.

命题5.7 当 $k_1 > \frac{K_1}{2}, k_2 > \gamma + \frac{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}{2}, \gamma > \sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}$ 时，(5.7) 式的解在 $D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}})$ 中一致有界，并且在 $D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}})$ 中存在整体吸引子 $\mathcal{A}$.

证 用 u, v, w 分别与(5.7) 式的 3 个方程作内积并取实部，

然后利用 Hölder 不等式及命题 5.5 得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u|_0^2 \leqslant -\gamma|u_x|_0^2 + \sqrt{\lambda_r^2+\lambda_i^2}\cdot|w_x|_0|u|_0 + C_1,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|v|_0^2 \leqslant -\gamma|v_x|_0^2 + \sqrt{\lambda_r^2+\lambda_i^2}\cdot|w_x|_0|v|_0 + C_2,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|w|_0^2 \leqslant -\gamma|w_x|_0^2 + C_3(|v|_{L^4}^2 + 1),$$

这里 $C_i(i=1,2,3)$ 仅依赖于方程中的系数和命题5.5的一致界.
由 Sobolev 嵌入定理和 Young 不等式有

$$\begin{aligned}|v|_{L^4}^2 &\leqslant C|v|_0|v|_1 \leqslant C(|v|_0^2 + |v|_0|v_x|_0) \\ &\leqslant C_4(1+|v_x|_0),\end{aligned} \tag{5.25}$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|u|_0^2+|v|_0^2+|w|_0^2) &\leqslant -\Big(\gamma|u_x|_0^2 \\ &\quad + \frac{\gamma}{4}|v_x|_0^2 + \left(\gamma - \frac{\lambda_r^2+\lambda_i^2}{\gamma}\right)|w_x|_0^2\Big) + C_5.\end{aligned} \tag{5.26}$$

方程组(5.7) 的 3 个方程分别与 $-u_{xx}$, $-v_{xx}$, $-w_{xx}$ 作内积并取实部,然后利用 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_x|_0^2 &\leqslant -\gamma|u_{xx}|_0^2 + \sqrt{\lambda_r^2+\lambda_i^2}|w_x|_0|u_{xx}|_0^2 \\ &\quad + C_6|u_{xx}|_0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|v_x|_0^2 &\leqslant -\gamma|v_{xx}|_0^2 + \sqrt{\lambda_r^2+\lambda_i^2}|w_x|_0|w_{xx}|_0 \\ &\quad + C_7|v_{xx}|_0,\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|w_x|_0^2 \leqslant -\gamma|w_{xx}|_0^2 + C_8(|v|_{L^4}+1)|w_{xx}|_0$$

利用 Young 不等式和(5.25) 式得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|u_x|_0^2+|v_x|_0^2+|w_x|_0^2) \\ &\quad\leqslant -\frac{1}{2}\left(\gamma - \frac{\lambda_r^2+\lambda_i^2}{\gamma}\right)|w_{xx}|_0^2 + \frac{\lambda_r^2+\lambda_i^2}{2\gamma}|w_x|_0^2 \\ &\qquad + C_9|v_x|_0^2 + C_{10}.\end{aligned} \tag{5.27}$$

由(5.26)，(5.27)式及假设 $\gamma > 2\sqrt{\lambda_r^2+\lambda_i^2}$ 以及一致 Gronwall 不等式可以得到 U 在 $D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}})$ 中一致有界，由于算子 $\mathcal{A}$ 是扇形算子，它生成的半群当 $t>0$ 时在 $D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}})$ 中是聚点，可得到整体吸引子的存在性.

利用推论 5.6，可以证明如下引理.

引理 5.8 设 $k_1 > \dfrac{K_1}{2}, k_2 > \gamma + \dfrac{\lambda_r^2+\lambda_i^2}{2\gamma}, \gamma > 2\sqrt{\lambda_r^2+\lambda_i^2}$，则 $\mathscr{A}$ 包含在集合 $J(V_1)$ 中.

证 首先注意到存在常数 ρ_5 使得

$$|v-u_x|_0^2+|w-f(u)|_0^2 \leqslant \rho_5^2, \forall (u,v,w)\in\mathscr{A}.$$

现设 $U(U_0,t)=(u(t),v(t),w(t))'$ 为(5.7)式具初值 $U_0\in\mathscr{A}$ 的解，由推论 5.6 得到

$$\begin{aligned}|v-u_x|_0^2+|w(t)-\tilde{w}(t)|_0^2 &\leqslant e^{-\bar{\mu}t}(|v(T_1)-u_x(T_1)|_0^2 \\ &\quad +|w(T_1)-\tilde{w}(T_1)|_0^2) \leqslant \rho_5^2 e^{-\bar{\mu}t}(\text{根据 }\mathscr{A}\text{ 的不变性}).\end{aligned} \tag{5.28}$$

对 $t\geqslant T_1$，这里 $\bar{\mu}=\min(2k_1-K,2k_2)$，进而，由 A 的不变性，对任意 $U^*\in\mathscr{A}$ 和 $t\geqslant T_1$，则存在 U_0，使得 $U(U_0,t)=U^*$. 因此由(5.28)得

$$\text{dist}(U^*,J(V_1))\leqslant \rho_5^2 e^{-\bar{\mu}t}, t\geqslant T_1,$$

$$\text{dist}(\mathscr{A},J(V_1))=\sup_{U\in\mathscr{A}}\text{dist}(U,J(V_1))\leqslant\rho_5^2 e^{-\bar{\mu}t}, t\geqslant T_1,$$

$$\text{dist}(\mathscr{A},J(V_1))=0.$$

下面只要证明 $J(V_1)$ 在 $\mathscr{H}$ 中是闭的就可以推出 $\mathscr{A}\subset J(V_1)$. 事实上，如果 $(u_n,(u_n)_x,f(u_n))\in\mathscr{H}$ 收敛到 $(u,v,w)\in\mathscr{H}$，则 v 是 u 的弱导数，$v\in\mathscr{H}$. 现

$$|H|_0\leqslant|v-(u_n)_x|_0+|(u_n)_x|_0<\infty,$$

$$|w-f(u)|_0\leqslant|u-f(u_n)|_0+|f(u_n)-f(u)|_0,$$

$$\begin{aligned}|f(u_n)-f(u)|_0 &\leqslant \left(\int_0^L(|u_n|^6-|u|^6)^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant (|u|_{L^\infty}^2+|u_n|_{L^\infty}^2|u_{L^\infty}+|u_n|_{L^\infty}^2)\end{aligned}$$

$$\cdot (|u_n|^3_{L^\infty} + |u|^3_{L^\infty}) |u_n - u_0|_0,$$

因 $|u_n|_{L^\infty}$ 是一致有界的,所以 $|u|_{L^\infty}$ 也是一致有界的,故 $w = f(u)$. 引理得证.

于是可得

定理 5.9 设 $k_1 > \frac{K_1}{2}, k_2 > \gamma + \frac{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}{2\alpha}, \gamma > 2\sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}$, 则有 $\mathscr{A} = J(\mathscr{A}_\rho)$.

证 显然 $J(\mathscr{A}_\rho) \subset \mathscr{A}$, 又 $\mathscr{A}$ 是 $J(V_1)$ 中的有界不变集,但由于 $\mathscr{A}_\rho$ 是(5.5)式整体吸引子,则 $J(\mathscr{A}_\rho)$ 是 $J(V_1)$ 中的极大不变集,因此 $\mathscr{A} \subset J(\mathscr{A}_\rho)$, 所以

$$\mathscr{A} = J(\mathscr{A}_\rho).$$

根据前面的讨论,我们知道方程组(5.7)保持(5.2)式的长时间动力学行为,特别地,由命题5.5和命题5.7知存在常数 $\rho_6 > 0$, 使得

$$|\mathbb{A}^{\frac{1}{2}} U|_0 \leqslant \rho_6, \forall U \in \mathscr{A}.$$

为了证明方程组(5.7)的惯性流形的存在性,对非线性项 $\widetilde{F}$ 进行截断,即考虑

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + \mathbb{A} U = F(U), \tag{5.29}$$

这里 $F(U) = \varphi\left(\frac{|A^{\frac{1}{2}} U|_0^2}{\rho_6}\right) \widetilde{F}(U)$, 可见(5.29)式与(5.7)式在整体吸引子 $\mathscr{A}$ 上具有相同的长时间行为.

命题 5.10 在以上假定下,方程组(5.29)存在惯性流形. $\mu = \mathrm{graph}\Phi$, 这里 $\Phi : P\mathbb{H} \to Q\mathbb{H} \cap D(\mathbb{A}^{\frac{1}{2}})$ 是 Lip 映射; P 关于 $\mathbb{A}$ 的前 $N+1$ 个特征向量在 $\mathbb{H}$ 中的投影; $Q = I - P$.

因为 $\mathbb{A}$ 是如下形式的微分算子

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A & O & (\lambda_r + i\lambda_i)\partial_x \\ -k_i\partial_x & A & -(\lambda_r + i\lambda_i)\partial_{xx} \\ O & O & A \end{pmatrix}.$$

类似于引理5.4的讨论, $\mathbb{A}$ 具有离散谱,由经典的泛函分析理论可

知P ，Q 在 作用下是不变的，因为 不是自伴算子，可用[2]的结果来 证此命题，此时 的谱为$\left\{\left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2\right\}_{n\geqslant 1}$，故所需的谱裂口条件满足.

推论 5.11 (5.2) 解半群本质上的长时间动力学可由如下常微分方程所描述：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}PU = - \ PU + PF(PU + \Phi(PU)), \qquad (5.30)$$

由惯性流形的指数吸引性，有

推论 5.12 如 $U(t)$ 为(5.2) 式的解，则存在常微分方程(5.30) 的解 $PU(t)$，且满足

$$| u(t) - (P_1(t) + \Phi_1(PU)) | \leqslant ce^{-\alpha t}, t > 0, c, \alpha > 0,$$

这里 $PU(t) = (P_1(t), P_2(t), P_3(t)), \Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$.

§6 广义 Ginzburg-Landau 方程的指数吸引子

考虑广义 Ginzburg - Landau 方程

$$\begin{aligned} u_t + \nu u_x = & \chi u + (\gamma_r + i\gamma_i) u_{xx} - (\beta_r + i\beta_i) | u |^2 u \\ & - (\delta_r + i\delta_i) | u |^4 u - (\lambda_r + i\lambda_i) | u |^2 u_x \\ & - (\mu_r + i\mu_i) u^2 \bar{u}_x, \end{aligned} \qquad (6.1)$$

其中 γ_r, δ_r 为正常数，$\nu, \chi, \gamma_i, \beta_r, \beta_i, \delta_i, \lambda_r, \lambda_i, \mu_r, \mu_i$ 均为实数，(6.1) 满足周期边界条件

$$u(x,t) = u(x+L,t), x \in R^1, t \geqslant 0, L > 0 \qquad (6.2)$$

和初始条件

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in R^1. \qquad (6.3)$$

我们前面曾证明问题(6.1)—(6.3) 当满足条件

$$\gamma_r > 0,\ \delta_r > 0,\ 4\delta_r\gamma_r > (\lambda_i - \mu_i)^2 \qquad (*)$$

时，在 $V_1 = H^1_{\mathrm{per}}[0, L]$ 上存在惟一整体解和有限维整体吸引子的存在性.

为证明惯性流形的存在性，一般要求满足谱裂口条件，由于方

程(6.1)中出现非线性导数项,要求 L 充分小或 γ_r 充分大,在 §5 中我们得问题(6.1)—(6.3) 惯性形式的存在性,其中 $\gamma_i = 0$, $\lambda_r = 2\mu_r, \lambda_i = 2\mu_i$,(*) 条件为 $\gamma_r > 2\sqrt{\mu_r^2 + \mu_i^2}$,这一节我们要证明(6.1)—(6.3) 指数吸引子的存在性,指数吸引子的概念见[7].它是介于整体吸引子与惯性流形之间的要求,比惯性流形的要求要低一些.

设 $\mathscr{H}$ 为可分 Hilbert 空间,B 为 $\mathscr{H}$ 中的紧子集,$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 为非线性连续半群保持 B 为不变集,$\mathscr{A} = \bigcap\limits_{t>0} S(t)B$,$\mathscr{A}$ 为整体吸引子.

定义 6.1 集合 $\mathscr{M}$ 称为$(\{S(t)\}_{t\geqslant 0}, B)$ 指数吸引子,如果 (ⅰ) $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{M} \subseteq B$;(ⅱ) $S(t)\mathscr{M} \subseteq \mathscr{M}, \forall t \geqslant 0$;(ⅲ) $\forall u_0 \in B, \mathrm{dist}_{\mathscr{H}}(S(t)u_0, \mathscr{M}) \leqslant c_1 e^{-c_2 t}, \forall t \geqslant 0$, c_1 和 c_2 为与 u_0 无关的正常数; (ⅳ) $\mathscr{M}$ 具有有限分形维数.

定义 6.2 连续半群$\{S(t)\}_{t>0}$ 称在 B 上满足挤压性质,如果存在 $t_* > 0$ 使得 $S_* = S(t_*)$ 满足:存在阶数 N_0 的正交投影 P 使得对一切 $u, v \in B$,如果 $|P(S_* u - S_* v)|_{\mathscr{H}} \leqslant |(I-P)(S_* u - S_* v)|_{\mathscr{H}}$,则有

$$|S_* u - S_* v|_{\mathscr{H}} \leqslant \frac{1}{8} |u - v|_{\mathscr{H}}.$$

定理 6.3 如果$(\{S(t)\}_{t>0}, B)$ 在 B 上满足挤压性质且 $S_* = S(t_*)$ 在 B 上 Lip 连续.具有 Lip 常数 $\bar{L}$,则存在$(\{S(t)\}_{t>0}, B)$ 的指数吸引子 $\mathscr{M}$,使得

$$d_F(\mathscr{M}) \leqslant N_0 \max\{1, \frac{\ln(16\bar{L}+1)}{\ln 2}\},$$

$$\mathrm{dist}_{\mathscr{H}}(S(t)u_0, \mathscr{M}) \leqslant c_1 \exp\{-\frac{c_2}{t_*} t\},$$

其中 c_1, c_2 为与 u_0, t 无关的常数.

现证明问题(6.1)—(6.3) 指数吸引子的存在性.

取 $\mathscr{H} = V_1 = H^1_{\mathrm{per}}[0, L]$,选取 B_0 如下,先令

$$B_0 = \{u \in H^1_{\mathrm{per}}[0, L], |u|_0 \leqslant 2\rho_0, |u|_1 \leqslant 2\rho_1\}.$$

如前所知，常数 ρ_0,ρ_1 依赖于(6.1)的系数，由嵌入定理知 $|u|_{L^\infty} \leqslant \rho_1$，而且已知存在 $T_1>0$，当 $t\geqslant T_1$ 时，$|u(t)|_2\leqslant 2\rho_2$，且 $B = \bigcup_{t\geqslant T_2} S(t)B_0$ 在 V_1 中是紧的，且是 $S(t)$ 的不变集，设 $\{\lambda_n\}_{n\in N}$ 为 $-\partial_{xx}$ 是周期边界条件的特征值，$\{w_n\}_{n\in N}$ 为对应于 $\{\lambda_n\}_{n\in N}$ 的特征函数. 令

$$H_N = \mathrm{Span}\{w_1,\cdots,w_N\},$$

P_N 为在 H_N 上的正交投影，$Q_N = I - P_N$. 易知

$$|u|_0^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_{N+1}}|u|_1^2, \forall u \in Q_N V_1. \tag{6.4}$$

作(6.1)—(6.3)两解之差，且设 $\chi = v = 0$，u、v 为具分别初值为 u_0,v_0(6.1)—(6.3)的解，且

$u,v \in C([0,\infty);V_1) \cap C^1((0,\infty);V_1) \cap C((0,\infty);H^4_{\mathrm{per}}[0,L])$,

令 $w = u - v$，则 w 满足

$$\begin{aligned} w_t = {} & (\gamma_r + i\gamma_i)w_{xx} - (\beta_r + i\beta_i)(2|v|^2 w + u^2\bar{w} + uw\bar{v}) \\ & - (\delta_r + i\delta_i)(|u|^4 w + 2|u|^2u^2\bar{w} + |v|^2u^2\bar{w} \\ & + |u|^2uw\bar{v} + |v|^2uw\bar{v}) - (\lambda_r + i\lambda_i)(|v|^2w_x + u\bar{v}v_x \\ & + \bar{w}uu_x) - (\mu_r + i\mu_i)(v^2\bar{w}_x + (u+v)\cdot\bar{u}_x w), \end{aligned} \tag{6.5}$$

$$w(x,t) = w(x+L,t), x\in R^1, t\geqslant 0, \tag{6.6}$$

$$w(x,0) = w_0(x), x\in R^1. \tag{6.7}$$

(6.5)和 w 作内积取实部

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|w|_0^2 + \gamma_r|w_x|_0^2 = {} & -\beta_r\int_0^2 |u|^2|w|^2\mathrm{d}x - \mathrm{Re}((\beta_r + i\beta_i) \\ & \cdot\int_0^L (u^2\bar{w}^2 + |v|^2u\bar{v})\mathrm{d}x) - \delta_r\int_0^L |v|^4|w|\,\mathrm{d}x) \\ & - \mathrm{Re}((\delta_r + i\delta_i)\int_0^L (|u|^2u^2\bar{w}^2 + |v|^2u^2\bar{w}^2 \\ & + |u|^2v\bar{v}|w|^2 + |v|^2u\bar{v}|w|^2)\mathrm{d}x) \\ & - \mathrm{Re}((\lambda_r + i\lambda_i)\int_0^L (|v|^2\bar{w}w_x + uu_x\bar{w}^2 + \bar{v}u_x|w|^2)\mathrm{d}x) \end{aligned}$$

$$- \operatorname{Re}((\mu_r + i\mu_i)\int_0^L (v^2 \overline{w}_x w + u_x(u+v) | w |^2)\mathrm{d}x).$$

对 $u, v \in B$ 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} | w |_0^2 + \gamma_r | w |_0^2 \leqslant | \beta_r | \rho^2 | w |_0^2 + 2\sqrt{\beta_r^2 + \beta_i^2}\rho^2 | w |_0^2$$

$$+ 4\sqrt{\delta_r^2 + \delta_i^2}\rho^4 | w |_0^2 + (\sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} + \sqrt{\mu_r^2 + \mu_i^2})$$

$$\cdot \left(\int_0^L | w_x | | w | \mathrm{d}x + 2\rho\rho_3 | w |_0^2\right),$$

由此可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} | w |_0^2 + \gamma_r | w_x |_0^2 \leqslant M | w |_0^2, \qquad (6.8)$$

其中

$$M = | \beta_r | \rho^2 + 2\rho^2\sqrt{\beta_r^2 + \beta_i^2} + 4\rho^4\sqrt{\delta_r^2 + \delta_i^2} + 2\rho\rho_3(\sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}$$

$$+ \sqrt{\mu_r^2 + \mu_i^2}) + \frac{\rho_4}{\gamma_r}(\lambda_r^2 + \lambda_i^2 + \mu_r^2 + \mu_i^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} | w |_0^2$$

$$\leqslant M_0 | w |_0^2.$$

(6.5) 和 $- w_{xx}$ 作内积取实部,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} | w_x |_0^2 \leqslant M_1(| w_x |_0^2 + | w |_0^2),$$

因此$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(| w |_0^2 + | w_x |_0^2) \leqslant (M_0 + M_1)(| w |_0^2 + | w_x |_0^2)$,

$$| w |_{V_1}^2 = | w |_1^2 \leqslant \exp[(M_0 + M_1)t] | w(0) |_1^2. \qquad (6.9)$$

以 Q_N 作用于(6.5),并注意 Q_N 和 $-\partial_{xx}$ 可交换,令 $\varphi = Q_N w$ 得

$$\varphi_t - (\gamma_r + i\gamma_i)\varphi_{xx} = Q_N(F(u) - F(v)). \qquad (6.10)$$

(6.10) 和 φ 作内积取实部,可得类似估计

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} | \varphi |_0^2 + \gamma_r | \varphi |_1^2 \leqslant (M_0 + \gamma_r) | \varphi |_0^2 \leqslant \frac{M_0 + \gamma_r}{\lambda_{N+1}} | w |_1^2,$$

因

$$| \varphi_x |_0^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_{N+1}} | \varphi_x |_1^2,$$

故有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\varphi_x|_0^2+\gamma_r|\varphi_x|_1^2\leqslant(M_1+\gamma_r)|\varphi_x|_0^2+M|\varphi|_0^2.$$

因 $N\to\infty,\lambda_{N+1}\to\infty$,故能选取 N_0 使得当 $N\geqslant\bar{N}_0$,

$$\gamma_r\lambda_{N+1}\geqslant M_1+\gamma_r,$$

因此

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\varphi_x|_0^2\leqslant M_1|\varphi|_0^2\leqslant\dfrac{M_1}{\lambda_{N+1}}|w|_1^2,\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\varphi|_1^2+\gamma_r|\varphi|_1^2\leqslant\dfrac{1}{\lambda_{N+1}}(M_0+M_1+\gamma_r)|w|_1^2.\end{cases}\tag{6.11}$$

给定 t_* 和 N_0,使得 $|P_{N_0}w(t_*)|_1\leqslant|Q_{N_0}w(t_*)|_1$,则有

$$|w(t_*)|_1\leqslant\frac{1}{8}|w(0)|_1.$$

定理得证.

由(6.9)和(6.11),得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\varphi|_1^2+\gamma_r|\varphi|_1^2\leqslant\frac{1}{\lambda_{N+1}}(M_0+M+\gamma_r)|w|_1^2$$
$$\leqslant\frac{1}{\lambda_{N+1}}(M_0+M+\gamma_r)\exp[(M_0+M_1)t]|w(0)|_1^2,$$

积分上不等式得

$$|\varphi|_1^2\leqslant\exp[(-\gamma_r t)|\varphi(0)|_1^2+\frac{1}{\lambda_{N+1}}(\exp[(M_0+M_1)t]$$
$$-\exp[-\gamma_r t])|w(0)|_1^2\leqslant\exp[-\gamma_r t]|\varphi(0)|_1^2$$
$$+\frac{1}{\lambda_{N+1}}\exp[(M_0+M_1)t]\cdot|w(0)|_1^2,$$

即有

$$|Q_N w(t)|_1^2\leqslant\exp[-\gamma_r t]|w(0)|_1^2+\frac{1}{\lambda_{N+1}}\exp[(M_0$$
$$+M_1)t]|w(0)|_1^2.\tag{6.12}$$

现选取 t_* 与 N_0,首先选取 t_* 使得 $\exp[-\gamma_r t_*]=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^2$,再选取 N_1 充分大,使得

$$\frac{1}{\lambda_{N_1+1}}\exp[-(M_0+M_1)t_*]\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^2.$$

特别选取

$$|P_{N_1}w(t_*)|_1^2 \leqslant |Q_{N_1}w(t_*)|_1^2,$$

则从(6.12),得

$$|w(t_*)|_2^2 = |P_{N_1}w(t_*)|_1^2 + |Q_{N_1}w(t_*)|_1^2$$

$$\leqslant 2|Q_{N_1}w(t_*)|_1^2 \leqslant \left(\frac{1}{8}\right)^2 |w(0)|_1^2.$$

取 $N_0 = \max(\bar{N}_0, N_1)$, $t_* = \frac{8}{\gamma_r}\ln 2$, $\bar{L} = \frac{\lambda_{N_0+1}}{512}$,则定理6.3条件满足,因此可得

定理 6.4 存在 $t_* = \frac{8}{\gamma_r}\ln 2$, N_0 充分大,使得

$$\lambda_{N_0+1} \geqslant \max\left(512\exp[(M_0 + M_1)t_*, 1 + \frac{M_1}{\gamma_r}\right),$$

则 $S(t)$ 由问题(6.1)—(6.3)所形成的半群满足在 B 上的挤压性质,且 $S_* = S(t_*)$ 在 B 上是 Lip 的,具 Lip 常数 $\bar{L}$,由定理6.3的结果,则存在($\{S(t)\}_{t>0}, B$)的指数吸引子 $\mathscr{M}$ 使得

$$d_F(\mathscr{M}) \leqslant N_0\max\{1, \ln(16\bar{L} + 1)/\ln 2\},$$

和 $\mathrm{dist}_{V_1}(S(t)u_0, \mathscr{M}) \leqslant c_1\exp\left\{\left(-\frac{c_2}{t_*}\right)t\right\}$, $\forall u_0 \in B$, c_1、c_2 与 u_0, t 无关,$d_F(\mathscr{M})$ 表示 $\mathscr{M}$ 的分形维数.

§7 Ginzburg-Landau 方程的惯性流形的构造

考虑如下 GL 方程的周期初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - (1 + i\nu)\Delta u + (1 + i\mu)|u|^2 u - au = 0, & (7.1) \\ u(x+1, t) = u(x, t), & (7.2) \\ u(x, 0) = u_0(x), & (7.3) \end{cases}$$

其中 μ、ν、a 为实数,对于 R 中的有界区域的 Dirichlet 边界问题和 2D 周期边界问题同样处理.空间 H 为 $L^2(0,1)$,在 H 中引入内积

$$(u,v) = \mathrm{Re}\int_0^1 u(x)\overline{v(x)}\mathrm{d}x, \tag{7.4}$$

其中 $\overline{v}$ 表示复数共轭. 算子 A 为

$$A = -\Delta + 1, \tag{7.5}$$

非线性项

$$R(u) = -i\nu\Delta u + (1 + i\mu)|u|^2 u - (a+1)u. \tag{7.6}$$

于是(7.1)可改写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au + R(u) = 0. \tag{7.7}$$

考虑 $u_0 \in H$, Σ_0 为通过 $u_0 \in H$ 的光滑 N 维曲面. Σ_0 的切平面在 u_0 处是 H 的 N 维线性子空间,考虑正交投影 P_0 从 H 到这个空间. 现考虑在 $S(t)$ 作用下接触元素 (u_0, p_0) 随时间的发展. 令 $p(t)$ 表示正交投影:从切平面到 $S(t)\Sigma_0$,在 $S(t)u_0 = u(t)$ 上,可得到 $p(t)$ 的发展方程

$$\dot{p} + (I-p)\left(A + \frac{\delta R}{\delta u}(u)\right)p + p\left(A + \frac{\delta R}{\delta}(u)\right)^*(I-p) = 0, \tag{7.8}$$

其中 $u = u(t) = S(t)u_0$, T^* 表示 T 在 H 中的共轭.

现考虑正交基 $w_1, w_2, \cdots$,对应于 A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$.

定义 7.1 设 P 为有限维区域包括 $D(A)$ 的正交投影,定义数 $\Lambda(P)$, $\lambda(P)$ 为

$$\Lambda(P) = \max\{(Ag,g) \mid Pg = g, |g| = 1\}, \tag{7.9}$$

$$\lambda(P) = \min\{(Ag,g) \mid Pg = 0, g \in D(A), |g| = 1\}. \tag{7.10}$$

从最大最小定理有

$$\Lambda(P) \geqslant \lambda_N, \tag{7.11}$$

$$\lambda(P) \leqslant \lambda_{N+1}, \tag{7.12}$$

其中 $\dim PH = N$.

现考虑接触元素 (u,p) $(u = u(t) = S(t)u_0$, $p(t) = p$ 满足(7.8),随时间的发展,相应的有 $\Lambda(t) = \Lambda(p(t))$, $\lambda(t) = \lambda(p(t))$,在[8]中已证.

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Lambda(t)) \leqslant -\inf_{\substack{|g|=1 \\ p(t)g=g \\ \Lambda(t)=(Ag,g)}} \left\{ |(A-\Lambda(t))g|^2 + \left(\frac{\delta R}{\delta u}(u(t))g,\right.\right.$$
$$\left.\left.(A-\Lambda(t))g\right)\right\}, \tag{7.13}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\lambda(t)) \geqslant \inf_{\substack{|g|=1 \\ p(t)g=0 \\ (Ag,g)=\lambda(t) \\ g\in D(A^{\frac{1}{2}})}} \left\{ |(A-\lambda(t))g|^2 + \left(\frac{\delta R}{\delta u}u(t)g,\right.\right.$$
$$\left.\left.(A-\lambda(t))g\right)\right\}, \tag{7.14}$$

在(7.13)中,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Lambda(t)) = \limsup_{\substack{s\to t \\ s<t}} \frac{\Lambda(s)-\Lambda(t)}{s-t},$$

在(7.14)中,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\lambda(t)) \geqslant \liminf_{\substack{s\to t \\ s<t}} \frac{\lambda(s)-\lambda(t)}{s-t}.$$

定义 7.2 一个实数 β 称为在吸收集 Y 中为方程(7.1)的谱障碍,如存在一个常数 $\delta>0$,依赖于 β 和 Y 使得

$$|(A-\beta)g|^2 + \left(\frac{\delta R}{\delta u}(u)g,(A-\beta)g\right) \geqslant \delta > 0 \tag{7.15}$$

对一切 $u\in D(A)\cap Y$ 和一切 $g\in D(A)$,满足 $(Ag,g)=\beta$, $|g|=1$,则 $Y=\{u\in H^1_{\mathrm{per}} \mid \|u\|_{H^1}\leqslant\rho_1\}$.

我们首先注意到谱障碍不能是 A 的特征值. 注意到,如 Y 是凸的,从(7.15)和

$$R(u_2)-R(u_1) = \int_0^1 \frac{\delta R}{\delta u}(u_1+s(u_2-u_1))(u_2-u_1)\mathrm{d}s,$$

如 β 为谱障碍,则

$$|(A-\beta)(u_2-u_1)|^2 + (R(u_2)-R(u_1),(A-\beta)(u_2-u_1))$$
$$\geqslant \delta|u_2-u_1|^2, \tag{7.16}$$

$\forall u_1,u_2\in D(A)\cap Y$ 满足

$$(A(u_2-u_1),u_2-u_1) = \beta|u_2-u_1|^2.$$

不等式(7.16)曾作为谱障碍的定义,如 Y 是凸的,则两者是等价

的.

如 β 为(7.1) 在 Y 中的谱障碍,则 β 从上框住 $\Lambda(t)$,从下框住 $\lambda(t)$.

定理 7.3(谱块) 设 $u(t) = S(t)u_0$ 为在 Y 中的轨线,设 β 为(7.1) 在 Y 中的谱障碍,则

(a) 如 $\Lambda(t_0) < \beta$,对某个 $t_0 > 0$ 成立, 则

$$\Lambda(t) < \beta, \forall t \geqslant t_0.$$

(b) 如 $\lambda(t_0) > \beta$,对某个 $t_0 > 0$ 成立, 则

$$\lambda(t) > \beta, \forall t \geqslant t_0.$$

由(7.16) 我们证明

定理 7.4 设 $u_1(t) = S(t)u_0^1, u_2(t) = S(t)u_0^2$ 为二条位于凸吸收集 Y 的轨线,设 β 为方程(7.1) 在 Y 中的谱障碍,如

$$(A(u_1(t_0) - u_2(t_0)), u_1(t_0) - u_2(t_0)) \leqslant \beta \mid u_1(t_0) - u_2(t_0) \mid^2,$$

对某 $t_0 > 0$ 成立,则

$$(A(u_1(t) - u_2(t)), u_1(t) - u_2(t)) < \beta \mid u_1(t) - u_2(t) \mid^2,$$

$$\forall t \geqslant t_0.$$

证 令 $g(t) = \dfrac{u_1(t) - u_2(t)}{\mid u_1(t) - u_2(t) \mid}$,

$$N(t) = \frac{(A(u_2(t) - u_1(t)), u_2(t) - u_1(t))}{\mid u_1(t) - u_2(t) \mid^2},$$

基于方程(7.1),则 u 满足

$$\frac{1}{2}\dot{\mu} + \mid (A - \mu)g \mid^2 + \left(\frac{R(u_1) - R(u_2)}{\mid u_1 - u_2 \mid}, (A - \mu)g\right) = 0. \tag{7.17}$$

于是当 $\mu = \beta$,从(7.17) 和(7.16),得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}\Big|_{\mu=\beta} + \delta \leqslant 0.$$

由此可知 μ 在靠近 β 处其导数为负,定理得证.

推论 7.5 设 $u(t) = S(t)u_0$ 为在 Y 中的一条轨线,设 β 为(7.1) 在 Y 中的谱障碍. 令 v 为线性化方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + Av + \dfrac{\delta R}{\delta u}(u(t))v = 0, \\ \dfrac{\delta R}{\delta u}(u)v = -i\nu\Delta v + (1+i\mu)(2|u|^2 v + u^2\overline{v}) - (a+1)v \end{cases} \tag{7.18}$$

沿着 $u(t)$ 的任何解.如

$$(Av(t_0), v(t_0)) < \beta |v(t_0)|^2, \quad 对某\ t_0 > 0\ 成立,$$

则有

$$(Av(t), v(t)) < \beta |v(t)|^2, \forall t \geqslant t_0.$$

条件 7.6((7.1)在 Y 中存在谱障碍) 存在常数 C_Y 依赖于吸收集 Y 和 $\alpha \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$,使得

$$\left(\frac{\delta R}{\delta u}(u)g, (A-\xi)g\right) + C_Y |(A-\xi)g| |A^{\frac{1}{2}}g|^{2\alpha} |g|^{-2\alpha} \geqslant 0, \tag{7.19}$$

$$\forall u \in Y, g \in D(A), \xi \in R.$$

显然(7.19)是成立的,如

$$\left|\frac{\delta R}{\delta u}(u)g\right| \leqslant C_Y |A^\alpha g|, \forall u \in Y, g \in D(A), \tag{7.20}$$

对于 GL 方程,如$\dfrac{\delta R}{\delta u}$为二个算子之和,其一满足(7.20),另一满足

$$\left(\frac{\delta R}{\delta u}(u)g, g\right) = \left(\frac{\delta R}{\delta u}(u)g, Ag\right) = 0, \forall u \in Y, g \in D(A). \tag{7.21}$$

如(7.19)满足,则

$$|(A-\beta)g|^2 + \left(\frac{\delta R}{\delta u}(u)g, (A-\beta)g\right) \geqslant |(A-\beta)g|^2$$

$$- C_Y |(A-\beta)g| \beta^\alpha, \forall g \in D(A), 满足\ |A^{\frac{1}{2}}g|^2 = \beta, |g| = 1.$$

如设 β 满足

$$\operatorname{dist}(\beta, \sigma(A)) \geqslant C_Y \beta^\alpha, \tag{7.22}$$

其中 $\sigma(A)$ 为集 $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots\}$, $Aw_j = \lambda_j w_j$,

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \leqslant \cdots, \lim_{j\to\infty} \lambda_j = \infty,$$

则

$$|(A-\beta)g|^2+\left(\frac{\delta R}{\delta u}(u)g,(A-\beta)g\right)\geqslant\delta>0, \quad (7.23)$$

其中

$$\delta=\operatorname{dist}(\beta,\sigma(A))(\operatorname{dist}(\beta,\sigma(A))-C_Y\beta^{\alpha}), \quad (7.24)$$

$$\forall u\in Y, g\in D(A), |g|=1, |A^{\frac{1}{2}}g|^2=\beta.$$

于是我们证明了:

命题 7.7 设存在常数 C_Y 依赖于凸吸收集 Y 和 $\alpha\in[0,\frac{1}{2}]$ 使得(7.19) 成立, $\forall u\in Y, g\in D(A), \xi\in R$. 设 A 的谱 $\sigma(A)$ 允许有充分大的间隙使得(7.22) 对某 β 满足,则 β 为(7.1) 在 Y 中的一个谱障碍.

现来叙述如何将命题 7.7 应用于 GL 方程. 注意到由方程(7.1) 有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{L^2}^2+\int_0^1|\Delta u|^2\mathrm{d}x+\|u\|_{L^4}^4=a\|u\|_{L^2}^2, \quad (7.25)$$

得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{L^2}^2+\|u\|_{L^4}^4\leqslant a^2, \quad (7.26)$$

作为不等式(7.26) 的直接推论为集合

$$Y_0=\{u\mid \|u\|_{L^2}^2\leqslant 2a\}$$

为吸收的,这个集合对(7.19) 成立不是充分小的. 我们必须证明集合 $Y_\infty=\{u\mid \|u\|_{L^\infty}^2\leqslant\rho_\infty\}$ 是吸收的. ρ_∞ 为依赖于 μ,ν,a 的某常数, ρ_∞ 可被选取为 $O(a^{3/2})$, $|\mu|<\sqrt{3}$; $O(a^2)$, $|\mu|>\sqrt{3}$. 这里 $\frac{\mu}{\nu}>0$ 的情况,此时 ρ_∞ 为 $O(a^{4/3})$. 事实上,考虑 $\frac{1}{2}\int_0^1|\nabla u|^2\mathrm{d}x$ 和 $\frac{\mu}{\nu}\frac{1}{4}\int_0^1|u|^4\mathrm{d}x$ 的发展方程有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1\left(|\nabla u|^2+\frac{\mu}{2\nu}|u|^4\right)\mathrm{d}x+\int_0^1|\Delta u|^2\mathrm{d}x+\frac{\mu}{\nu}\int_0^1|u|^6\mathrm{d}x$$

$$\leqslant a\left[\int_0^1 |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \frac{\mu}{\nu}\int_0^1 |u|^4 \mathrm{d}x\right]. \tag{7.27}$$

因

$$\int_0^1 |\Delta u|^2 \mathrm{d}x \geqslant \frac{\left(\int_0^1 |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)^2}{\int_0^1 |u|^2 \mathrm{d}x}, \int_0^1 |u|^6 \mathrm{d}x \geqslant \frac{\left(\int_0^1 |u|^4 \mathrm{d}x\right)^2}{\int_0^1 |u|^2 \mathrm{d}x},$$

则如 $u \in Y_0$,

$$\int_0^1 |\Delta u|^2 \mathrm{d}x + \frac{\mu}{\nu}\int_0^1 |u|^6 \mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2a}\left(\left(\int_0^1 |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)^2 + \frac{\mu}{\nu}\left(\int_0^1 |u|^4 \mathrm{d}x\right)^2\right).$$

令

$$E = \int_0^1 \left(|\nabla u|^2 + \frac{\mu}{2\nu}|u|^4\right)\mathrm{d}x,$$

则可得不等式

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} + \frac{\gamma}{a}E^2 \leqslant 4aE,$$

其中 $\gamma = \frac{1}{2}\min\left(1, \frac{4\nu}{\mu}\right)$. 这个不等式在 Y_0 是正确的. 因此,在 Y_0 中,E 是减少的,只要 $E > \frac{4a^2}{\gamma}$. 我们证明了:

引理 7.8 设 $\frac{\mu}{\nu} > 0$, 则集合

$$Y_E^\varepsilon = \left\{u \mid \int_0^1 \left[|\nabla u|^2 + \frac{\mu}{2\nu}|u|^4\right]\mathrm{d}x \leqslant \frac{4a^2}{\gamma} + \varepsilon\right\} \tag{*}$$

是 GL 方程的吸收集,其中 $\alpha = \frac{1}{2}\min\left(1, \frac{4\nu}{\mu}\right)$. $\forall \varepsilon > 0$. 特别

$$\int_0^1 |u|^4 \mathrm{d}x \leqslant \frac{8\nu}{\mu\gamma}a^2 + \frac{2\nu}{\mu}\varepsilon. \tag{7.28}$$

取 $\varepsilon = 1$, 则集合 $Y_E^1 \cap Y_0 = \{\|u\|_{L^2}^2 \leqslant 2a, \int_0^1\left(|\nabla u|^2 + \frac{\mu}{2\nu}|u|^4\right)\mathrm{d}x \leqslant \frac{4a^2}{\gamma} + 1\}$ 是吸收的,利用插值和嵌入不等式

$$\| u \|_{L^\infty}^2 \leqslant c \| u \|_{L^2}^{\frac{4}{3}} \| u \|_{H^1}^{\frac{2}{3}}, \tag{7.29}$$

在 $Y_E^1 \cap Y_0$ 上得到

$$\| u \|_{L^\infty}^2 \leqslant c\left(\frac{\delta\nu}{\mu\gamma}a + \frac{2\nu}{\mu}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{4a^2}{\gamma} + 1 + 2a\right)^{\frac{1}{3}}, u \in Y_E^1 \cap Y_0. \tag{7.30}$$

定义

$$\rho_\infty = c\left(\frac{8\nu}{\mu\gamma}a^2 + \frac{2\nu}{\mu}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{4a^2}{\gamma} + 1 + 2a\right)^{\frac{1}{3}}, \tag{7.31}$$

我们得到 $Y_\infty = \{u \mid \| u \|_\infty^2 \leqslant \rho_\infty\}$ 为GL方程(7.1)的吸收集，基于表达式$\frac{\delta R}{\delta u}$(7.18)，可知(7.19)对于

$$Y_\infty = \{u \mid \| u \|_{L^\infty}^2 \leqslant \rho_\infty\} \tag{7.32}$$

是成立的，其中常数 α 和 C_{y_∞} 为

$$C_{y_\infty} = 3(1 + |\mu|)\rho_\infty + a + 1, \tag{7.33}$$

$$\alpha = 0, \tag{7.34}$$

因此我们从条件(7.22)推出

定理 7.9 设 Y_0 给定在(7.32)中，为GL方程(7.1)的一个吸收集，如 β 满足

$$\mathrm{dist}(\beta, \sigma(A)) \geqslant 3(1 + |\mu|)\rho_\infty + a + 1, \tag{7.35}$$

则 β 为GL方程(7.1)在 Y_∞ 中的一个谱障碍.

特别，如 ρ_∞ 为(7.31)所确定，取

$$\beta = \frac{\lambda_N + \lambda_{N+1}}{2}, \tag{7.36}$$

$\lambda_N = (2\pi N)^2 + 1$ 为 A 的第N个特征值，则条件(7.35)是满足的，如果

$$N \geqslant \frac{3}{(2\pi)^2}c(1 + |\mu|)\left(\frac{\delta\nu}{\mu\gamma}a^2 + \frac{2\nu}{\mu}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{4a^2}{\gamma} + 1 + 2a\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{a}{(2\pi)^2}, \tag{7.37}$$

即 $N = O(a^{\frac{4}{3}})$. 在(7.37)中，$\gamma = \frac{1}{2}\min\left(1, \frac{4\mu}{\nu}\right)$，$c$ 为(7.29)中

的插值常数.

现考虑慢锥,慢锥 K_β 定义为

$$K_\beta = \{\omega \in D(A) \mid (Aw, w) \leqslant \beta(w, w)\}. \quad (7.38)$$

由定理 7.4 和推论 7.5 可知这些锥的不变性.

定理7.10 设 Y 为凸吸收集,β 为(7.1)在 Y 中的谱障碍,如果 $w(t)$ 表示(7.1)在 Y 中由二个解之差或线性化方程(7.18)的解(沿着在 Y 中(7.1)的解 $u(t) = S(t)u_0$),则从 $w(t_0) \in K_\beta$ 推出 $w(t) \in K_\beta, t \geqslant t_0$.

定义7.11 设 Σ 为 H 中的有限维光滑曲面,且包含在凸吸收集 Y 中,称 Σ 为 Y 中的谱块(Spectrally block),如存在谱障碍 β,对(7.1)在 Y 中使得

$$\Lambda(u) < \beta < \lambda(u), \quad (7.39)$$

$$\Lambda(u) = \Lambda(P(u)), \lambda(u) = \lambda(P(u)),$$

其中 $P(u)$ 为正交投影从 H 到 Σ 在 u 处的切超平面 $Tu(\Sigma)$.

定理 7.3(谱块)能叙述为

定理7.12 如 Σ 为谱块,则 $S(t)\Sigma$ 也是谱块,对一切 $t > 0$.

谱块的几何解释为

定理7.13 设 Σ 为 Y 中的谱块具谱障碍 β,则

(a) Σ 的切平面 $T_u(\Sigma)$ 被包含在 K_β 中:

$$T_u(\Sigma) \subset K_\beta, \forall u \in \Sigma,$$

(b) Σ 的法向平面 $N_u(\Sigma) = H \ominus T_u(\Sigma)$ 被包含在 $K'_\beta = \{\omega \mid (A\omega, \omega) > \beta(\omega, \omega)\}$ 中:

$$N_u(\Sigma) \subset K'_\beta, \forall u \in \Sigma.$$

称 K_β 为"慢"锥,是因为:如 $w(t)$ 为(7.1)二解之差或者为(7.18)的解,只要 $w(t)$ 不属于 K_β,则 $w(t)$ 指数块衰减.

为了更详细地描述这个命题,我们作关于 $\left(\frac{\delta R}{\delta u}\omega, \omega\right)$ 在吸收集中的进一步假设.

条件7.14 存在常数 $d_Y > 0$ 依赖于凸吸收集 Y 和 $\delta \in [0,1)$ 使得

$$\left(\frac{\delta R}{\delta u}(u)\omega,\omega\right)+\mathrm{d}_Y^{1-\delta}\,|\,w\,|^{2(1-\delta)}\,|\,A^{\frac{1}{2}}w\,|^{2\delta}\geqslant 0 \tag{7.40}$$

对一切 $u\in Y, w\in D(A^{\frac{1}{2}})$ 成立.

定理7.15 设条件7.14成立,且存在(7.1)在 Y 中的谱障碍 β 满足

$$\beta>\mathrm{d}_Y. \tag{7.41}$$

设 $w(t)$ 表示(7.1) 在 Y 中的两解之差,$w(t)=S(t)u_0-S(t)u_1$,或线性化方程(7.18) 的解(沿着 $u(t)=S(t)u_0, u(t)\in Y$),设 $w(t)\notin K_\beta$,则

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\,w(t)\,|^2+\beta^\delta(\beta^{1-\delta}-\mathrm{d}_Y^{1-\delta})\,|\,w(t)\,|^2\leqslant 0. \tag{7.42}$$

证 对于线性化方程(7.18) 的情况由定义推出,对于两个解之差,我们首先由(7.40) 积分可得

$$\begin{aligned}&(R(u_1)-R(u_2),u_1-u_2)\\&+\mathrm{d}_Y^{1-\delta}\,|\,u_1-u_2\,|^{2(1-\delta)}\,|\,A^{\frac{1}{2}}(u_1-u_2)\,|^{2\delta}\geqslant 0,\end{aligned} \tag{7.43}$$

$\forall u_1,u_2\in Y\cap D(A^{\frac{1}{2}})$. 其余的证明作为定义的直接推论得到.

对于GL方程,如 $Y=Y_\infty$ 为(7.32) 所定义,易于验证(7.40) 是成立的,其中

$$\mathrm{d}_{Y_\infty}=3(1+|\,\mu\,|)\rho_\infty+a+1, \tag{7.44}$$

$$\delta=0. \tag{7.45}$$

注意(7.44) 定义的 d_{Y_∞} 和(7.33) 定义的 C_{Y_∞} 是一样的. 因此条件(7.41)$\beta>\mathrm{d}_{Y_\infty}$ 比条件(7.22) 更弱,因此对于GL方程满足(7.22) 的任何 β 定理 7.15 自然成立.

推论7.16 设 Σ 是在吸收集 Y 中的正不变有限维谱块曲面,且谱障碍 β 充分,因此条件(7.41) 成立. $u(t)=S(t)u_0$ 为 Y 中(7.1) 的解. 设 $\mathrm{dist}(S(t)u_0,\Sigma)$ 在 Σ 上达到, 设 $u_1\in\Sigma$, $\mathrm{dist}(S(t)u_0,\Sigma)=|\,u(t)-u_1\,|$,向量 $w=u(t)-u_1$ 正交于 Σ 在 u_1 处. 因为 Σ 为谱块,从定理 7.13(b),$w\in K_\beta'$,因此不属于

K_β,从定理 7.15,如 $w(s) = S(s)u(t) - S(s)u_1$,则

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|w(s)|^2|_{s=0} + \beta^\delta(\beta^{1-\delta} - \mathrm{d}_Y^{1-\delta})|w(s)|^2|_{s=0} < 0.$$

这表明 $\mathrm{dist}(S(t)u_0,\Sigma)$ 指数衰减,只要它达到 Σ 上.

现引入另一种慢锥 $C_{N,\chi}$,由投影到$(w_1,\ldots,w_N)$的投影算子所定义,其中$(w_1,\cdots,w_N)$为 A 的N 个特征函数:

$$C_{N,\chi} = \{\omega \in H \mid |(I - p_N)w|^2 \leqslant \chi^2 |P_N w|^2\}.$$

首先注意到如果

$$\lambda_{N+1} > \beta, \tag{7.46}$$

$$\chi^2 > \frac{\beta}{\lambda_{N+1} - \beta}, \tag{7.47}$$

则

$$K_\beta \subset C_{N,\chi}. \tag{7.48}$$

如(7.46),(7.47)满足,则 $C_{N,\chi}$ 为相同于 K_β 的慢锥,虽然可从(4.78)和定理7.15得到,现再取 χ 充分小,$0 < \chi < \frac{1}{2}$,为了得到类似于定理 7.10 的不变性质,我们作如下假设:

条件 7.17 存在常数 $\varepsilon_Y > 0$ 依赖于 Y 的凸吸收集使得

$$\left(\left(A + \frac{\delta R}{\delta u}(u)\right)(p+q), q - \chi^2 p\right) \geqslant \varepsilon_Y |p|^2, \tag{7.49}$$

$$\forall u \in Y, P = P_N p, q = (1 - P_N)q, |q|^2 = \chi^2 |p|^2.$$

作为(7.49)的推论,我们得到

$$\begin{aligned}(A(u_1 - u_2) + R(u_1) - R(u_2), (1 - P_N)(u_1 - u_2)\\ - \chi^2 P_N(u_1 - u_2)) \geqslant \varepsilon_Y(P_N(u_1 - u_2))^2,\end{aligned} \tag{7.50}$$

$$\forall u_1, u_2 \in Y \cap D(A),$$

$$|(I - P_N)(u_1 - u_2)|^2 = \chi^2 |P_N(u_1 - u_2)|^2.$$

条件(7.49)推出

定理 7.18 设 Y 为满足(7.49)的凸吸收集,$w(t)$表示 Y 中(7.1)两解之差 $S(t)u_1 - S(t)u_2$ 或(7.18)的解($u(t) = S(t)u_0 \in Y$),如 $w(t_0) \in C_{N,\chi}$,则有

$$w(t) \in C_{N,\chi}, \forall t \geqslant t_0.$$

证 考虑 $w(t)$ 为(7.18)的解.令 $p(t) = P_N w(t), q(t) = (I - P_N) w(t)$,则从(7.18),得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|q|^2 - \chi^2 |p|^2) + \left(\left(A + \frac{\delta R}{\delta u}(u(t))(p+q\right), q - \chi^3 p\right) = 0.$$

由(7.49),得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|q|^2 - \chi^2 |p|^2) \leqslant - \varepsilon_Y(|p|^2).$$

显然,如 $|q|^2 - \chi^2 |p|^2 < 0, t = t_0$,则 $|q|^2 - \chi^2 |p|^2 < 0$, $\forall t \geqslant t_0$.类似地证明用(7.50)是有效的对于 $w(t) = S(t)u_1 - S(t)u_2$.

现对GL方程检验条件(7.49),取 $Y = Y_\infty$ 于(7.32)中,可得

$$\left(\left(A + \frac{\delta R}{\delta u}(u)\right)(p+q), q - \chi^2 p\right) \geqslant \lambda_{N+1} |q|^2 - \chi^2 \lambda_N |p|^2$$
$$- C_{Y_\infty}(|q|^2 + \chi^2 |p|^2 + (1+\chi^2)|q||p|),$$

其中 C_{Y_∞} 由(7.50)给定,如 $|q|^2 = \chi^2 |p|^2$,可得

$$\left(\left(A + \frac{\delta R}{\delta u}(u)\right)(p+q), q - \chi^2 p\right)$$
$$\geqslant \chi^2\left(\lambda_{N+1} - \lambda_N - (2 + \chi + \frac{1}{\chi})C_{Y_\infty}\right)|p|^2.$$

如

$$\lambda_{N+1} - \lambda_N > \left(2 + \chi + \frac{1}{x}\right)C_{Y_\infty}, \tag{7.51}$$

则(7.49)满足.

注意条件(7.51)完全类似于(7.37),条件(7.37)为

$$\frac{\lambda_{N+1} - \lambda_N}{2} > C_{Y_\infty}.$$

特别,(7.51)稍强于(7.37).

这就证明了 $K_\beta, C_{N,\chi}$ 对于解的差是不变的.

现考虑集合 $K_X = \bigcap_{x \in X}(x + K)$,对 $S(t)$ 下是不变的.事实上,如 $u \in K_X, t > 0$,为了证明 $S(t)u \in K_X$,我们需要 $S(t)u \in y +$

$K, \forall y \in X$,现对任何 $y \in X$ 能写成 $S(t)x, x \in X$,因 $S(t)X = X$,因 $x \in X, u \in K_X$,我们有 $u - x \in K$. 由于 K 的解的差的不变性,

$$S(t)u - S(t)x \in K, \text{即 } S(t)u \in y + K.$$

现对锥 $C_{N,\chi}$,置

$$C_{X,N,\chi} = \bigcap_{x \in X}(x + C_{N,\chi}). \tag{7.52}$$

定理 7.19 设 Y 为(7.1)的凸吸收集,(7.40)在 Y 中成立,定理 7.15,7.16 在 Y 中成立,N 满足(7.46),(7.47),则

(ⅰ) $S(t)(Y \cap C_{X,N,\chi}) \subset C_{X,N,\chi}$;

(ⅱ) $$\mathrm{dist}(S(t)u_0, X) \leqslant (\max_{x \in X} |u_0 - x|)\exp(-\beta^{\delta}(\beta^{1-\delta} - \mathrm{d}_Y^{\delta})t), \tag{7.53}$$

其中 $\beta, \delta, \mathrm{d}_Y$ 定义在(7.40),(7.41);

(ⅲ) $X \subset C_{X,N,\chi}$.

证 (ⅰ),(ⅱ)由定理 7.15、定理 7.16 推出,N 的选取推出 $C_{N,\chi} \supset K_\beta$.(ⅲ)来自定理 7.15. 的确,对任何 $x, y \in y, x - y \in K_\beta$(即 $X \subset \bigcap_{x \in X}(X + K_\beta) \subset C_{X,N,\chi}$)如不成立,从(7.42)和 $x = S(t)x', y = S(t)y'$, t 为任意,$x', y' \in X$ 推出 $x = y$.

现来构造惯性流形.

现来构造(7.1)的惯性流形为一积分流形,选取初始集 $\Gamma \subset H$,考虑积分流形

$$\Sigma = \bigcup_{t>0} S(t)\Gamma. \tag{7.54}$$

我们的目的在于证明,对于适当选取的 Γ, Σ 在 H 中的闭包 $\bar{\Sigma}$ 为(7.1)的惯性流形.

我们先描述构造的程序,并强调几何意义,再验证条件的一致性和可行性.

集合 Γ 为光滑的 $N-1$ 维嵌入 H 中的流形,包含在吸收集 Y 中,设正整数 N 和吸收集 Y 选取得使定理 7.19 的结论是满足,即 $C_{X,N,\chi}$ 在 Y 中关于 $S(t)$ 是不变的,对某个 $\chi, 0 < \chi < \frac{1}{2}$,是指数

吸引的,故 Γ 包含在P_NH 中.

设 Γ 为开的有界凸集 $\varepsilon \subset P_NH$ 的光滑定向边界,令 $\nu(u)$ 表示 Γ 的在 u 处在P_NH 中的外单位法向, $T_u(T)$ 表示 Γ 的在 u 处的切超平面, $T_u(\Sigma) = N(u)R + T_u(T)(N(u) = Au + R(u)$,表示流形在 u 的相反方向),设 $P(u)$ 为 H 到 N 维线性空间 $T_u(\Sigma)$ 的正交投影,对 Γ 作如下要求:

(Ⅰ)$(N(u),\nu(u)) > 0, \forall u \in \Gamma$;

(Ⅱ)$\Gamma \subset C_{X,N,\chi}, \Gamma \cap X = \varnothing$;

(Ⅲ)$T_u(\Sigma) \subset C_{N,\chi}$;

(Ⅳ) 存在(7.1) 在 Y 中的谱障碍使得 $\Lambda(P(u)) < \beta < \lambda(P(u))$. $\forall u \in \Gamma$,(Ⅰ)是 Cauchy 问题以 Γ 为初值是适定的充分条件,它意味着流 $S(t)$ 在每一点 $u \in \Gamma$ 朝着圆柱 $\varepsilon \times (I - P_N)H$ 的内部,(Ⅱ)是为了保证 $\Sigma \subset C_{X,N,\chi}$,这是容易实现的,例如,如果充分条件

$$\inf_{u \in \Gamma} |u| > \left(1 + \frac{1}{\chi}\right) \sup_{x \in X} |x| \qquad (\text{Ⅱ})'$$

满足,(Ⅰ),(Ⅱ)在对 Γ 的维数 N 增加新的限制,条件(Ⅲ)要求 $T_u(\Sigma)$ 被包含在慢锥 $C_{N,\chi}$ 中,这个锥的不变性的推论对于线性方程(7.18)的解从(Ⅳ)推得, $T_u(\Sigma) \subset C_{N,\chi}, \forall u \in \Sigma$,最后条件(Ⅳ)推出 Σ 为谱块,特别,切超平面 $T_u(\Sigma)$ 被包含在慢锥 K_β 中,正交于 K_β' 的余集,最后的条件是太严厉了,从极小极大定理推出,如(Ⅳ)满足,则

$$\lambda_N < \beta < \lambda_{N+1}$$

是必要的,因此必须在 A 的谱中,在 N 有一点间隙($\lambda_N < \lambda_{N+1}$).

利用不等式

$$0 \leqslant \lambda(u) - \lambda_N \leqslant Tr(P(u)AP(u) - P_NAP_N),$$

$$0 \leqslant \lambda_{N+1} - \lambda_N \leqslant Tr(P(u)AP(u) - P_NAP_N)$$

和等式

$$Tr(P(u)AP(u) - P_NAP_N)$$

$$= \frac{|A^{\frac{1}{2}}(I-P_N)N(u)|^2 - |A^{\frac{1}{2}}\nu(u)|^2 |(I-P_N)N(u)|^2}{|(I-P_N)N(u)|^2 + (N(u),\nu(u))^2},$$

推出(ⅳ)的充分条件和数

$$l_N(T) = \max_{u\in T} \frac{|A^{\frac{1}{2}}(I-P_N)N(u)|^2}{(N(u),\nu(u))^2} \tag{7.55}$$

有关,充分条件是

(Ⅳ′) 区间$(\lambda_N + l_N(T), \lambda_{N+1} - l_N(T))$含有(ⅱ)在 Y 中的谱障碍,对于 Ⅲ 的充分条件为

(Ⅲ′)$l_N(T) \leqslant \chi^2 \lambda_{N+1}$.

事实上,任何元素在 $T_u(\Sigma)$ 中具有形式

$$\nu = \alpha N(u) + w,\ \alpha \in \mathbb{R},\ w \in T_u(T),$$

则

$$\begin{aligned}|(I-P_N)v|^2 &= \alpha^2 |(I-P_N)N(u)|^2 \\ &\leqslant \frac{l_N(T)}{\lambda_{N+1}}\alpha^2 (N(u),v(u))^2,\end{aligned}$$

而

$$|P_N v||^2 \geqslant (P_N v, v(u))^2 = \alpha^2 (N(u),v(u))^2,$$

因此(Ⅲ′)推出$|(I-P_N)v|^2 \leqslant \chi^2 |P_N v|^2$.

条件(Ⅰ)—(Ⅳ)是在 Γ 上的条件,它们是几何的和静态的,即不要求(7.1)的积分.动力系统的几何要求如下

(A) 锥 $C_{N,\chi}$ 和锥集 $C_{X,N,\chi}$ 被要求是不变的和指数吸引的.

(B) 锥 K_β 在(Ⅳ)中被要求是不变的和指数吸引的.

(C) 维数 $\geqslant N-1$ 的无穷小曲面被要求为指数衰减的.

定理 7.20 设 T, Y, N 使得假设(Ⅰ)-(Ⅳ)和(A),(B),(C)成立,则由(7.54)定义的积分流形 Σ 的在 H 中的闭包 $\bar{\Sigma}$ 为(7.1)的惯性流形.

证 考虑映照

$$\sigma:[0,\infty)\times T \to P_N\Sigma \subset P_N H,\ \sigma(t,u_0) = P_N S(t)u_0.$$

这是一个 C^∞ 映照,进一步,它是正则的,它有一对一的Jacobi行列

式. 事实上,如果 σ 的 Jacobi 行列式在(t_0,u_0)不是一对一的,则存在一个向量$(\alpha,v_0)\neq(0,0)$,$(\alpha,v_0)\in R\times Tu_0(\Gamma)$使得 $w=\alpha N(S(t_0)u_0+v(t_0))$ 满足 $P_N w=0$. 这里 $v(t_0)$ 为(7.18)沿着 $S(t)u_0$ 取的值 v_0 的解,因(7.1)是自治的,$-N(u)=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ 解(7.18). 于是 w 为线性化方程(7.18)沿着 $S(t)u_0$ 的解在 $t=t_0$ 的值,具初值 $w_0=\alpha N(u_0)+v_0$. 因 $w_0\subset Tu_0(\Sigma)$,由假设(Ⅲ),$Tu_0(\Sigma)\subset C_{N,\chi}$. 由 $C_{N,\chi}$ 对于(7.18)在 Y 中的不变性,推出 $w\in C_{N,\chi}$ 即 $|(I-P_N)w|\leqslant\chi|Pw|=0$. 因此 $w=0$. 由于(7.18)方程问题的惟一性,推出 $w_0=0$. 这是荒唐的,因为由(Ⅰ)推出 $\alpha=0,v_0=0$.

我们证明 σ 是正则的,在每个$(t,u_0)\in R\times\Gamma$. 特别,它是局部可逆的推出 $P_N\Sigma$ 是开的,映照

$$P\to S(t)u,$$

σ^{-1} 为 σ 之局部逆,

$$(t,u)=\sigma^{-1}(p).$$

注意到 $P_N\times\cap P_N\Sigma=\varnothing$. 事实上,$\Sigma\cap X=\varnothing$,因 $\Gamma\cap X=\varnothing$(条件(Ⅱ)). 但 $\Sigma\subset C_{X,N,\chi}$,因 $\Gamma\subset C_{X,N,\chi}((\mathrm{A}))$,因此 $P_N\cap P_N\Sigma$ 非空推出 $\Sigma\cap X$ 非空,荒谬. 显然,由 $P_N\Sigma$ 的闭包 $\overline{P_N\Sigma}$ 可得到包含关系 $\overline{P_N\Sigma}\subset P_NX\cup P_N\Sigma\cup\Gamma$.

在右端的三个集合是互异的,另一方面

$$\overline{P_N\Sigma}\supset\varepsilon.$$

事实上,从等周不等式和 $S(t)\Gamma$ 的 $N-1$ 体积的指数衰减(CCL)可得. 设 $\overline{P_N\Sigma}$ 删去 $P\in\varepsilon$,则存在在 P_NH 中的小开球 B 使得 $P\in B\subset\varepsilon$,但 $\overline{B}\cap P_N\Sigma=\varnothing$. 这是荒唐的,因为

$$\mathrm{vol}_{N-1}(\partial B)\leqslant\mathrm{vol}_{N-1}(P_NS(t)T)\leqslant\mathrm{vol}_{N-1}S(t)\Gamma,$$

仅在 $\Gamma\times\{0\}$ 上.

映照 $P_N:\Sigma\to P_N\Sigma$ 是一对一的, 事实上, Σ 是连通的,因此 $P_N\Sigma$ 也是连通的,局部常数映照 $P\to\#P_N^{-1}(\{p\})$ 从 $P_N\Sigma$ 到 N 是

常数,取值 1,则我们能定义映照 $\Phi:\overline{P_N\Sigma}\to\Sigma$,

$$\Phi(P)=\begin{cases}p, p\in\Gamma,\\ u, p\in P_NX\cup P_N\Sigma,\end{cases}\tag{7.56}$$

其中 u 为$P_Nu=p$ 的惟一解(的确,如 $p\in P_NX$,因 $X\subset C_{X,N,\chi}$,方程 $P_Nu=p$ 具有惟一解).

映照 Φ 是 Lipschitz 的,实际上有

$$|(I-P_N)(\Phi(p_1)-\Phi(p_2))|\leqslant\chi|p_1-p_2|,\tag{7.57}$$

注意到 Φ 的定义域$\overline{P_N\Sigma}$ 为 $\forall p_1,p_2\in\overline{P_N\Sigma}$. 开连通集 $P_N\Sigma$ 的闭包满足 $\bar{\epsilon}\subset\overline{P_N\epsilon}$,特别,$\Phi$ 定义在整个 $\bar{\epsilon}$ 上.

证(7.57),首先注意到至少 p_1,p_2 之一不属于 Γ(否则不需证明),设 $p_2\notin\Gamma$. 如连接 p_1,p_2 的直线段不与 p_NX 相交,则这个线段为 C^∞ 曲线在 Σ 上的投影.

$p_\tau=(1-\tau)p_1+\tau p_2=P_N(u_\tau),0<\tau\leqslant 1,u_\tau\in\Sigma$,则$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}u_\tau\in Tu(\Sigma)$,推出((Ⅲ) 和 (A)) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_2\in C_{N,\chi}$,即 $|(I-P_N)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}u_2|\leqslant\chi|P_N\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}u_\tau|$,

则(7.57) 从积分得到. 如连接 p_1,p_2 的线段和 P_NX 相交,则(7.57) 直接从 $\Sigma\subset C_{X,N,\chi}$ 推出. 事实上,如 $p=P_Nx,x\in X$ 属于这个线段,则

$$|(1-P_N)(\Phi(P_i)-x)|\leqslant\chi|p_i-p|,\quad i=1,2.$$

由 $|p_1-p|+|p_2-p|=|p_1-p_2|$ 推得(7.57). 因此$\overline{\Sigma}$ 为 Lip 函数 Φ 的图,余下来证明任意轨线 $S(t)u_0$ 指数收敛于$\overline{\Sigma}$. 令 $u(t)=S(t)u_0$ 为任意的,设 $u(t)\subset Y$,因 Y 是吸收的,如 $u(t)\notin C_{X,N,\chi},\forall t>0$,则 $u(t)$ 指数收敛于 X 和终达$\overline{\Sigma}$((A)). 如 $u(t)\in Y\cap C_{X,N,\chi}$,则 $u(t)\in C_{X,N,\chi},t\geqslant t_0$. 此时从 $u(t)$ 到$\overline{\Sigma}$ 的距离在 Σ 上达到,此时用到 $\chi<\frac{1}{2}$. 事实上,考虑 $u=u(t)\in C_{X,N,\chi},p=P_Nu,v=\Phi(p)$. 如 $p\in P_NX,p=P_Nx$,则从

$$(I-P_N)(u-x)|\leqslant\chi|P_N(u-x)|=0$$

推出 $u \in \chi$. 因此只需证明：设 $p \notin \Gamma$，当增加 t（的确，存在 $t_n \to \infty$，使得 $P(S(t_n)u_0) \in \Gamma$，则 $\Gamma \cap P_N X$ 非空），则 $p \in P_N\Sigma$，因此 $\in \Sigma$. 我们断言 $|v-u| < |u-x|, \forall x \in X$. 事实上，因

$$
\begin{aligned}
& P_N v = P_N u = p, v-u = (I-P_N)(v-u), \\
& |v-u| = |(I-P_N)(v-u)| \\
& \qquad \leqslant |(I-P_N)(v-x)| + |(I-P_N)(x-u)| \\
& \qquad \leqslant \chi(|P_N x - p| + |P_N x - p|) = 2\chi |P_N x - p| \\
& \qquad \leqslant |P_N x - p| \leqslant |x-u|.
\end{aligned}
$$

因此从 $u(t)$ 到 $\overline{\Sigma}$ 的距离在 Σ 上达到 $(t \geqslant t_0)$. 因 Σ 是块((B)). 推出 $\mathrm{dist}(u(t), \Sigma)$ 指数衰减，定理证毕.

现我们对于 GL 方程指出 Γ 的构造，验证条件(A),(B),(C)和(Ⅰ)—(Ⅳ).

设 $\mu, \nu \neq 0, \frac{\mu}{\nu} > 0$，置

$$
Y = \{u \mid \|u\|_{L^\infty}^2 \leqslant R_\infty\}. \tag{7.58}
$$

设

$$
R_\infty \geqslant \rho_\infty, \tag{7.59}
$$

导出 Γ 具形式

$$
\Gamma = \{u \mid P_N u = u, E(u) = R\}, \tag{7.60}
$$

其中 N, R 待定，$E(u)$ 为能量泛函

$$
E(u) = \int_0^1 \left(|\nabla u|^2 + \frac{\mu}{2\nu}|u|^4\right) dx.
$$

基于(7.29)，有 $\Gamma \subset Y$. 如果

$$
R_\infty = c\left[\left(\frac{2\nu}{\mu}R\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{2\nu}{\mu}R\right)^{\frac{1}{3}} R^{\frac{1}{3}}\right]. \tag{7.61}
$$

进一步由(*)推出在吸引子上我们有

$$
\sup_{x \in X} E(x) \leqslant \frac{4a^2}{\gamma}. \tag{7.62}
$$

其中 $\gamma = \frac{1}{2}\min\left(1, \frac{4\nu}{\mu}\right)$ 选取 R 充分大满足(7.59).

因 $\rho_\infty = O(a^{\frac{4}{3}})$(大的 a),$R_\infty = O(R^{\frac{2}{3}})$(大的 R).(7.59)满足对 R 为 $O(a^2)$.同时选取 R 使得

$$\sup_{x\in X} E(x) < R. \tag{7.63}$$

基于(7.62),这些要求满足,如果

$$k \geqslant k_1(a^2+1), \tag{7.64}$$

其中 k_1 为常数依赖于 $\frac{\nu}{\mu}$,锥 $C_{N,\chi}$ 和锥集 $C_{X,N,\chi}$ 是不变的和指数吸引的,如(7.15) 成立,即

$$\lambda_{N+1} - \lambda_N > \left(2 + \chi + \frac{1}{\chi}\right)[3(1+|\mu|)R_\infty + a + 1]. \tag{7.65}$$

因 $R_\infty \sim R^{\frac{2}{3}}, R \geqslant k_1 a^2$,(7.65) 等价于要求

$$N \geqslant k_2(R^{\frac{2}{3}} + 1). \tag{7.66}$$

k_2 为一常数依赖于 $\frac{\nu}{\mu}, \chi$.因此条件(A) 是满足的.如果(7.64) 和(7.66) 满足,条件(C) 包含吸引子的维数来自(7.66),以及

$$-\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t Tr\left(A + \frac{\delta R}{\delta u}(u)\right)\cdot Q_N \mathrm{d}s$$

$$= \pi_N \leqslant -2\pi\sum_{j=1}^{N} j^2 + \left(a + \frac{1}{2}\right)N + c(1+|\mu|^2)^{\frac{3}{2}} a^{\frac{3}{2}},$$

$$\mathrm{d}_H \mathscr{A} \leqslant c_1(1+|\mu|)^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}},$$

$$d_F \mathscr{A} \leqslant c_2(1+|\mu|)^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}.$$

具性质 Ⅳ 的谱障碍具 β 形式:

$$\beta = \frac{\lambda_N + \lambda_{N+1}}{2}, \tag{7.67}$$

则从(7.66) 可知条件(B) 满足.

现开始验证条件(Ⅰ)-(Ⅳ),Γ 的外单位法向为

$$\nu(\mu) = \frac{P_N w(u)}{\| P_N w(u)\|_{L^2}}, \tag{7.68}$$

这里 $w = w(u)$ 为

$$w(u) = -\Delta u + \frac{\mu}{\nu}|u|^2 u, \tag{7.69}$$

$N(u)$ 为

$$N(u) = -\Delta u + |u|^2 u - au + i\nu\left[-\Delta u + \frac{\mu}{\nu}|u|^2 u\right]. \tag{7.70}$$

注意到 $P_N u = u \in \Gamma$,我们有

$$(I - P_N)N(u) = (1 + i\mu)(I - P_N)(|u|^2 u), \tag{7.71}$$

$$(I - P_N)w(u) = \frac{\mu}{\nu}(I - P_N)|u|^2 u. \tag{7.72}$$

再注意到

$$(-\Delta u, |u|^2 u) = \int_0^1 \left(|\nabla u|^2 |u|^2 + \frac{1}{2}|\nabla(|u|^2)|^2\right)\mathrm{d}x. \tag{7.73}$$

我们计算

$$\begin{aligned}(N(u), w(u)) = {} & \|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{\mu}{\nu}\int_0^1 |u|^6 \mathrm{d}x + \left(1 + \frac{\mu}{\nu}\right) \\ & \cdot(-\Delta u, |u|^2 u) - a[\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{\mu}{\nu}\int_0^1 |u|^4 \mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{7.74}$$

基于(7.71),(7.72),我们有

$$(N(u), (I - P_N)w(u)) = \frac{\mu}{\nu}\|(I - P_N)|u|^2 u\|_{L^2}^2. \tag{7.75}$$

联合(7.73),(7.74),(7.75)得

$$\begin{aligned}(N(u), P_N w(u)) \geqslant {} & \|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{\mu}{\nu}\int_0^1 |u|^6 \mathrm{d}x \\ & + \left(1 + \frac{\mu}{\nu}\right)\left[\int_0^1 \left(|u|^2 |\nabla u|^2 + \frac{1}{2}|\nabla(|u|^2)|^2\right)\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{7.76}$$

由不等式

$$\| \Delta u \|_{L^2}^2 \geqslant \frac{\| \nabla u \|_{L^2}^4}{\| u \|_{L^2}^2}, \tag{7.77}$$

$$\| u \|_{L^6}^6 \geqslant \frac{\| u \|_{L^4}^8}{\| u \|_{L^2}^2} \tag{7.78}$$

推出

$$\| \Delta u \|_{L^2}^2 + \frac{\mu}{\nu}\int_0^1 | u |^6 \mathrm{d}x \geqslant \frac{\gamma}{\| u \|_{L^2}^2}(E(u))^2, \tag{7.79}$$

其中 $\gamma = \frac{1}{2}\min\left(1, \frac{4\nu}{\mu}\right)$. 现如 $u \in \Gamma$,则 $E(u) = R$. 特别

$$\| u \|_{L^4}^4 \leqslant \frac{2\nu}{\mu}R, \tag{7.80}$$

$$\| u \|_{L^2}^2 \leqslant \left(\frac{2\nu}{\mu}R\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{7.81}$$

由(7.81)代入(7.79)得

$$\| \Delta u \|_{L^2}^2 + \frac{\mu}{\nu}\int_0^1 | u |^6 \mathrm{d}x \geqslant \left(\frac{2\nu}{\mu}\right)^{-\frac{1}{2}} \gamma R^{\frac{3}{2}}, u \in \Gamma. \tag{7.82}$$

由(7.76), $u \in \Gamma$,得

$$(N(u), P_N w(u)) \geqslant \frac{\gamma}{2}\left(\frac{2\nu}{\mu}\right)^{-\frac{1}{2}} R^{\frac{3}{2}} - 2aR + \frac{1}{2}(\| \Delta u \|_{L^2}^2 + \frac{\mu}{\nu} \| u \|_{L^6}^6) + a \| \nabla u \|_{L^2}^2 + (1 + \frac{\mu}{\nu}) \| \nabla(| u |^2) \|_{L^2}^2 - \frac{\mu}{\nu} \| (I - P_N) | u |^2 u \|_{L^2}^2. \tag{7.83}$$

余下来估计 $\| (I - P_N) | u |^2 u \|_{L^2}^2$,利用

$$\| (I - P_N) v \|_{L^2}^2 \leqslant \frac{1}{(2\pi(N+1))^2} \| \nabla v \|_{L^2}^2, \tag{7.84}$$

这里 $v = | u |^2 u$,因 $\nabla(| u |^2 u) = u \nabla(| u |^2) + | u |^2 \nabla u$,可得

$$\| (I - P_N) | u |^2 u \|_{L^2}^2 \leqslant \frac{C}{(N+1)^2}[\| u \|_{L^\infty}^4 \| \nabla u \|_{L^2}^2 + \| u \|_{L^\infty}^2 \| \nabla(| u |^2) \|_{L^2}^2, \tag{7.85}$$

当 $u \in \Gamma$, $\| u \|_{L^\infty}^2 \leqslant \widetilde{R}_\infty$,由(7.66),得

$$\| (I - P_N)(|u|^2 u) \|_{L^2}^2 \leqslant k_3 \| \nabla u \|_{L^2}^2 + \frac{k_4}{N+1} \| \nabla (|u|^2) \|_{L^2}^2, u \in \Gamma. \tag{7.86}$$

在(7.86)中,k_3, k_4 为常数依赖于 μ, ν.

现设

$$a \geqslant \frac{\mu}{\nu} k_3, \tag{7.87}$$

$$N + 1 \geqslant \left(1 + \frac{\mu}{\nu}\right)^{-1} k_4, \tag{7.88}$$

则由(7.83)和(7.86)可得

$$(N(u), P_N w(u)) \geqslant \frac{\gamma}{2} \left(\frac{2\nu}{\mu}\right)^{-\frac{1}{2}} R^{\frac{3}{2}} - QaR + \frac{1}{2}\left(\| \Delta u \|_{L^2}^2 + \frac{\mu}{\nu} \| \Delta u \|_{L^6}^6 \right). \tag{7.89}$$

最后,从(7.89)推出

$$(N(u), P_N w(u)) \geqslant k_5 R^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\left(\| \Delta u \|_{L^2}^2 + \frac{\mu}{\nu} \| u \|_{L^6}^6 \right), \tag{7.90}$$

其中(7.64)满足.

于是我们证明了

命题7.21 集合 Γ 为(7.60)所定义,满足性质(Ⅰ),N, R 满足(7.64),(7.66),(7.87),(7.88).

显然,如果我们关心 N, R 作为 a 的函数,则要求

$$N \sim a^{\frac{4}{3}}, R \sim a^2.$$

我们验证条件(Ⅳ)或充分条件(Ⅳ′),为此需要 $l_N(T)$. 我们必须估计

$$\| A^{\frac{1}{2}}(I - P_N) N(u) \|_{L^2}^2, \| P_N w \|_{L^2}^2.$$

由(7.71),(7.85)可得

$$\| A^{\frac{1}{2}}(I - P_N) N(u) \|_{L^2}^2 \leqslant \frac{1}{(2\pi(N+1))^2} \| A(I - P_N) N(u) \|_{L^2}^2.$$

因

$$\| \Delta(|u|^2) \|_{L^2}^2 \leqslant c(\| u \|_{L^\infty}^4 \| \Delta u \|_{L^2}^2 + \| u \|_{L^\infty}^2 \| \nabla u \|_{L^2}^4 \tag{7.91}$$

利用插值不等式

$$\| \nabla u \|_{L^2}^4 \leqslant \| u \|_{L^2}^2 \| \Delta u \|_{L^2}^2,$$

连同(7.85),(7.91)得

$$\| A^{\frac{1}{2}}(I - P_N)N(u) \|_{L^2}^2 \leqslant \frac{c}{(N+1)^2}[\| u \|_{L^\infty}^4(\| \Delta u \|_{L^2}^2 + \| \nabla u \|_{L^2}^2)]. \tag{7.92}$$

这里用到了 $\| \nabla |u|^2 \|_{L^2}^2 \leqslant 4 \| u \|_{L^\infty}^2 \| \nabla u \|_{L^2}^2$,如 $u \in \Gamma$,和(7.66)成立,则从(7.92),(7.90),对 $u \in \Gamma$ 有

$$\| A^{\frac{1}{2}}(I - P_N)N(u) \|_{L^2}^2 \leqslant k_6(N(u), P_N w(u)), \tag{7.93}$$

其中 k_6 为常数依赖于 μ, ν.

另一方面,

$$\| P_N w(u) \|_{L^2}^2 \leqslant \| w(u) \|_{L^2} \leqslant 2(\| \Delta u \|_{L^2}^2 + \frac{\mu^2}{\nu^2} \| u \|_{L^6}^6).$$

基于(7.90)推出

$$\| P_N w(u) \|_{L^2}^2 \leqslant k_7(N(u), P_N w(u)). \tag{7.94}$$

从(7.93),(7.94),以 $\nu(u)$, $l_N(T)$ 的定义可得

$$l_N(T) \leqslant k_8, \tag{7.95}$$

其中 k_8 为常数仅依赖于 μ, ν. 因此条件(Ⅳ′)((Ⅳ))满足,如果 $\beta = \frac{\lambda_N + \lambda_{N+1}}{2}$ 属于区间 $(\lambda_N + k_8, \lambda_{N+1} - k_8)$,即

$$\frac{\lambda_{N+1} - \lambda_N}{2} > k_8, \tag{7.96}$$

这是类似于(7.88)的要求.

余下来验证条件(Ⅱ)和(Ⅲ).对(Ⅲ)有充分条件(Ⅲ′).

$$l_N(T) < \chi^2 \lambda_{N+1}.$$

这是

$$\lambda_{N+1} > \frac{1}{\chi^2} k_8 \tag{7.97}$$

的推论.

为了验证条件(Ⅱ),我们需要更细心地估计.首先,从(7.62),(7.29)和$\frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}^2+\|u\|_{L^4}^4\leqslant a^2$,可得

$$\sup_{v\in X}\|v\|_{L^2}\leqslant a^{\frac{1}{2}}, \tag{7.98}$$

$$\sup_{v\in X}\|\nabla v\|_{L^2}\leqslant\frac{2a}{r}, \tag{7.99}$$

$$\sup_{v\in X}\|v\|_{L^4}\leqslant\left(\frac{8\nu}{\gamma\mu}\right)^{\frac{1}{4}}a^{\frac{1}{2}}, \tag{7.100}$$

$$\sup_{v\in X}\|v\|_{L^\infty}\leqslant c\left(\frac{8}{\gamma}\cdot\frac{\nu}{\mu}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\frac{2}{\gamma}\right)^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}. \tag{7.101}$$

设$u\in\Gamma,v\in X$为任意的,我们必须验证在什么关于R_N条件下能保证

$$\|(I-P_N)(u-v)\|_{L^2}\leqslant\chi\|P_N(u-v)\|_{L^2}. \tag{7.102}$$

首先注意到$P_Nu=u$,因此

$$\|(I-P_N)(u-v)\|_{L^2}=\|(I-P_N)v\|_{L^2}\leqslant\frac{\|\nabla v\|_{L^2}}{\sqrt{\lambda_{N+1}}},$$

连同(7.99)可得

$$\|(I-P_N)(u-v)\|_{L^2}\leqslant(2\pi(N+1))^{-1}\frac{2}{\gamma}a. \tag{7.103}$$

因$E(u)=R$有二种情况:

(a) $\|\nabla u\|_{L^2}<\frac{1}{\sqrt{2}}$,或

(b) $\|u\|_{L^4}\geqslant\left(\frac{\nu}{\mu}R\right)^{\frac{1}{4}}$.

如(a)成立,则有

$$\chi\|P_N(u-v)\|_{L^2}\geqslant\frac{\chi}{\sqrt{\lambda_N}}\|\nabla P_N(u-v)\|_{L^2}$$

$$\geqslant\frac{\chi}{\sqrt{\lambda_N}}\|\nabla u\|_{L^2}-\frac{\chi}{\sqrt{\lambda_N}}\|\nabla v\|_{L^2}\geqslant\frac{\chi}{\sqrt{\lambda_N}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}R^{\frac{1}{2}}-\frac{2a}{\gamma}\right).$$

基于(7.64)我们有

$$\chi \| P_N(u-v) \|_{L^2} \geqslant \frac{\chi}{\sqrt{\lambda_N}}\left[k_1^{\frac{1}{2}}(a^2+1)^{\frac{1}{2}} - \frac{2a}{\gamma}\right] \quad (7.104)$$

联合(7.103),可知(7.102)成立,如果 k_1 充分大,

$$k_1^{\frac{1}{2}} \geqslant \left(2+\frac{1}{\chi}\right)\frac{2}{\gamma}. \quad (7.105)$$

如(b)成立,则因

$$\begin{aligned}\chi \| P_N(u-v) \|_{L^2} &= \chi \| u - P_N v \|_{L^2} \\ &\geqslant \chi \| u-v \|_{L^2} - \chi \| (I-P_N)v \|_{L^2}.\end{aligned}$$

为了满足(7.102),充分证明满足

$$\| u-v \|_{L^2} \geqslant (2\pi(N+1))^{-1}\frac{2}{\gamma}a\left(1+\frac{1}{\chi}\right), \quad (7.106)$$

利用 $\| u-v \|_{L^2} \geqslant \frac{\| u-v \|_{L^4}^2}{\| u-v \|_{L^\infty}}$, $\| u-v \|_{L^4} \geqslant \left(\frac{\nu}{\mu}R\right)^{\frac{1}{4}} - \left(\frac{8\nu}{\gamma\mu}\right)^{\frac{1}{4}} a^{\frac{1}{2}}$, $\| u-v \|_{L^\infty} \leqslant \tilde{R}_\infty^{\frac{1}{2}} + c\left(\frac{8\nu}{\gamma\mu}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\frac{2}{\gamma}\right)^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}}$,可得

$$\| u-v \|_{L^2} \geqslant k a^{\frac{1}{3}}, \quad (7.107)$$

其中常数 k 依赖于$\frac{\nu}{\mu}$.

从(7.107)可知(7.106)成立,如果

$$2\pi(N+1) > \frac{2}{\gamma}\left(1+\frac{1}{\chi}\right)k^{-1}a^{\frac{2}{3}}, \quad (7.108)$$

再注意(7.108)为比(7.64),(7.66)更弱的要求,如果(7.64),(7.66)成立,则条件(Ⅱ)满足.

于是我们证明了:

定理 7.22 设 $\mu \neq 0, \nu \neq 0, \frac{\mu}{\nu} > 0$,则存在常数 k_1, k_2 依赖于 μ, ν 使得:如果

$$R > k_1(1+a^2), N \geqslant k_2(1+k^{\frac{2}{3}}),$$

则积分流形 $\Sigma = \bigcup_{t>0} S(t)T$ 的闭包是 GL 方程的惯性流形,其中

$$\Gamma = \{u \mid P_N u = u, \int_0^1 (\nabla u)^2 dx + \frac{\mu}{2\nu}\int_0^1 |u|^4 dx = R\}.$$

§8　广义 Ginzburg-Landau 方程的 Gevrey 正则性

现考虑如下广义 GL 方程

$$u_t = \alpha_0 u + \alpha_1 u_{xx} + \alpha_2 |u|^2 u + \alpha_3 |u|^2 u_x + \alpha_4 u^2 \overline{u}_x + \alpha_5 |u|^4 u, \tag{8.1}$$

其中 $\alpha_j = a_j + ib_j \quad j = 1,2,\cdots,5, \alpha_0 = a_0, a_j, b_j$ 为实数,这里 $\overline{u}$ 表示 u 的复数共轭. 令 $X_\alpha = D(A^\alpha), \alpha > 0. H = L^2[0,L], V = D(A^{\frac{1}{2}}). A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}. H^p$ 模为 $\|\cdot\|_p$. 特别 $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$. 这里考虑(8.1)的周期初边值问题,

$$u(\cdot,t) \text{ 为 } L \text{ 周期的}, \tag{8.2}$$

$$u(0) = u_0. \tag{8.3}$$

现叙述一下前面已得到的已知结果:如 $a_1 > 0 > a_5, -4a_1a_5 > (b_3 - b_4)^2$,则存在惟一整体解

$$u(t) \in C([0,\infty), V) \cap C^1((0,\infty), V) \cap C((0,\infty), D(A)). \tag{8.4}$$

其中 $u(0) \in V$. 非线性解半群 $S(t): V \to V$ 是确定的, $S(t)u_0 = u(t)$.

我们有如下估计:

$$\|u\|^2 \leqslant \|u_0\|^2 e^{-t} + K_0(1 - e^{-t}) \leqslant \|u_0\|^2 + K_0 \equiv K_0', \tag{8.5}$$

$$\int_t^{t+r} \|u_x\|^2 ds \leqslant K_1 \|u\|^2 + K_1' r. \tag{8.6}$$

$$\frac{dy}{dt} \leqslant K_2 y^2, \tag{8.7}$$

$$\|u\|_{H^1} \leqslant K_3, \tag{8.8}$$

其中 $y = 1 + \|u_x\|^2$. 常数 K_0, K_1, K_1' 依赖于 α_j 和 L, 而 K_0',

K_2, K_3 依赖于 u_0, α_j 和 L. 常数 $r > 0$ 是任意选取的.

由(8.5) 有

$$\limsup_{t \to \infty} \| u \| \leqslant \rho_0, \rho_0 = \sqrt{K_0}. \tag{8.9}$$

推之,如 $\| u_0 \| \leqslant k, \rho_0' > \rho_0$, 则存在时刻

$$t_0 = t_0(R, \rho_0') = \log \frac{R^2 - \rho_0^2}{\rho_0'^2 - \rho_0^2}, \tag{8.10}$$

使得

$$\| u \| \leqslant \rho_0', \forall t \geqslant t_0. \tag{8.11}$$

因此,从(8.6) 对 $t > t_0$ 有

$$\int_t^{t+r} \| u_x \|^2 \mathrm{d}s \leqslant k_1 \rho_0'^2 + K_1' r \equiv K_4(\rho_0', r). \tag{8.12}$$

应用一致 Growall 不等式于(8.7),(8.12) 可得

$$\| u_x \|^2 \leqslant y \leqslant \frac{r + K_4}{r} e^{K_2(r + K_4)}, \forall t \geqslant t_0 + r. \tag{8.13}$$

联系(8.11) 和(8.13) 可知,存在正数 $\rho = \rho(r, \rho_0')$ 和 $t^* = t_0 + r$,使得

$$\| u \|_V \leqslant \rho, t \geqslant t^*. \tag{8.14}$$

因 $H^2 \hookrightarrow H^1$ 为紧嵌入,$S(t): V \to V$ 是紧的,$t > 0$. 因此存在整体吸引子 $\mathscr{A}$.

定理 8.1 设 $a_1 > 0 > a_5$, $-4a_1a_5 > (b_3 - b_4)^2, a_j + ib_j = \alpha_j$,则存在在 V 中的惟一整体紧的连通的吸引子,它是 $B(0,\rho)$ 的 ω 极限集,即有

$$\mathscr{A} = \bigcap_{s>0} \overline{\left(\bigcup_{t \leqslant s} S(t) B(0, \rho) \right)}, \tag{8.15}$$

且整体吸引子具有有限的 Hausdorff 和分形维数.

现考虑 Gevrey 正则性和解析性. 设 $L = 1$.

$f \in L^2_{\text{per}}[0,1]$ 展为 F 氏级数,

$$f(x) = \sum_n f_n e^{2\pi i n x}, \tag{8.16}$$

$\| f \|^2 = \sum_n | f_n |^2$ 对 $s > 0$, A^s 的定义域为

$$D(A^s) = \{u \in L^2_{per} : \| A^s u \|^2 = \sum_n (2\pi |n|)^{4s} |u_n|^2 < \infty\}. \tag{8.17}$$

进一步定义

$$D(A^s e^{\tau A^s}) = \{u \in L^2_{per} : \| A^s e^{\tau A^s} u \|^2 = \sum_n (2\pi |n|)^{4s} e^{4\pi |n|^{2s} \tau} |u_n|^2 < \infty\}, \tag{8.18}$$

它是一个特殊的 Gevrey 类.

这里我们仅关心 $s = \frac{1}{2}$, $\tau > 0$ 的情况, 令 $G_\tau = D(A^{\frac{1}{2}} e^{\tau A^{\frac{1}{2}}})$, $\| u \|_{G\tau} = \| A^{\frac{1}{2}} e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} u \|$, 注意到 $\tau > \tau'$, $G_\tau \subset G_{\tau'}$, $G_\tau \subset H^k_{per}$, $k = 1,2,3,\cdots$.

定理 8.2 设 $a_1 > 0 > a_5$, $-4a_1 a_5 > (b_3 - b_4)^2$, 则有 (i) 如 $u_0 \in H^1_{per}[0,1]$, 则存在 $T_* = T_*(\| u_0 \|_{H^1}) > 0$, 使得 $u(t) \in G_t = D(A^{\frac{1}{2}} e^{tA^{\frac{1}{2}}})$, $t \in (0, T_*)$.

映照 $t \to A^{\frac{1}{2}} e^{tA^{\frac{1}{2}}} u(t)$ 是在复平面含有 $(0, T_*)$ 的对称扇形区域上解析的.

$u(t) \in G_\sigma$, $t \in [T_*, \infty)$. 映照 $t \to A^{\frac{1}{2}} e^{\sigma A^{\frac{1}{2}}} u(t)$ 在复平面环绕 (T_*, ∞) 的带形区域上是解析的, 其中常数 $\sigma = \sigma(\alpha_j) > 0$ 与 t, u_0 无关.

(ii) 如 $u_0 \in G_\lambda \subset H^1_{per}$, $\lambda > 0$, 则 $u(t) \in G_\mu$, $t \in (0, \infty)$, 映照 $t \to A^{\frac{1}{2}} e^{tA^{\frac{1}{2}}} u(t)$ 在含有 $(0, \infty)$ 的复平面的"铅笔状"区域内解析.

证 先证 (i). 令 $v = e^{tA^{\frac{1}{2}}} u(x,t)$,

$$v = \sum_n e^{2\pi |n| t} u_n(t) e^{2\pi i n x}, \tag{8.19}$$

则有

$$v_t = A^{\frac{1}{2}} v + e^{tA^{\frac{1}{2}}} u_t = A^{\frac{1}{2}} v + e^{tA^{\frac{1}{2}}} (-\alpha_1 A u + N(u))$$

$$= A^{\frac{1}{2}}v + \alpha_0 v + \alpha_1 Av + e^{tA^{\frac{1}{2}}}(\alpha_2 |u|^2 u$$
$$+ \alpha_3 |u|^2 u_x + \alpha_4 u^2 \overline{u}_x + \alpha_5 |u|^4 u), \tag{8.20}$$

其中方程(8.1)可改写为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \alpha_1 Au = N(u), a_1 = \mathrm{Re}(\alpha_1) > 0. \tag{8.21}$$

(8.20)和 Av 作内积,再取实部,可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\|A^{\frac{1}{2}}v\|^2 = \mathrm{Re}(A^{\frac{1}{2}}v_t, A^{\frac{1}{2}}v)$$
$$= (Av, A^{\frac{1}{2}}v) + \alpha_0\|A^{\frac{1}{2}}v\|^2 - a_1\|Av\|^2$$
$$+ \mathrm{Re}(A^{\frac{1}{2}}e^{tA^{\frac{1}{2}}}(\alpha_2|u|^2u + \alpha_3|u|^2u_x$$
$$+ \alpha_4 u^2\overline{u}_x + \alpha_5|u|^4u), A^{\frac{1}{2}}e^{tA^{\frac{1}{2}}}u), \tag{8.22}$$

估计上式右端的项,首先有

$$(Av, A^{\frac{1}{2}}v) \leqslant \|Av\|\,\|A^{\frac{1}{2}}v\| \leqslant \varepsilon\|Av\|^2$$
$$+ \varepsilon^{-1}\|A^{\frac{1}{2}}v\|^2, \tag{8.23}$$

$\varepsilon > 0$ 待定.注意以下各式

$$|u|^2u = \sum_M\Big(\sum_{k+l-m=M} u_k u_l \overline{u}_m\Big)e^{2\pi iMx}. \tag{8.24}$$

$$|u|^2u_x = \sum_M\Big(\sum_{k+l-m=M}(2\pi ik)u_k u_l\overline{u}_m\Big)e^{2\pi iMx}, \tag{8.25}$$

$$|u|^2\overline{u}_x = -\sum_M\Big(\sum_{k+l-m=M}(2\pi im)u_k u_l\overline{u}_m\Big)e^{2\pi iMx}, \tag{8.26}$$

$$|u|^4u = \sum_M\Big(\sum_{k+l+s-m=M}u_k u_l u_s\overline{u}_m\,\overline{u}_s\Big)e^{2\pi iMx}. \tag{8.27}$$

因此能估计

$$\mathrm{Re}(A^{\frac{1}{2}}e^{tA^{\frac{1}{2}}}\alpha_2|u|^2u, A^{\frac{1}{2}}e^{tA^{\frac{1}{2}}}u)$$
$$= \mathrm{Re}(\alpha_2 e^{tA^{\frac{1}{2}}}|u|^2u, Ae^{tA^{\frac{1}{2}}}u)$$
$$= \mathrm{Re}\alpha_2\sum_M 4\pi^2M^2\overline{u}_M e^{2\pi|M|t}\Big(\sum_{k+l-m=M}e^{2\pi|M|t}u_k u_l\overline{u}_m\Big)$$
$$\leqslant |\alpha_2|\sum_M 4\pi^2M^2|u_M|e^{2\pi|M|t}\Big(\sum_{k+l-m=M}e^{2\pi|k|t}|u_k|e^{2\pi|m|t}$$

$$\cdot |u_l| e^{2\pi|m|t} |u_m|) \leqslant |\alpha_2| (|\hat{v}|^2 |\hat{v}|, A\hat{v})$$

$$\leqslant |\alpha_2| \, \|A\hat{v}\|_6^3 \|A\hat{v}\| \leqslant |\alpha_2| (\varepsilon^{-1} \|\hat{v}\|_6^6 + \varepsilon \|A\hat{v}\|^2), \tag{8.28}$$

其中 $\hat{v} = \sum_n e^{2\pi|n|t} |u_n| e^{2\pi inx}$. 注意到

$$\|\hat{v}\| = \|v\|, \|A^{\frac{1}{2}}\hat{v}\| = \|A^{\frac{1}{2}}v\|, \|A\hat{v}\| = \|Av\|. \tag{8.29}$$

由 Gagliardo-Nirenberg 不等式有

$$\|\hat{v}\|_6 \leqslant c \|\hat{v}\|^{\frac{2}{3}} \|\hat{v}\|_{H^1}^{\frac{1}{3}}$$

$$= c_1 \|v\|^{\frac{2}{3}} (\|v\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}v\|^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{8.30}$$

从(8.28) 推得

$$\mathrm{Re}(A^{\frac{1}{2}} e^{tA^{\frac{1}{2}}} \alpha_2 |u|^2 u, A^{\frac{1}{2}} e^{tA^{\frac{1}{2}}} u) \leqslant |\alpha_2| (c_2 \varepsilon^{-1} \|v\|^4$$

$$\cdot (\|v\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}v\|^2) + \varepsilon \|Av\|^2). \tag{8.31}$$

类似地,(8.22) 右端最后三项有

$$\mathrm{Re}(A^{\frac{1}{2}} e^{tA^{\frac{1}{2}}} \alpha_3 |u|^2 u_x, A^{\frac{1}{2}} e^{tA^{\frac{1}{2}}} u) \leqslant |\alpha_3| (|\hat{v}|^2 |\hat{v}_x|, A\hat{v})$$

$$\leqslant |\alpha_3| \, \|v\|_\infty^2 \|A^{\frac{1}{2}}v\| \, \|Av\|$$

$$\leqslant c_3 |\alpha_3| (\|v\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}v\|^2) \|A^{\frac{1}{2}}v\| \, \|Av\|, \tag{8.32}$$

$$\mathrm{Re}(A^{\frac{1}{2}} e^{tA^{\frac{1}{2}}} \alpha_4 u^2 \bar{u}_x, A^{\frac{1}{2}} e^{tA^{\frac{1}{2}}} u) \leqslant |\alpha_4| (|\hat{v}|^2 |\hat{v}_x|, A\hat{v})$$

$$\leqslant c_3 |\alpha_4| (\|v\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}v\|^2) \|A^{\frac{1}{2}}v\| \, \|Av\|, \tag{8.33}$$

$$\mathrm{Re}(A^{\frac{1}{2}} e^{tA^{\frac{1}{2}}} \alpha_5 |u|^4 u, A^{\frac{1}{2}} e^{tA^{\frac{1}{2}}} u) \leqslant |\alpha_5| (|\hat{v}|^4 |\hat{v}|, A\hat{v})$$

$$\leqslant |\alpha_5| \, \|\hat{v}\|_{10}^5 \|A\hat{v}\| \leqslant \alpha_5 (\varepsilon^{-1} \|\hat{v}\|_{10}^{10} + \varepsilon \|A\hat{v}\|^2)$$

$$\leqslant |\alpha_5| [\varepsilon^{-1} c_4 \|v\|^6 (\|v\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}v\|^2)^2 + \varepsilon \|Av\|^2]. \tag{8.34}$$

在(8.32),(8.33) 中我们利用了 $H^1 \hookrightarrow L^\infty$, 而在(8.34) 中的最后一步用到了 Gagliardo - Nirenderg 不等式

$$\|\hat{v}\|_{10} \leqslant c_5 \|\hat{v}\|^{\frac{3}{5}} \|\hat{v}\|^{\frac{2}{5}}$$

$$= c_5 \|v\|^{\frac{3}{5}} (\|v\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}} v\|^2)^{\frac{1}{5}}. \tag{8.35}$$

从(8.19)和(8.5)易知

$$\|v\|^2 \leqslant |v_0(t)|^2 + \|A^{\frac{1}{2}} v\|^2 \leqslant K_0' + \|A^{\frac{1}{2}} v\|^2, \tag{8.36}$$

其中 $v_0(t)$ 为 $u(t)$ 的零次F氏系数,$K_0' = K_0'(u_0)$ 来自(8.5).

令 $y = 1 + \|A^{\frac{1}{2}} v\|^2$,将(8.23),(8.31),(8.32),(8.33),(8.34)和(8.36)代入(8.22),取 $\varepsilon > 0$ 充分小有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = K_5 y^5, \tag{8.37}$$

其中 $K_5 = K_5(u_0)$,推出

$$y(t) \leqslant \frac{y(0)}{(1 - 4y^4(0) K_5 t)^{\frac{1}{4}}}. \tag{8.38}$$

只要 $t < \dfrac{1}{4y^4(0) K_5}$,则有

$$\|A^{\frac{1}{2}} e^{tA^{\frac{1}{2}}} u(t)\|^2 \leqslant y(t) = 1 + \|A^{\frac{1}{2}} v\|^2$$

$$\leqslant 2y(0) = 2(1 + \|u_0\|_{H^1}^2), \tag{8.39}$$

$$0 \leqslant t \leqslant T_0(\|u_0\|_{H^1}) \equiv \frac{15}{64 K_5 (1 + \|u_0\|_{H^1}^2)^4}. \tag{8.40}$$

因此 $u(t) \in D(A^{\frac{1}{2}} e^{tA^{\frac{1}{2}}})$,$t \in (0, T_0)$,$u_0 \in D(A^{\frac{1}{2}}) = H^1_{\text{per}}$.类似于热传导方程,当 $t > 0$ 时解是光滑的,因我们 $\|u\|_{H^1}$ 与 t 无关的估计(见(8.8)),我们能重复上述原理,对任何 $\tau > 0$,$u(\tau)$ 作为新的初值,可得 $u(t) \in D(A^{\frac{1}{2}} e^{tA^{\frac{1}{2}}})$,且

$$\|A^{\frac{1}{2}} e^{tA^{\frac{1}{2}}} u(t)\|^2 \leqslant 2(1 + \|u(\tau)\|_{H^1}^2),$$

$$t \in (\tau, 2 + T_0(\|u(\tau)\|_{H^1})). \tag{8.41}$$

我们能重复 $\tau > t^*(u_0)$($t^*(u_0)$ 进入吸引球 $B(0,\rho)$),直到 $u(\tau)$ 进入吸引球,且一致有界于 ρ.于是 $T_0(\rho) = \sigma_0 > 0$,能选作

常数,仅依赖于 GL 方程的系数,当 $t > T_0 \equiv \max(t^*(u_0),\sigma_0)$ 时有

$$u(t) \in D(A^{\frac{1}{2}}e^{\sigma_0 A^{\frac{1}{2}}}), \tag{8.42}$$

$$\| A^{\frac{1}{2}}e^{\sigma_0 A^{\frac{1}{2}}}u(t) \|^2 \leqslant 2(1+\rho^2). \tag{8.43}$$

下面在复框架下进行估计,写(8.21)为复化形式

$$\frac{du}{dt} + \alpha_1 Au = N(u). \tag{8.44}$$

在复化空间 $L_c = L_{per}^2 \times L_{per}^2$ 上,复时间 $z = se^{i\theta}, s>0, \cos\theta > 0$,考虑(8.44)的 Galerkin 近似的复形式,可得具复时间的复解析的 ODE 方程组. 它在复平面 $z=0$ 邻域有解析解. θ 在某个范围,可得到这些 Galerkin 近似解析解的一致 Gevrey 类模的估计. 利用 Cauchy 积分公式可得到导数估计. 再通过取极限和古典的 Vitali 定理,可知 $u(z)$ 在 $\mathrm{Re}(z)>0$ 上是解析的.

写 $v(x,z) = e^{s\cos\theta A^{\frac{1}{2}}}u(x,z)$,可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\| A^{\frac{1}{2}}v \|^2 &= \cos\theta(Av, A^{\frac{1}{2}}v) + a_0\cos\theta \| A^{\frac{1}{2}}v \|^2 \\ &- (a_1\cos\theta + b_1\sin\theta)\| Av \|^2 + \mathrm{Re}[e^{i\theta}(A^{\frac{1}{2}}e^{s\cos\theta A^{\frac{1}{2}}}(\alpha_2 | u |^2 u \\ &+ \alpha_3 | u |^2 u_x + \alpha_4 u^2 \bar{u}_x + \alpha_5 | u |^4 u) A^{\frac{1}{2}}e^{s\cos\theta A^{\frac{1}{2}}}u].\end{aligned} \tag{8.45}$$

因 $a_1>0$,故可找到 $\theta_0, 0<\theta_0<\frac{\pi}{2}$,使 $a_1\cos\theta + b_1\sin\theta > 0$, $|\theta| \leqslant \theta_0$.

设 $y = 1 + \| A^{\frac{1}{2}}v \|^2$,可得

$$\frac{dy}{dt} \leqslant K_6 y^5, \tag{8.46}$$

其中 $K_6 = K_6(u_0)$ 不同于(8.37)中的 K_5,除非 $\theta=0$. 如同实的情况,有

$$\begin{aligned}&\| A^{\frac{1}{2}}e^{s\cos\theta A^{\frac{1}{2}}}u(z) \|^2 \leqslant y(s) = 1 + \| A^{\frac{1}{2}}v \|^2 \\ &\leqslant 2y(0) = 2(1 + \| u_0 \|_{H^1}^2),\end{aligned} \tag{8.47}$$

此时 z 在如下的复平面扇形的区域内：

$$\Delta_1(u_0) = \{z = se^{i\theta}: 0 < s < T_1(\|u_0\|_{H^1})$$

$$\equiv \frac{15}{64K_6(1+\|u_0\|_{H^1}^2)^4}, |\theta| \leqslant \theta_0\}. \tag{8.48}$$

我们重复这个过程，直到 $\mathrm{Re}(z) > t^*(u_0)$. 令 $\sigma = T_1(\rho)\cos(\theta_0)$, $T_*(\|u_0\|_{H^1}) = \max(t^*(u_0), \sigma)$，则有

$$u(z) \in D(A^{\frac{1}{2}}e^{tA^{\frac{1}{2}}}). \tag{8.49}$$

此时 z 在复平面的扇形区域内：

$$\Delta(u_0) = \{z = se^{i\theta}: 0 \leq s < T_*(\|u_0\|_{H^1}), |\theta| \leqslant \theta_0\}, \tag{8.50}$$

$$u(z) \in D(A^{\frac{1}{2}}e^{\sigma A^{\frac{1}{2}}}). \tag{8.51}$$

此时 z 在复平面的带形区域：

$$E(u_0) = \{z = se^{i\theta}: \mathrm{Re}(z) \geqslant T_*\cos(\theta_0),$$

$$|\mathrm{Im}(z)| \leqslant T_*\sin(\theta_0)\}. \tag{8.52}$$

这就完成了(ⅰ)的证明.

部分(ⅱ)的证明很类似，在实的情况，置 $v = e^{\lambda A^{\frac{1}{2}}}u(x,t)$, $y = 1 + \|A^{\frac{1}{2}}v\|$，可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \leqslant K_6' y^5, \tag{8.53}$$

因此 $u(t) \in G_\lambda$,

$$0 \leqslant t \leqslant T_0'(\|u_0\|_{G_\lambda}) \equiv \frac{15}{64K_6'(1+\|u_0\|_{G_\lambda}^2)^4}. \tag{8.54}$$

另一方面，因 $G_\lambda \subset H_{\mathrm{per}}^1$, $u_0 \in H_{\mathrm{per}}^1$，则从(ⅰ)推出存在常数 $T_*(\|u_0\|_{H^1}) > 0$ 和 $\sigma(\alpha_j) > 0$，使得

$$u(t) \in G_\sigma, t \geqslant T_*.$$

如 $T_0' > T_*$，则由 $G_\tau \subset G_{\tau'}$, $\tau' < \tau$ 可得 $u(t) \in G_\mu$,

$$\mu = \mu(\alpha_j) = \min(\lambda, 0).$$

如 $T_0' < T_*$，则从(ⅰ)可知 $u(t) \in G_t$, $t \in [T_0', T_*)$，因此

$u(t) \in G_\mu, \mu = \mu(\alpha_j, u_0) = \min(\lambda, T_0'(\| u_0 \|_{G_r})), t \geqslant 0.$

至于复的情况是类似的,于是完成了定理 8.2 的证明.

以下研究"适应"方法和它的收敛率.

设 $u_0 \in G_\lambda$ 或 $u_0 \in \mathscr{A}$. 用如下的 Galerkin 格式, u_N 表示它的近似解:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u_N}{\mathrm{d}t} = \alpha_0 u_N - \alpha_1 A u_N + P_N(\alpha_2 |u_N|^2 u_N + \alpha_3 |u_N|^2 (u_N)x \\ \qquad\qquad + \alpha_4 u_N^2 (\bar{u}_N)_x + \alpha_5 |u_N|^4 u_N), & (8.55) \\ u_N(x,0) = P_N u(x,0), & (8.56) \end{cases}$$

其中 P_N 表示在由 $2N+1$ 个 F 氏模 $\{e^{2\pi i n x}\}_{n=-N}^{N}$ 所张成子空间上的投影. 当 $u_0 \in H_{\text{per}}^1$ 时,我们采用如下的在$[0,T]$上的"适应"方法. 从定理 8.2(ⅰ)知,存在 $T_* = T_*(\| u_0 \|_{H^1}) > 0$,使得, $u(t) \in G_r, t \in [T_*, T]$(设 T 是大的, $T > T_*$). 在$[0, T_*]$上,用(8.55),(8.56)对大的 N,在$[T_*, T]$上用上面的 Galerkin 近似,由 $2M+1$ 个 F 氏模 $\{e^{2\pi i n x}\}_{n=-M}^{M}$ 作为基函数, $u_N(T_*)$ 作为新的初值:

$$u_M(x, T_*) = P_M u_N(x, T_*), \tag{8.57}$$

相应的近似解在$[T_*, T]$上表为 u_M,整个近似解以 Uadaptive 表之.

我们现在估计误差,对 $u_0 \in G_\lambda$,或 $u_0 \in \mathscr{A}$,有如下定理:

定理 8.3 设 $a_1 > 0 > a_5$, $-4a_1a_5 > (b_3 - b_4)^2$, $a_j + ib_j = \alpha_j$,设为周期初边值问题, $L = 1$. 令 u_N 为 $2N+1$ 个 F 氏模 $\{e^{inx}\}_{n=-N}^{N}$ 的 Galerkin 近似.

(ⅰ) 如 u_0 位于整体吸引子之中,则存在一个正常数 $C_6(\alpha, T)$ 与 u_0 无关,使得

$$\| u - u_N \|_{H^1} \leqslant C_6(\alpha_j, T) e^{-2\pi\sigma(N+1)}, t \in [0, T], \tag{8.58}$$

其中 $\sigma(\alpha_j) > 0$.

(ⅱ) 如 $u_0 \in G_\lambda$ 对某 $\lambda > 0$,则存在一个正常数 $C_7(\alpha_j, \lambda_j, u_0, T)$,使得

$$\| u - u_N \|_{H^1} \leqslant c_7(\alpha_j, \lambda, u_0, T) e^{-2\pi\mu(N+1)}, t \in [0, T],$$
(8.59)

其中 $\mu(\alpha_j, \lambda_j \| u_0 \|_{G_\lambda}) > 0$.

证 定义 $p = P_N u, q = (I - P_N) u, w = u_N,$

$\delta = p - w = P_N u - u_N.$

注意到 $\delta(x,0) = 0$,且

$$\| u - u_N \|_{H^1} = \| p + q - w \|_{H^1} \leqslant \| \delta \|_{H^1} + \| q \|_{H^1},$$
(8.60)

我们首先证明(ⅰ)

因 u_0 位于吸引子 $\mathscr{A}$ 上,具有向后存在性,对时间的解析性和向后的惟一性,故可从任何负时间开始,这就推出我们能取 $T_* = 0$ 并推出对 $t \geqslant 0, u(t) \in D(A^{\frac{1}{2}} e^{\sigma A^{\frac{1}{2}}})$ 和

$$\| A^{\frac{1}{2}} e^{\sigma A^{\frac{1}{2}}} u(t) \| \leqslant k_7, \tag{8.61}$$

其中 $\sigma = \sigma(\alpha_j), k_7 = k_7(\alpha_j)$,因此对 $t \geqslant 0$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 4\pi^2 | n |^2 e^{4\pi\sigma |n|} | u_n(t) |^2 \leqslant K_7^2. \tag{8.62}$$

于是对 $n \neq 0$,

$$| u_n(t) | \leqslant \frac{K_7}{2\pi n} e^{-2\pi\sigma |n|}, t \geqslant 0. \tag{8.63}$$

因此

$$\begin{aligned}
\| q \|_{H^1}^2 &= \sum_{|n| \geqslant N+1} (| u_n |^2 + 4\pi^2 | n |^2 | u_n |^2) \\
&\leqslant \frac{K_7^2}{4\pi^2} \sum_{|n| \geqslant N+1} \frac{1}{n^2} e^{-4\pi\sigma |n|} + K_7^2 \sum_{|n| \geqslant N+1} e^{-4\pi\sigma |n|} \\
&\leqslant \frac{K_7^2}{2\pi^2} \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right) e^{-4\pi\sigma(N+1)} + K_7^2 \frac{2}{1 - e^{-4\pi\sigma}} e^{-4\pi\sigma(N+1)} \\
&\leqslant \left(\frac{1}{12} + \frac{2}{1 - e^{-4\pi\sigma}} \right) K_7^2 e^{-4\pi\sigma(N+1)} \\
&\equiv K_8^2 e^{-4\pi\sigma(N+1)}, t \geqslant 0,
\end{aligned} \tag{8.64}$$

其中我们用到了估计 $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, K_8 = K_8(\alpha_j)$. 从

(8.60) 和(8.59),我们仅需证明

$$\| \delta \|_{H^1} = O(e^{-2\pi\sigma(N+1)}), t \in [0,T]. \tag{8.65}$$

从(8.1) 减去(8.55),得

$$\delta_t = \alpha_0\delta + \alpha_1 A\delta + P_N[\alpha_2(|u|^2 u - |y|^2 y) + \alpha_3(|u|^2 u_x - |y|^2 y_x) + \alpha_4(u^2 \overline{u}_x - y^2 \overline{y}_x) + \alpha_5(|u|^4 u - |y|^4 y)]. \tag{8.66}$$

(8.66) 和 δ 作内积,再取实部,得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| \delta \|^2 = a_0 \| \delta \|^2 - a_1 \| A^{\frac{1}{2}}\delta \|^2 + \mathrm{Re}(P_N[\alpha_2(|u|^2 u - |y|^2 y) + \alpha_3(|u|^2 u_x - |y|^2 y_x) + \alpha_4(u^2 \overline{u}_x - y^2 \overline{y}_x) + \alpha_5(|u|^4 u - |y|^4 u)], \delta). \tag{8.67}$$

我们估计

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}(P_N[\alpha_2(|u|^2 u - |y|^2 y)], \delta) \leqslant |\alpha_2| (|u|\delta^2, \delta) + (|u|^2 q, \delta) \\
&\quad + (|y|^2\delta, \delta) + (|y|^2 q, \delta) + (uy, \delta^2) + (uy, q\delta)| \\
&\leqslant |\alpha_2| [\| u \|_\infty^2 \| \delta \|^2 + 0.5 \| u \|_\infty^2 (\| q \|^2 + \| \delta \|^2) \\
&\quad + \| y \|_\infty^2 \| \delta \|^2 + 0.5 \| y \|_\infty^2 (\| q \|^2 + \| \delta \|^2) + \| u \|_\infty \| y \|_\infty \| \delta \|^2 \\
&\quad + 0.5 \| u \|_\infty \| y \|_\infty (\| q \|^2 + \| \delta \|^2) \leqslant 5|\alpha_2| C_8 (\| q \|^2 + \| \delta \|^2),
\end{aligned} \tag{8.68}$$

其中上式最后一步我们用到了$H^1 \hookrightarrow L^\infty$ 和(8.8).

类似地对(8.67) 中其他的项有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}(P_N[\alpha_3(|u|^2 u_x - |y|^2 y_x)], \delta) \leqslant |\alpha_3| |(|u|^2 \delta_x, \delta) \\
&\quad + (|u|^2 q_x, \delta) + (|y|^2 \delta_x, \delta) + (|y|^2 q_x, \delta) + (u y_x, \delta^2) \\
&\quad + (u y_x, q\delta) + (\overline{y} y_x \delta, \delta) + (\overline{y} y_x q, \delta)| \\
&\leqslant |\alpha_3| c_9 (\| \delta \|^2 + \varepsilon^{-1} \| \delta \|^2 + \varepsilon \| \delta_x \|^2),
\end{aligned} \tag{8.69}$$

$$\mathrm{Re}(P_N[\alpha_4(u^2 \overline{u}_x - y^2 \overline{y}_x)], \delta) \leqslant |\alpha_4| c_{10} (\| \delta \|^2 + e^{-1} \| \delta \|^2 + e \| \delta_x \|^2), \tag{8.70}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}(P_N[\alpha_5(|u|^4 u - |y|^4 y)], \delta) \leqslant |\alpha_5| (|u|^4 \delta, \delta) \\
&\quad + (|u|^4 q, \delta) + (|y|^4 \delta, \delta) + (|y|^4 q, \delta) + (|u|^2 u y \delta, \delta)
\end{aligned}$$

$$+ (|u|^2\overline{u}yq, \delta) + (|u|^2 y^2, \delta^2) + (|u|^2 y^2, q\delta)$$
$$+ (u\overline{y}y^2, \delta^2) + (u\overline{y}y^2, q\delta) \leqslant |\alpha_5| c_{11}(\|q\|^2 + \|\delta\|^2). \tag{8.71}$$

将(8.68),(8.69),(8.70)和(8.71)代入(8.67),取 ε 充分小,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\delta\|^2 \leqslant c_{12}\|\delta\|^2 + c_{13}\|q\|^2. \tag{8.72}$$

显然,$c_{12} > 0$ 和 $c_{13} > 0$ 依赖于 u_0 和 α_j,因 $u_0 \in \mathscr{A}, u(t) \in \mathscr{A}, \forall t \geqslant 0$. 由 $\mathscr{A}$ 的有界性推出 c_{12}, c_{13} 不依赖于初值但仅依赖于 α_j,由 Gronwall 不等式,且注意到 $\delta(0) = 0$,(8.72)导致误差的 L^2 估计

$$\begin{aligned}\|\delta(t)\|^2 &\leqslant \frac{c_{13}}{c_{12}} \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|q(t)\|^2[e^{c_{12}t} - 1]\\ &= O(e^{-4\pi\sigma(N+1)}), t \in [0, T],\end{aligned} \tag{8.73}$$

最后一步我们用到了(8.64).

为了完成(8.65)的证明,我们仅需证明

$$\|A^{\frac{1}{2}}\delta\|^2 = O(e^{-4\pi\sigma(N+1)}), t \in [0, T]. \tag{8.74}$$

作(8.66)和 $A\delta$ 的内积再取实部,得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|A^{\frac{1}{2}}\delta\|^2 &= a_0\|A^{\frac{1}{2}}\delta\|^2 - a_1\|A\delta\|^2 + \mathrm{Re}(P_N[\alpha_2\\ &\cdot(|u|^2u - |y|^2y) + \alpha_3(|u|^2u_x - |y|^2y_x) + \alpha_4(u^2\overline{u}_x\\ &- y^2\overline{y}_x) + \alpha_5(|u|^4u - |y|^4y)], A\delta).\end{aligned} \tag{8.75}$$

在类似的几步估计之后,得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|A^{\frac{1}{2}}\delta\|^2 &\leqslant c_{14}(\|q\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}q\|^2 + \|\delta\|^2)\\ &+ c_{15}\|A^{\frac{1}{2}}\delta\|^2,\end{aligned} \tag{8.76}$$

其中 c_{14}, c_{15}, 为正常数, 仅依赖于 α_j, 由 Gronwall 不等式, 由(8.64),(8.73)得(8.74). 于是我们完成了(8.65)的证明. 由(8.60),(8.64),(8.65)推出(8.58).

这就证明了(ⅰ),(ⅱ)的证明是类似于上面的. 由定理 8.5, $u(t) \in G_\mu, t \geqslant 0$,对 $\mu(\alpha_j, \|u_0\| G_\lambda) > 0$. 我们仅需将上面的证明 σ 换成 μ,此时,μ、k, $k_8, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}$,均依赖于 u_0,因而 c_7

也依赖于 u_0.

这就完成了定理 8.3 的证明.

现估计 u 适应的误差,$u_0 \in H^1_{\text{per}}$.

定理 8.4 设 $a_1 > 0 > a_5$, $-4a_1a_5 > (b_3 - b_4)^2$, $a_j + ib_j = \alpha_j$,设满足周期条件,$L = 1$, $u_0 \in H^1_{\text{per}}$,用 u 适应表示适应方法的近似解,则存在正数 $c_{16}(\alpha_j, \| u_0 \| H^1_{\text{per}}, T)$ 和 $c_{17}(\alpha_j, \| u_0 \|_{H^1_{\text{per}}}, T)$ 使得

$$\| u - u_N \| \leqslant \frac{c_{16}(\alpha_j, \| u_0 \|_{H^1_{\text{per}}}, T)}{N}, t \in [0, T_*], \tag{8.77}$$

$$\| u - u_N \| \leqslant c_{17}(\alpha_j, \| u_0 \|_{H^1_{\text{per}}}, T)\left[\frac{1}{N} + e^{-2\pi\sigma(M+1)}\right], \tag{8.78}$$
$$t \in [T_*, T],$$

其中 $\sigma(\alpha_j) > 0$.

证 从(8.8),对 $t \geqslant 0$ 有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} | n |^2 | u_n(t) |^2 \leqslant K_3^2(\| u_0 \|_{H^1_{\text{per}}}, \alpha_j), \tag{8.79}$$

特别有

$$\| q \|_{H^1}^2 = \sum_{|n| \geqslant N+1} | u_n |^2 \leqslant \frac{K_3^2}{(N+1)^2}, \forall t \geqslant 0. \tag{8.80}$$

因此,从(8.60),(8.72),(8.80)和 Gronwall 不等式得

$$\| \delta(t) \|^2 \leqslant c_{18} \frac{K_3^2}{(N+1)^2}[e^{c_{12}t} - 1]. \tag{8.81}$$

于是

$$\| u(t) - u_N(t) \| \leqslant \| \delta \| + \| q \| \leqslant \frac{c_{19}}{N+1}, \tag{8.82}$$

其中 $c_{18} > 0$, $c_{19} > 0$ 依赖于 α_j, u_0, T.

在$[T_*, T]$上,从(8.60),(8.64)和(8.72)有

$$\| u - u_M \| \leqslant \| \delta \| + \| q \|, \tag{8.83}$$

$$\| q \|^2 \leqslant \| q \|_{H^1}^2 \leqslant K^2 e^{-4\pi\sigma(M+1)}, \tag{8.84}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| \delta \|^2 \leqslant c_{20} \| \delta \|^2 + c_{21} \| q \|^2, \tag{8.85}$$

这里 $c_{20}>0, c_{21}>0$ 依赖于 u_0. 解(8.85) 具初值 $\delta(T_*)$,得

$$\|\delta(t)\|^2 \leqslant e^{c_{10}(t-T_*)}\|\delta(T_*)\|^2 + c_{21}e^{c_{20}t}\int_{T^*}^{t} e^{-c_{20}s}\|q(s)\|^2 ds. \tag{8.86}$$

由(8.84),

$$\|\delta(t)\|^2 \leqslant e^{c_{20}(T-T_*)}\|\delta(T_*)\|^2 + c_{21}e^{c_{20}T}\frac{1}{c_{20}} \cdot (e^{-c_{20}T_*} - e^{-c_{20}t})K_8^2 e^{-4\pi\sigma(M+1)} \leqslant c_{22}\left(\frac{1}{N^2} + e^{-4\pi\sigma(M+1)}\right), \tag{8.87}$$

其中最后一步用到了

$$\begin{aligned}\delta(T_*) &= P_M u(T_*) - u_M(T_*) \\ &= P_M u(T_*) - P_M u_N(T_*) + P_M u_N(T_*) - u_n(T_*) \\ &= P_M u(T_*) - P_M u_N(T_*).\end{aligned} \tag{8.88}$$

因此可得

$$\|\delta(T_*)\| \leqslant \|P_M u(T_*) - u_M(T_*)\| \leqslant \frac{c_{23}}{N}. \tag{8.89}$$

注意到 $c_{22}>0, c_{23}>0$,依赖于 α_j, u_0 和 T. 因此由(8.83),(8.84)和(8.87) 可得(8.78). 定理 8.4 证毕.

§9 广义 Ginzburg-Landau 方程的决定结点

考虑如下广义 GL 方程.

$$\partial_t u + \nu u_x = \chi u + (\gamma_r + i\gamma_i)u_{xx} - (\beta_r + i\beta_i)|u|^2 u - (\delta_r + i\delta_i)|u|^4 u - (\lambda_r + i\lambda_i)|u|^2 u_x - (\mu_r + i\mu_i)u^2\overline{u}_x, \tag{9.1}$$

其中 γ_r, δ_r 为正常数, $\nu, \chi, \gamma_i, \beta_r, \beta_i, \delta_i, \lambda_r . \lambda_i, \mu_r, \mu_i$ 均为实常数,考虑周期边界条件

$$u(x,t) = u(x+1,t), x \in R, t>0 \tag{9.2}$$

和初始条件

$$u(x,v) = u_0(x), x \in R. \tag{9.3}$$

这一节我们寻求点集使它能完全决定问题(9.1)—(9.3)解的长时间行态,即称有限集 $E \subset [0,1]$ 是一个决定结点集,如果

$$\lim_{t\to\infty} | u_1(x,t) - u_2(x,t) | = 0, x \in E, \tag{9.4}$$

则有

$$\lim_{t\to\infty} | u_1(x,t) - u_2(x,t) | = 0, x \in R, \tag{9.5}$$

其中 u_1, u_2 为任意二个解.

为此,引入 $H = L^2_{\text{per}}[0,1] = \{u \in L^2[0,1], u(x+1) = u(x)\}, V_1 = H^1_{\text{per}}[0,1] = \{u : u \in H, u_x \in H\}$.

定理 9.1 设满足条件

$$\gamma_r, \delta_r > 0, 4\delta_r\gamma_r > (\lambda_i - \mu_i)^2, \tag{9.6}$$

$u_0 \in V_1$,则存在正常数 α_1,它仅依赖于方程(9.1)的系数,使得如 $x_1 < x_2$,则 $\mathrm{d} = x_2 - x_1 < \alpha_1, \gamma_r > 2\mathrm{d}^2\beta_1$($\beta_1$ 证明中可见).且

$$\lim_{t\to\infty} | u_1(x_i,t) - u(x_i,t) | = 0, i = 1,2, \tag{9.7}$$

其中 u_1, u_2 为二个解,则

$$\lim_{t\to\infty} | u_1(x,t) - u_2(x,t) | = 0, \forall x \in R. \tag{9.8}$$

为证明定理需要如下引理:

引理 9.2 令 $\Omega' = [x_1, x_2], u \in c^1(\Omega', c)$,则对 $d = x_2 - x_1$,有

$$| u |^2_{0,\Omega'} \leqslant 2 | u(x_1) |^2 + 2d^2 | u_x |^2_{0,\Omega'}. \tag{9.9}$$

引理 9.3 如非负可微函数 f 满足

$$f'(t) + \alpha f(t) \leqslant g(t), \tag{9.10}$$

其中 $\alpha > 0, \lim_{t\to\infty} g(t) = 0$,则有

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = 0. \tag{9.11}$$

这是 Gronwall 引理的特殊情况,引理 9.2 是显然的.

定理 9.1 的证明,令 $w = u_2 - u_1$,则 w 满足

$$w_t + \nu w_x = \chi w + (\gamma_r + i\gamma_i) w_{xx} - (\beta_r + i\beta_i)(| u_2 |^2 u_2 - | u_1 |^2 u_1) - (\delta_r + i\delta_i)(| u_2 |^4 u_2 - | u_1 |^4 u_1)$$

$$
\begin{aligned}
&-(\lambda_r + i\lambda_i)(|u_2|^2 u_{2x} - |u_1|^2 u_{1x}) \\
&-(\mu_r + i\mu_i)(u_2^2\overline{u}_{2x} - u_1^2\overline{u}_{1x}).
\end{aligned} \tag{9.12}
$$

乘(9.12)以$\overline{w}$,在$\Omega' = [x_1, x_2]$上积分,再取实部得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega'}|v|^2\mathrm{d}x + \gamma_r\int_{\Omega'}|w_x|^2\mathrm{d}x - \mathrm{Re}[(\gamma_r \\
&+ i\gamma_i)w_x\overline{w}]_{x_1}^{x_2} - \chi\int_{\Omega'}|w|^2\mathrm{d}x + \frac{\nu}{2}(|w(x_2)|^2 \\
&-|w(x_1)|^2) = \mathrm{Re}((F(u_2) - F(u_1)), w),
\end{aligned} \tag{9.13}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
F(u) = &-(\beta_\gamma + i\beta_i)|u|^2 u - (\delta_r + i\delta_i)|u|^4 u \\
&-(\lambda_r + i\lambda_i)|u|^2 u_x - (\mu_r + i\mu_i)u^2\overline{u}_x.
\end{aligned} \tag{9.14}
$$

令$g_1(t) = \mathrm{Re}[(\gamma_r + i\gamma_i)w_x w]|_{x_1}^{x_2} - \frac{\nu}{2}(|w(x_2)|^2 - |w(x_1)|^2)$,由(9.7)有$g_1(t)\to 0, t\to\infty$.由前面已知结果,可知存在$T$,当$t\geqslant T$时,我们有

$$
|u_i|_\infty \leqslant \rho_1, \ |u_{ix}|_\infty \leqslant \rho_3, \quad i = 1,2,
$$

这里ρ_1, ρ_3仅依赖方程(9.1)的系数.于是当$t\geqslant T$时,

$$
\begin{aligned}
(F(u_2) - F(u_1), w) \leqslant &|\beta_r|\rho_1^2|w|_{0,\Omega'}^2 + 2\sqrt{\beta_r^2 + \beta_i^2}\,\rho_1^2|w|_{0,\Omega'}^2 \\
&+ 2\rho_1\rho_3|w|_{0,\Omega'}^2 + 4\sqrt{\delta_r^2 + \delta_i^2}\,\rho_1^4|w|_{0,\Omega'}^2 \\
&+ (\sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} + \sqrt{\mu_r^2 + \mu_i^2})\rho_1^2\int_{\Omega'}|w_x||w|\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

对于项$(\sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} + \sqrt{\mu_r^2 + \mu_i^2})\rho_1^2\int_{\Omega'}|w_x||w|\mathrm{d}x$,用Young不等式可得该项$\leqslant \frac{\gamma_r}{2}|w_x|_{0,\Omega'}^2 + \frac{P^2}{2\gamma_r}|w|_{0,\Omega'}^2$,其中$P = (\sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} + \sqrt{\mu_r^2 + \mu_i^2})\rho_1^2$,于是(9.13)变为

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|w|_{0,\Omega'}^2 + \gamma_r|w_x|_{0,\Omega'}^2 \leqslant 2(|\chi| + |\beta_r|\rho_1^2 + 2\sqrt{\beta_r^2 + \beta_i^2}\rho_1^2 \\
&+ 4\sqrt{\delta_r^2 + \delta_i^2}\,\rho_1^4 + \frac{P^2}{\gamma_r}2\rho_1\rho_3)|w|_{0,\Omega'}^2 + g_1(t),
\end{aligned} \tag{9.15}
$$

由引理9.2,可得

$$\gamma_r |w_x|_{0,\Omega'}^2 \geqslant \frac{\gamma_r}{2d^2}|w|_{0,\Omega'}^2 - \frac{\gamma_r}{2d}|w(x_1)|^2.$$

因此(9.15)变为

$$\frac{d}{dt}|w|_{0,\Omega'}^2 + (\frac{\gamma_r}{2d^2} - \beta_1)|w|_{0,\Omega'}^2 \leqslant g_1(t) + \frac{\gamma_r}{2d}|w(x_1)|^2,$$

其中

$$\beta_1 = 2(|\chi| + |\beta_r|\rho_1^2 + 2\sqrt{\beta_r^2 + \beta_i^2}\rho_1^2$$
$$+ 4\sqrt{\delta_r^2 + \delta_i^2}\rho_1^4 + \frac{P^2}{\gamma_r}2\rho_1\rho_3).$$

应用引理9.3,可得

$$\lim_{t\to\infty}|w|_{0,\Omega}^2 = 0.$$

为了证明 u_1, u_2 为点态逼近,我们需证

$$\lim_{t\to\infty}|w|_{L^\infty} = 0.$$

为此选取任意序列 $T < t_1 < t_2 < \cdots, t_i \to \infty, i \to \infty$. 由于整体吸引子 $\mathscr{A}$ 的紧性,存在 $\tilde{u}_1 = \tilde{u}_1(x,t) \in \mathscr{A}, \tilde{u}_2 = \tilde{u}_2(x,t) \in \mathscr{A}$ 和子序列 $\{t_{n_k}\}_{k=1}^\infty$,使得

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty}|u_1(t_{n_k}) - \tilde{u}_1|_{L^\infty(\Omega')} = 0,\\
&\lim_{k\to\infty}|u_2(t_{n_k}) - \tilde{u}_2|_{L^\infty(\Omega')} = 0,
\end{aligned} \tag{9.16}$$

因此 $\tilde{w} = \tilde{u}_2 - \tilde{u}_1$,

$$\lim_{k\to\infty}|w(t_{n_k}) - \tilde{w}|_{L^\infty(\Omega')} = 0. \tag{9.17}$$

由(9.16),$\tilde{w} = 0$,几乎处处在 Ω' 上成立. 因此 $\tilde{w} = 0$ 在 Ω' 上.

因 $\tilde{w} = 0$ 是连续的,但实际上 $\tilde{w} = 0$ 在Gevrey类,因此它是对 x 的实解析的,从实解析函数的连续性,推得 $\tilde{w} = 0, x \in R$. 从(9.17)有

$$\lim_{k\to\infty}|w(t_{n_k})|_{L^\infty} = 0.$$

因 $\{t_{n_k}\}$ 是任意的,可得

$$\lim_{t\to\infty}|w(t)|_{L^\infty} = 0.$$

这就完成了定理9.1的证明.

下面考虑(9.1)定常解的集合,表示 $S(\text{coeff})$.

定理 9.4 设条件(9.6)满足,则存在正常数 α_2,仅依赖于(9.1)的系数,具有如下性质:令 $x_1 < x_2$,其中 $\mathrm{d} = x_2 - x_1 < \alpha_2$, $u_1, u_2 \in S(\text{coeff})$,令 $w = u_1 - u_2$,如果函数 $\mathrm{Re}w, \mathrm{Im}w$ 之一至少有二个零点在 $\Omega' = [x_1, x_2]$ 上,则 $w = 0$,即 $u_1 = u_2$.

首先我们需要如下类型的 Poincaré 不等式.

定理 9.5 令 $\Omega' = [x_1, x_2]$, $d = x_2 - x_1$. (i) $w \in C^1(\Omega', \mathbb{C})$. $y_1, y_2 \in \Omega'$,则

$$|w|_{\infty,\Omega'} \leqslant |\mathrm{Re}w(y_1) + i\,\mathrm{Im}w(y_2)| + \mathrm{d}\,|w_x|_{\infty,\Omega'}.$$

(ii) $w \in c^2(\Omega', \mathbb{C})$,设函数 $\mathrm{Re}w, \mathrm{Im}w$ 之一至少有二个零点在 Ω' 上,则

$$|w_x|_{\infty,\Omega'} \leqslant d\,|w_{xx}|_{L^\infty(\Omega')},\quad |w|_{\infty,\Omega'} \leqslant \mathrm{d}^2\,|w_{xx}|_{L^\infty(\Omega')}.$$

引理 9.6 如条件(9.6)满足, $u \in S(\text{coeff})$,则我们有 $|u|_{L^\infty} \leqslant \bar{\rho}_1$, $|u_x|_{L^\infty} \leqslant \bar{\rho}_3$,其中 $\bar{\rho}_1^2 = (1 + \sqrt{a}\,\alpha^{-\frac{1}{2}})a$, $\bar{\rho}_3 = \alpha^{-\frac{1}{2}} a K_1^{\frac{1}{2}}(1 + \frac{a^2}{\alpha})$, K_1 为某正常数.

证 作(9.1)和 $\bar{u}$ 的内积,取实部可得

$$\begin{aligned}
&\nu \mathrm{Re}\int_0^1 u_x \bar{u}\,\mathrm{d}x + \beta_r \int_0^1 |u|^4 \mathrm{d}x + \delta_r \int_0^1 |u|^6 \mathrm{d}x - \chi |u|_0^2 \\
&\quad + \gamma_r |u_x|_0^2 - (\lambda_r + \mu_r)\mathrm{Re}\int_0^1 |u|^2 u_x \bar{u}\,\mathrm{d}x \\
&\quad - (\lambda_i - \mu_i)\mathrm{Im}\int_0^1 |u|^2 u_x \bar{u}\,\mathrm{d}x = 0,
\end{aligned}$$

因

$$\mathrm{Re}\int_0^1 u_x \bar{u}\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$\mathrm{Re}\int_0^1 |u|^2 u_x \bar{u}\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$\begin{aligned}
(\lambda_i - \mu_i)\mathrm{Im}\int_0^1 |u|^2 u_x \bar{u}\,\mathrm{d}x &\leqslant |\lambda_i - \mu_i| \int_0^1 |u|^3 |u_x|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant a_1 b_1 |u_x|_0 \left(\int_0^1 |u|^6 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{a_1^2}{2}\int_0^1 |u|^6 \mathrm{d}x + \frac{b_1^2}{2}|u_x|_0^2,$$

其中 $a_1 b_1 = |\lambda_i - \mu_i|$，由条件(9.6)，能选取 a_1, b_1 使得

$$\alpha = 2\gamma_1 - b_1^2 > 0, \beta = 2\delta_r - a_1^2 > 0,$$

则有

$$\alpha |u_x|_0^2 + \beta\int_0^1 |u|^6 \mathrm{d}x + 2\beta_r\int_0^1 |u|^4 \mathrm{d}x - 2\chi |u|_0^2 \leqslant 0.$$

由设 $\chi > 0$，有

$$\alpha |u_x|_0^2 \leqslant -\beta\int_0^1 \left(|u|^3 + \frac{\beta_r - 1}{\beta}|u|\right)^2 \mathrm{d}x - 2\int_0^1 |u|^4 \mathrm{d}x + 2\chi |u|_0^2 + \frac{(\beta_r - 1)^2}{\beta}|u|_0^2,$$

$$2(|u|_0^2)^2 \leqslant 2\int_0^1 |u|^4 \mathrm{d}x \leqslant \left(2\chi + \frac{(\beta_r - 1)^2}{\beta}\right)|u|_0^2 - \alpha |u_x|_0^2.$$

因此 $|u|_0 \leqslant \sqrt{a}, a = \frac{1}{2}\left(2\chi + \frac{(\beta_r - 1)}{\beta}\right)$，

$$\int_0^1 |u|^4 \mathrm{d}x \leqslant a^2, |u_x|_0^2 \leqslant \frac{a^2}{\alpha}, |u|_{C^\infty} \leqslant \bar{\rho}_1.$$

再作(9.1)和 u_{xx} 的内积，取实部可得估计

$$|u_{xx}|_0^2 \leqslant K_1(1 + |u_x|_0^2)^2.$$

因此 $|u_{xx}|_0^2 \leqslant K_1(1 + \frac{a^2}{\alpha})^2, |u_x|_{L^\infty} \leqslant \bar{\rho}_3$.

现证定理9.4，如同前面所做估计有

$$|w_{xx}|_{\infty,\Omega'} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + \gamma_i^2}}(|v||w_x|_{\infty,\Omega'} + \chi |w|_{\infty,\Omega'} + 2\sqrt{\beta_r^2 + \beta_i^2}\bar{\rho}_1^2 |w|_{\infty,\Omega'} + 4\sqrt{\delta_r^2 + \delta_i^2}\bar{\rho}_1^4 |w|_{\infty,\Omega'}(\sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} + \sqrt{\mu_r^2 + \mu_i^2}) \cdot (\bar{\rho}_1^2 |w_x|_{\infty,\Omega'} + 2\bar{\rho}_1\bar{\rho}_3 |w|_{\infty,\Omega'})),$$

由引理5，得

$$|w_{xx}|_{\infty,\Omega'} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\gamma_\gamma^2 + r_i^2}}(|v| d + \chi d^2 + 2\sqrt{\beta_r^2 + \beta_i^2}\bar{\rho}_1^2 d^2 + 4\sqrt{\delta_r^2 + \delta_i^2}\bar{\rho}_1^4 d^2 + (\sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}$$

$$+\sqrt{\mu_r^2+\mu_i^2})(\bar{\rho}_1^2 d + 2\,\bar{\rho}_1\bar{\rho}_3 d^2)\ |\ w_{xx}\ |_{\infty,\Omega'}.$$

由上面不等式,可知存在 α_2 仅依赖于方程(9.1)的系数,使当 $d<\alpha_2$ 时,$|\ w_{xx}\ |_{\infty,\Omega'}=0$,则 $w_{xx}=0, x\in\Omega'$. 因 $\mathrm{Re}w_{xx}$ 和 $\mathrm{Im}w_{xx}$ 是实解析的,$w_{xx}=0, x\in R$. 但函数 $\mathrm{Re}w_x, \mathrm{Im}w_x$ 和 $\mathrm{Re}w, \mathrm{Im}w$ 具有零点,因此 $w=0$. 由此完成了定理 9.4 的证明.

定理 9.7 $u\in S(\mathrm{coeff}), p\in\mathbb{C}$. 设存在区间 $I=[x_1,x_2]$,其长度不超过 α_2,使得函数 $\mathrm{Re}(u(x)-p), \mathrm{Im}(u(x)-p)$ 在 I 上至少有三个零点,则 u 是一个常数. 且当 $\beta_i\neq 0, \delta_i\neq 0$ 时,$u\equiv 0$.

证 设 $u\in S(\mathrm{coeff})$ 为非常数函数,它在区间 I 上有如上性质,因 $\mathrm{Re}u$ 和 $\mathrm{Im}u$ 为实解析的,存在数

$$x_1\leqslant y_1<y_2<y_3\leqslant x_2,$$
$$x_1\leqslant z_1<z_2<z_3\leqslant x_2,$$

使得 y_1、y_2、y_3 为函数 $\mathrm{Re}(u-p)$ 在 $[y_1,y_2]$ 上的所有零点,而 z_1, z_2, z_3 为 $\mathrm{Im}(u-p)$ 在 $[z_1,z_3]$ 上的所有零点,选取正数

$$\varepsilon<\min(y_2-y_1, y_3-y_2, z_2-z_1, z_3-z_2), \tag{9.18}$$

考虑二个定态解 $u_1(x)=u(x), u_2(x)=u(x-\varepsilon), x\in R$,令 $v=u_1-u_2$. 我们证明 u_1 和 u_2 满足定理 9.4 在 (x_1,x_2) 上的假设. 令 $i\in\{1,2\}, v_1=\mathrm{Re}v$,计算 $v_1(y_i+\varepsilon)=\mathrm{Re}u(y_i+\varepsilon)-\mathrm{Re}u(y_i)=\mathrm{Re}u(y_i+\varepsilon)-\mathrm{Re}p$,

$$\begin{aligned}v_1(y_{i+1})&=\mathrm{Re}u(y_{i+1})-\mathrm{Re}u(y_{i+1}-\varepsilon)\\&=\mathrm{Re}p-\mathrm{Re}u(y_{i+1}-\varepsilon),\end{aligned}$$

因 $\mathrm{Re}(u-p)$ 在 (y_i,y_{i+1}) 上没有零点,我们有

$$v_1(y_i+\varepsilon)v_1(y_{i+1})<0.$$

这就推出 v_1 在 $(y_i+\varepsilon, y_{i+1})$ 有一个零点,推之,v_1 在 (x_1,x_2) 上至少有二个零点,类似原理对 $v_2=\mathrm{Im}v$ 是相同的. 由定理 9.4, $u(x)=u(x-\varepsilon), x\in R, \forall\varepsilon$ 满足(9.18).

因此 u 是一个常数当 $\beta_i\neq 0, \delta_i\neq 0$ 时,方程(9.1)仅有零解. 定理得证.

设 $\{u\}=\{u(x): x\in[0,1]\}\subset\mathbb{C}$,则对任何 $p\notin\{u\}$ 能定

义闭的可微的环绕 p 的路径 $u:[0,1]\to \mathbb{C}$ 的指标

$$\mathrm{Ind}_p(u)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{u'(t)}{u(t)-p}dt.$$

推论 9.8 设 $u\in S(\mathrm{coeff})$, $p\in \mathbb{C}$，则

(i) 如 $p\notin \{u\}$, $|\mathrm{Ind}_p(u)|\leqslant 2[\frac{1}{\alpha_2}]+2$;

(ii) 如 $p\in \{u\}$, u 不是一个常数函数，则函数 $u-p$ 在 $[0,1]$ 上至多有 $2\left[\frac{1}{\alpha_2}\right]+2$ 个零点.

以下考虑定态解集合 $S(\mathrm{coeff})$ 的分形维数.

定理 9.9 设 (E,d) 为度量空间，$Y\subset E$,，且设对某个 $k\in N$，存在一个有界映照 $\phi: Y\to R^k$ 使得

$$|\phi(y_1)-\phi(y_2)|\geqslant cd(y_1,y_2), y_1,y_2\in Y, \tag{9.19}$$

对某个正常数 c 成立，则 $d_F(Y)\leqslant k$，这里 $d_F(Y)$ 为分形维数.

证 见[T].

我们应用这个引理，$E=[0,1]$, $Y=S(\mathrm{coeff})$, $k=4$，映照为 $\phi: S(\mathrm{coeff})\to \mathbb{C}^2$ 定义为

$$\phi(u)=(u(0),u(\alpha_2)), \tag{9.20}$$

其中 α_2 为定理 9.4 给定，这个映照显然是有界的，我们仅需验证 (9.19).

对任何 $\varepsilon>0$，取 $u_1,u_2\in S(\mathrm{coeff})$，设 $w=u_1-u_2$ 满足

$$|w(0)|<\varepsilon, |w(\frac{\alpha_2}{2})|<\varepsilon. \tag{9.21}$$

我们要找到一个常数 $D=D(\mathrm{coeff})$ 使得由(9.21)推出

$$|w|_\infty\leqslant D\varepsilon. \tag{9.22}$$

(9.22) 的证明分两步.

第一步，估计 $w_x(0)$，注意到如 $\Omega'\subset R$ 为任何区间，其长不超过 $d=\alpha_2$，由 Lagrange 定理我们有，存在 $y_1,y_2\in\Omega'$，使得

$$|\mathrm{Re}w_x(y_1)|<\frac{2\varepsilon}{d}, |\mathrm{Im}w_x(y_2)|<\frac{2\varepsilon}{d}. \tag{9.23}$$

由定理 9.4 的证明，定理 9.5 和(9.23)得

$$|w_{xx}|_{\infty,\Omega'} \leqslant \frac{4\varepsilon}{d} + \frac{1}{4d^2}|w|_{\infty,\Omega'}. \qquad (9.24)$$

令 $\Omega' = [0,d]$,由定理 9.5(i) 和(9.24) 有

$$\begin{aligned}|w|_{\infty,\Omega'} &\leqslant |w(0)| + d|w_x|_{\infty,\Omega'} \leqslant |w(0)| \\ &+ d(|\mathrm{Re}w_x(y)| + |\mathrm{Im}w_x(y_2)|) + d^2|w_{xx}|_{\infty,\Omega'} \\ &< \varepsilon + 4\varepsilon + 4d\varepsilon + \frac{1}{4}|w|_{\infty,\Omega'},\end{aligned}$$

因此

$$|w|_{\infty,\Omega'} \leqslant 16\varepsilon,\ |w_{xx}|_{\infty,\Omega'} \leqslant \frac{4\varepsilon}{d} + \frac{4\varepsilon}{d^2},$$

$$|w_x|_{\infty,\Omega'} \leqslant \frac{4\varepsilon}{d} + 4\varepsilon + \frac{4\varepsilon}{d} = 4\varepsilon + \frac{8\varepsilon}{d}.$$

由于 $|w(0)| < \varepsilon$, $\left|w\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)\right| < \varepsilon$,得 $|w_x(0)| < 4\varepsilon + \frac{8\varepsilon}{d}$.

第二步,设 $|w(x_0)| < \varepsilon_1$, $|w_x(x_0)| < \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_1}{d}$, $x_0 \in R$, $\varepsilon_1 > 0$,则

$$|w(x)| < 8\varepsilon_1,\ |w_x(x)| < 3\left(\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_1}{d}\right),$$

$$x \in [x_0, x_0 + d] = \Omega'.$$

这由定理 9.5 可得以上结果.

由第一步和第二步推出 $|w|_\infty < D\varepsilon$.

这就证明了(9.22).可得如下推论

定理 9.10 $d_F(S(\mathrm{coeff})) \leqslant 4$.

§10 三次非线性 Ginzburg-Landau 方程的动力系统结构及其数值分析

考虑如下三次非线性 GL 方程

$$u_t = c_0 u + (c_0 + i)u_{xx} - (c_0 - i)|u|^2 u. \qquad (10.1)$$

我们知道当 $c_0 \to \infty$ 时,它趋于Ragleish-Benard对流的

Newell-Whifehead 方程. 当 $c_0 = 0$ 时,(10.1) 为完全可积的三次非线性 Schrödinger 方程

$$iu_t + u_{xx} + |u|^2 u = 0. \tag{10.2}$$

方程(10.1) 具有行波解

$$u_s(x,t) = u_0 e^{i(kx+\omega t)}. \tag{10.3}$$

又得

$$\begin{cases} \omega_0 = \alpha |u_0|^2 - 1, \\ h_0^2 = 1 - |u_0|^2. \end{cases} \tag{10.4}$$

置 $u(x,t) = \overline{u(x,t)} e^{i(k_0 x + \omega_0 t)}$ 代入(10.1),则 $\overline{u(x,t)}$ 满足方程(仍记为 $u(x,t)$)为

$$u_t = \alpha u + \mu u_x + \beta u_{xx} - \gamma |u|^2 u, \tag{10.5}$$

其中 $\alpha = c_0 - i\omega_0 - k_0^2(c_0 + i)$, $\mu = 2k_0(c_0 + i)i$, $\beta = c_0 + i$, $\gamma = c_0 - i$. 显然 $u = u_0$ 为(10.5) 的一个临界点,其中参数 c_0, w_0, k_0 满足(10.4). 当 $u_0 = \pm 1$,此时行波解(10.3) 变为均匀解,为 Stokes 解.

现考虑(10.5) 解的稳定性,设

$$u(x,t) = u_0 + \delta u(x,t). \tag{10.6}$$

在临界点 u_0 处(线性化(10.5)),得

$$B\begin{bmatrix} \partial u \\ \partial u^* \end{bmatrix} = 0, \tag{10.7}$$

其中

$$L(|u_0|^2) = 2\gamma |u_0|^2, k(u_0) = \gamma u_0^2,$$

$$B = \begin{pmatrix} \partial t - \alpha - \mu\partial x - \beta\partial xx + L(|u_0|^2) & h(u_0) \\ k^*(u_0) & \partial t - \alpha^* - \mu^*\partial x - \beta^*\partial xx + L^*(|u_0|^2) \end{pmatrix}, \tag{10.8}$$

这里"$*$"表示复数共轭,引入方程(10.5) 临界点 u_0 处的小扰动,即(10.1) 的行波解(10.3) 可写为

$$u(x,t) = u_0 + \delta u_+ e^{i(qx+\Omega t)} + \delta u_- e^{-i(qx+\Omega^* t)}, \tag{10.9}$$

其中 $|\delta u_+|$、$|\delta u_-| \ll |u_0|$, q 为一实数.

将(10.9)代入(10.7)可得

$$\begin{cases} i\Omega - \alpha - \mu qi + \beta q^2 + 2\gamma \mid u_0 \mid^2 + \gamma u_0^2 \dfrac{\delta u_-}{\delta u_+} = 0, \\ i\Omega - \alpha^* - \mu^* qi + \beta^* q^2 + 2\gamma^* \mid u_0 \mid^2 + \gamma^* u_0^{*2} \dfrac{\delta u_+}{\delta u_-} = 0. \end{cases} \tag{10.10}$$

令 $A = -\alpha - \mu qi + \beta q^2 + 2\gamma \mid u_0 \mid^2$,由(10.10)可得如下色散关系

$$\Omega^2 - 2(i\mathrm{Re}A + q\mu^*)\Omega + \mid \gamma \mid^2 \mid u_0 \mid^4 - \mid A \mid^2 + 2A\mu^* qi = 0. \tag{10.11}$$

因

$$\begin{cases} \mathrm{Re}A = c_0(q^2 + 2k_0 q + \mid u_0 \mid^2), \\ \mathrm{Im}A = q^2 + 2k_0 q - \mid u_0 \mid^2, \end{cases} \tag{10.12}$$

解方程(10.11),利用(10.4)又可得

$$\Omega_{1,2} = c_0(q^2 + \mid u_0 \mid^2)i - 2k_0 q \pm i\sqrt{\Delta}, \tag{10.13}$$

其中

$$\Delta = (1 + c_0^2) \mid u_0 \mid^4 - (q^2 + 2k_0 q - \mid u_0 \mid^2)^2 + 4k_0 q(c_0 - i)[q^2 + 2k_0 q - \mid u_0 \mid^2 - k_0(c_0 - i)q]. \tag{10.14}$$

为了研究解的线性稳定性,我们必须研究根(10.13)的虚部,即在什么关系下,c_0,q 和 $\mid u_0 \mid$ 将使 Ω 的虚部为负的?

令 $\Delta = \Delta_r + i\Delta_i$,$\Omega = \Omega_r + i\rho$,则 Ω 的虚部满足

$$\begin{cases} \rho_\pm(c_0, q, \mid u_0 \mid) = c_0(q^2 + \mid u_0 \mid^2) \pm (\Delta_r^2 + \Delta_i^2)^{\frac{1}{4}} \cos\dfrac{\theta}{2}, \\ \Omega_{r\pm}(c_0, q, \mid u_0 \mid) = -2k_0 q \pm (\Delta_r^2 + \Delta_i^2)^{\frac{1}{4}} \sqrt{1 - \sin^2\dfrac{\theta}{2}}, \end{cases} \tag{10.15}$$

其中 $\theta = \arctan\dfrac{\Delta_i}{\Delta_r}$,且

$$\Delta_r = (1 + c_0^2) \mid u_0 \mid^4 - (q^2 + 2k_0 q - \mid u_0 \mid^2)^2 + 4k_0 q[c_0(q^2 + 2k_0 q - \mid u_0 \mid^2 - k_0 c_0 q) + k_0 q],$$

$$\Delta_i = 4k_0 q(2c_0 k_0 q - q^2 - 2k_0 q + \mid u_0 \mid^2).$$

因 $\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{\Delta_r+\sqrt{\Delta_r^2+\Delta_i^2}}{2\sqrt{\Delta_r^2+\Delta_i^2}}}$，由(10.15)可得

$$\rho_{\pm}(c_0,q,|u_0|)=c_0(q^2+|u_0|^2)\pm\sqrt{\frac{\sqrt{\Delta_r^2+\Delta_i^2}+\Delta_r}{2}},$$

$$\Omega_{\pm}(c_0,q,|u_0|)=-2k_0q\pm\sqrt{\frac{\sqrt{\Delta_r^2+\Delta_i^2}-\Delta_r}{2}}. \quad (10.16)$$

如 $\rho_->0$ 若 $\rho_+>0$ 则 u_s 是稳定的，否则，它是线性不稳定的，由(10.16)可分析 $\rho_{\pm}$ 的符号. 为简单起见，取 $k_0=0, u_s=e^{it}$ 为 Stokes 解，$|u_0|=1, \Delta_i=0$，则(10.16)可写为

$$\begin{cases}\rho_{\pm}(c_0,q,1)=c_0(1+q^2)\pm\sqrt{(\Delta_r+|\Delta_r|)/2},\\ \Omega_{\pm}(c_0,q,1)=\pm\sqrt{(|\Delta_r|-\Delta_r)/2},\end{cases} \quad (10.17)$$

这里 $\Delta_r=(1+c_0^2)-(q^2-1)^2$，令 $q_*=\sqrt{1+\sqrt{1+c_2^0}}$，则 q_* 为 $\Delta_r=0$ 的根.

(Ⅰ)如 $|q|\geqslant q_*$，则 $\Delta_r\leqslant 0$，此时(10.17)为

$$\begin{cases}\rho_{\pm}(c_0,q,1)=c_0(1+q^2),\\ \Omega_{\pm}(c_0,q,1)=\pm\sqrt{-\Delta_r}.\end{cases} \quad (10.18)$$

这是清楚的，即 Stokes 解是稳定的，存在振荡现象.

(Ⅱ)如 $|q|\leqslant q_*$，则 $\Delta_r>0$，此时(10.17)变为

$$\begin{cases}\rho_{\pm}(c_0,q,1)=c_0(1+q^2)\pm\sqrt{(1+c_0)-(q^2-1)^2},\\ \Omega_{r\pm}(c_0,q,|u_0|)=0.\end{cases} \quad (10.19)$$

图 10.1 表明对于 $k_0, c_0=0.25$ 的色散关系.

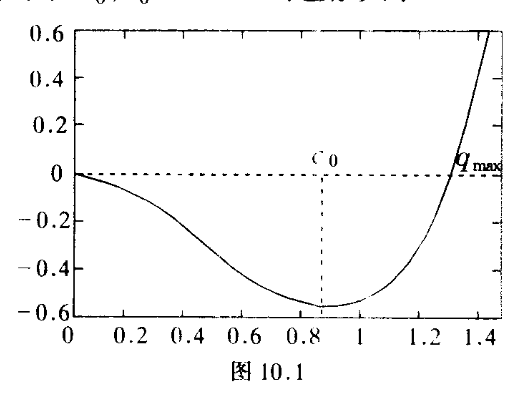


图 10.1

设 ρ 为非负数,则由图 10.1 可知存在 $\rho_- = 0$ 的最大根 $q_{\max}$,事实上,

$$q_{\max} = \sqrt{\frac{2(1-c_0^2)}{1+c_0^2}},$$

则 $\rho_-(c_0, q_{\max}, 1) = 0$,当 $q > q_{\max}$,$\rho_+ > \rho_- > 0$,则由(10.9)知,当 $u_0 \neq 0$ 时,对应于(10.5)的渐近稳定不动点,即(10.1)的行波 u_s 有

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_0 + \delta u_+ e^{i(qx+\Omega t)} + \delta u_- e^{-i(qx+\Omega^* t)} \\ &\to u_0, \quad t \to \infty. \end{aligned}$$

当 $0 < q < q_*$ 时,$\rho_-(c_0, q, 1) < 0$,ρ 称为调制不稳定的线性增长率.因此由(10.9)可知,$u_0 \neq 0$ 对应于双曲点.

为了进行数值方法模拟,考虑 q_0 使得 $\rho_-(c_0, q_0, 1)$ 取极小,则 q_0 对应于最大不稳定的波数.

当 $q < q_* = \sqrt{1+\sqrt{1+c_0^2}}$ 时,则 $\rho_+(c_0, q, 1) > 0$,置 $q_0 = \sqrt{1-c_0}$,则 $\rho_-(c_0, q_0, 1)$ 在 $q = q_0$ 取极小,即

$$\min_{0<q<q_{\max}} \rho_\pm(c_0, q, 1) = \rho_-(c_0, q_0, 1) = -(1-c_0)^2.$$

对于周期边界条件,(10.7)的特征函数可选为

$$\begin{bmatrix} \delta u \\ \delta u^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon e^{i\lambda t} \\ \varepsilon^* e^{-i\lambda t} \end{bmatrix} \cos(q_0 x), \tag{10.20}$$

其中 $\varepsilon, \varepsilon^*$ 为小参数,如考虑线性算子特征函数的最大振幅,它可表为

$$\begin{aligned} |\delta u(x-t)| &= |c_1 e^{-\rho_-(c_0, |u_0|, q_0)t} + c_2 e^{-\rho_+(c_0, |u_0|, q)t}| \\ &\quad \cdot |\cos(q_0 x)|, \end{aligned} \tag{10.21}$$

其中 c_1, c_2 为小实参数.(10.21)的第一项是主要项,因第二项当 $t \to \infty$ 时它趋于零.如我们构造相平面空间($|u(x,t)|, \partial_t |u(x,t)|$),则有

定理 10.1 在相平面($|u(x,t)|, \partial t|u(x,t)|$)上有

(Ⅰ)$c_0 = 0$,方程(10.1)退化为可积立方非线性 Schrödinger 方程,(ⅰ)当 $u_0 \neq 0$,对于行波解 u_s,($|u_s|$,0)为双曲点;(ⅱ)对

于行波解 0,(0,0) 为椭圆点.

(Ⅱ)$c_0 > 0$,则(ⅰ)当 $0 < q \leqslant q_{\max}$,$0 < c_0 \leqslant 1$ 时,对于行波解 u_s,($|u_s|$,0) 为双曲点;(ⅱ)当 $q_* > q > q_{\max}$ 时,对于行波解 u_s,($|u_s|$,0) 为渐近稳定点;(ⅲ)当 $q_* < q$ 时,对于行波解 u_s.($|u_s|$,0) 为渐近稳定点,但它存在着振荡.

我们用拟谱方法进行计算,取初值为

$$u_0(x,0) = u_s(x,0) + \varepsilon e^{i\theta}\cos(qx), \qquad (10.22)$$

其中 ε 为小实数,周期 $L = 2\pi/q_0$.

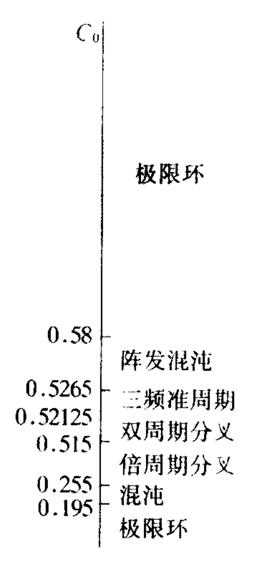
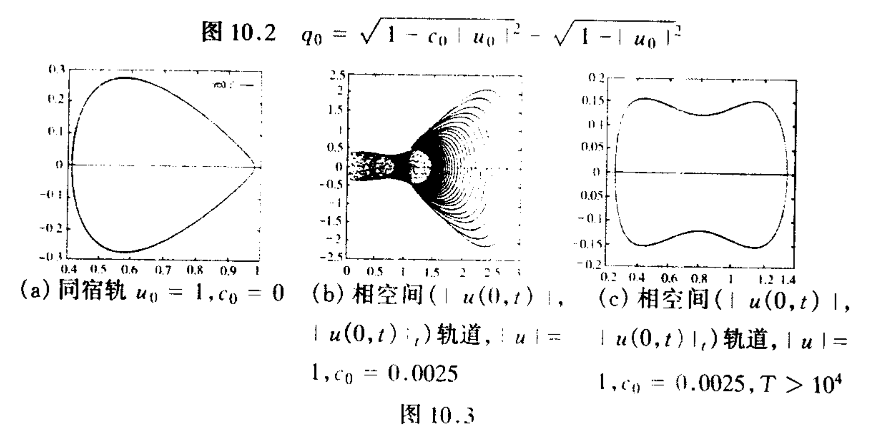
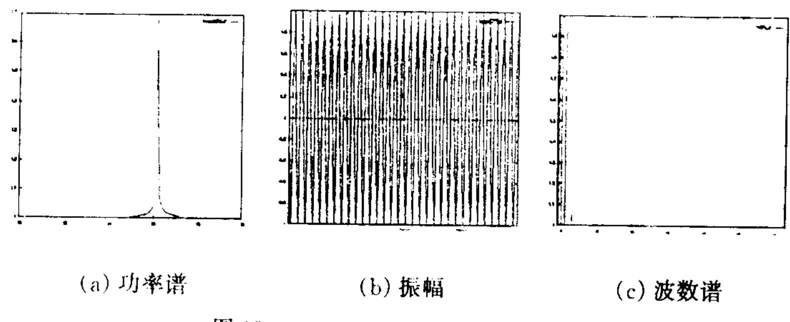


图 10.2　$q_0 = \sqrt{1 - c_0 |u_0|^2} - \sqrt{1 - |u_0|^2}$



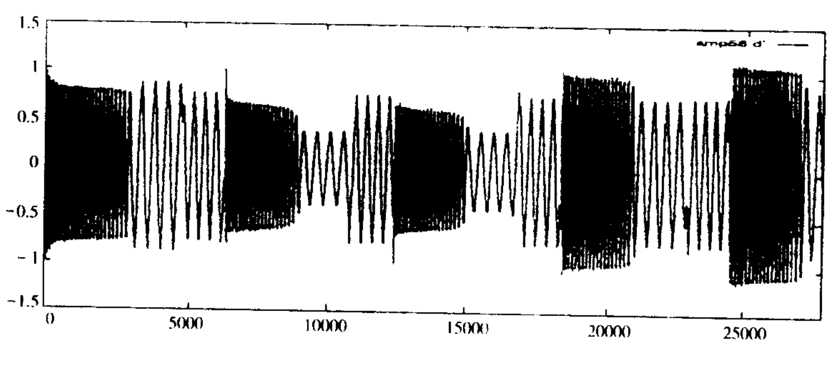
(a) 同宿轨 $u_0 = 1, c_0 = 0$　(b) 相空间($|u(0,t)|$, $|u(0,t)|_t$)轨道, $|u| = 1, c_0 = 0.0025$　(c) 相空间($|u(0,t)|$, $|u(0,t)|_t$)轨道, $|u| = 1, c_0 = 0.0025, T > 10^4$

图 10.3

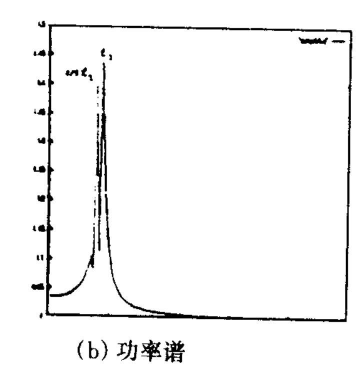


(a) 功率谱　　(b) 振幅　　(c) 波数谱

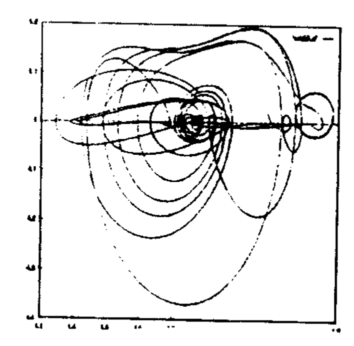
图 10.4　$0.5875 < C_0 < 1$　极限环



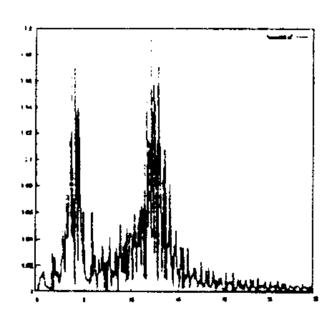
(a) 振幅 $0 < t < 2280$



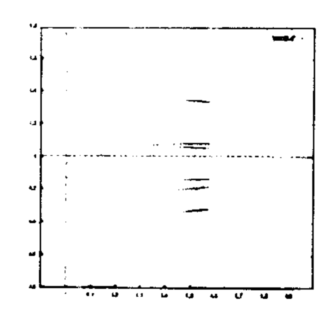
(b) 功率谱



(c) 在相空间$\left(u\left(\frac{L}{2},t\right),\frac{\partial}{\partial t}\left|u\left(\frac{L}{2},t\right)\right|\right)$轨道

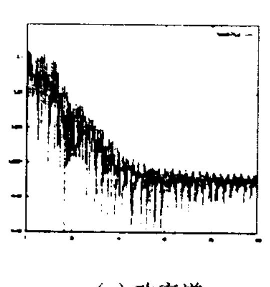


(d) Poincaré 截面

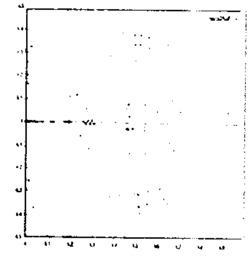


(e) 功率谱 $1208.6 < t < 2847$

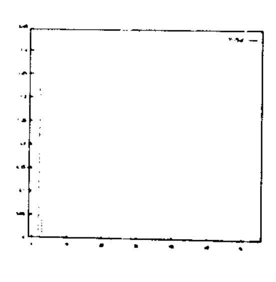
图 10.5　$c_0 = 0.58$，异宿轨，阵发现象



(a) 功率谱

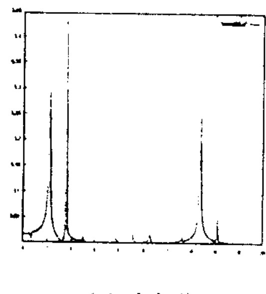


(b) Poincaré 截面

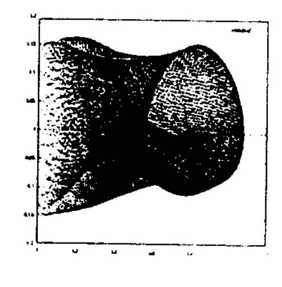


(c) 波数谱

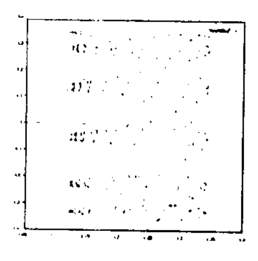
图 10.6(A)　$c_0 = 0.575$



(a) 功率谱

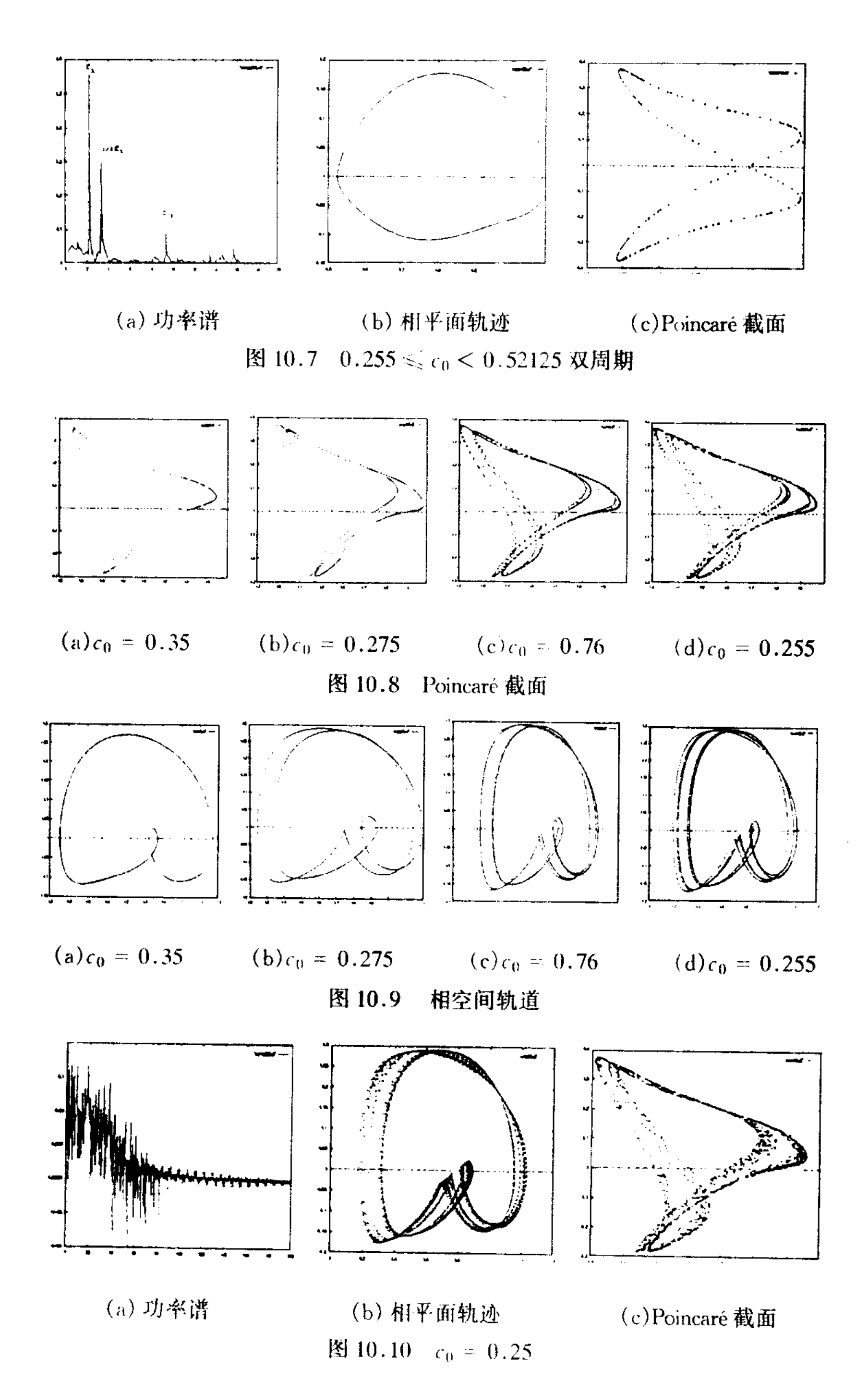


(b) 相平面轨道



(c) Poincaré 截面

图 10.6(B)



(a) 功率谱　　(b) 相平面轨迹　　(c)Poincaré 截面

图 10.7　$0.255 \leqslant c_0 < 0.52125$ 双周期

(a)$c_0 = 0.35$　　(b)$c_0 = 0.275$　　(c)$c_0 = 0.76$　　(d)$c_0 = 0.255$

图 10.8　Poincaré 截面

(a)$c_0 = 0.35$　　(b)$c_0 = 0.275$　　(c)$c_0 = 0.76$　　(d)$c_0 = 0.255$

图 10.9　相空间轨道

(a) 功率谱　　(b) 相平面轨迹　　(c)Poincaré 截面

图 10.10　$c_0 = 0.25$

对于 GL 方程(10.1)三次拟谱显式构式如下：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\tilde{u}_{Nj}^{n+1}-\tilde{u}_{Nj}^{n-1}}{2\Delta t}=\dfrac{c_0}{2}(\tilde{u}_{Nj}^{n+1}+\tilde{u}_{Nj}^{n-1})-\dfrac{(c_0+i)}{2}j^2q_0^2(\tilde{u}_{Nj}^{n+1}+\tilde{u}_{Nj}^{n-1}) \\
\qquad -(c_0-i)\{|u_N^n|^2u_N^n\}, \\
\dfrac{\tilde{u}_{Nj}^{1}-\tilde{u}_{Nj}^{0}}{\Delta t}=c_0\tilde{u}_{Nj}^0-(c_0+i)j^2q_0^2\tilde{u}_{N,j}^0-(c_0-i)\{|\tilde{u}_N|^2u_N^0\}_j, \\
\tilde{u}_{Nj}^0=k\sum\limits_{m=0}^{N-1}u_0(x_m)\exp(ijq_0x_m),\ j=0,1,2,\cdots,N.
\end{cases}
\tag{10.23}
$$

其中 $u_0(x)$ 为给定的值，$\tilde{u}_{Nj}^n$ 为 $u_N^n\in S_N$ 的第j 个离散 F 氏系数.

$$S_N=\operatorname{span}_{-\frac{N}{2}\leqslant j\leqslant\frac{N}{2}-1}\{\exp(ijq_0x)\}.$$

显然

$$\tilde{u}_{Nj}^n=(u,\exp(ijq_0x))_k=k\sum_{m=0}^{N-1}u_N^n(x_m)\exp(ijq_0x_m),$$

$$k=\frac{2\pi}{Nq_0},x_m=mk.$$

$u_N^n(x_m)$ 定义为

$$u_N^n(x_m)=\sum_{j=0}^{n-1}\tilde{u}_{Nj}^n\exp(ijq_0x_m).$$

令 $I_N:C^0(\ )\to S_N$ 为插值算子

$$I_NV(x)=\sum_{m=0}^{n-1}(v(x),\exp(imq_0x))k\exp(imq_0x).$$

定义 $L_p^2(\ )$ 内积$(\cdot,\cdot)$为

$$(u(x),v(x))=\int_0^{2\pi/q_0}u(x)v^*(x)\mathrm{d}x,$$

$$\|v(x)\|=\{(v(x),v(x)\}^{\frac{1}{2}}.$$

定义周期 Sobolev 空间 $H_p^s(\ )$,

$$\|v(x)\|_\sigma=\{\sum_{0\leqslant j\leqslant\sigma}\|\frac{\partial^j u}{\partial x^j}\|\}^{\frac{1}{2}}.$$

对于插值算子 I_N 具有如下性质.

引理 10.2 设 $v\in H_p^s(\ )$,则对任何 $0\leqslant\sigma<\mu\leqslant s$ 有

$$\| v - I_N v \|_\sigma \leqslant c N^{\sigma - \mu} \| v \|_\mu .$$

引理 10.3 对任何 $f, g \in C^0(\ )$，则

$$(f(x), g(x))_k = (I_N f(x), I_N g(x)).$$

定理 10.4 设(10.1)周期初值问题的解 $u \in C^3([0,T]; H_p^s(\ ))$，则存在常数 $c_j (j = 1,2,3)$，它与 $\Delta t, N$ 无关，当 $\Delta t < c_1, N > c_2$ 时，

$$\| u_N^m - u^n \| \leqslant c_3((\Delta t)^2 + N^{-s}).$$

证 (10.23)的第一个方程等价于

$$\left(\frac{u_N^{n+1} - u_N^{n-1}}{2\Delta t}, \exp(ijq_0 x)\right)_k = c_0\left(\frac{u_N^{n+1} + u_N^{n-1}}{2}, \exp(ijq_0 x)\right)_k$$
$$+ (c_0 + i)\left(\frac{(u_N^{n+1} + u_N^{n-1})_{xx}}{2}, \exp(ijq_0 x)\right)_k - (c_0 - i)$$
$$\cdot (f(|u_N^n|^2) u_N^n, \exp(ijq_0 x))_k,$$

其中 $f(s) = s$，由引理 10.3，对任何 $\phi \in S_N$ 有

$$\left(\frac{u_N^{n+1} - u_N^{n-1}}{2\Delta t}, \phi\right) = c_0\left(\frac{u_N^{n+1} + u_N^{n-1}}{2}, \phi\right) + (c_0 + i)$$
$$\cdot \left(\frac{(u_N^{n+1} + u_N^{n-1})_{xx}}{2}, \phi\right) - (c_0 - i)(I_N[f(|u_N^n|^2) u_N^n], \phi).$$

(10.24)

在方程(10.1)中离散 u_t 为$\dfrac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t}$，再作(10.1)与 $\phi \in S_N$ 在 L_p^2 作内积，再减去(10.24)，可得

$$\left(\frac{e_N^{n+1} - e^{n-1}}{2\Delta t}, \phi(x)\right) = c_0\left(\frac{e_N^{n+1} + e_N^{n-1}}{2}, \phi(x)\right) + (c_0 + i)$$
$$\cdot \left(\frac{(e_N^{n+1} + e_N^{n-1})_{xx}}{2}, \phi(x)\right) - (c_0 - i)(f(|u^n|^2) u^n$$
$$- I_N[f(|u_N|^2) u_N^n], \phi(x)) + (\tau^n(x), \phi(x)), \quad (10.25)$$

其中 $\tau^n(x)$ 为截断误差. $e^n = u^n - u_N^n$.

令 $\xi^n = u^n - P_N u^N, \eta^n = P_N u^n - u_N^n$，则 $e^n = \xi^n + \eta^n$，这里 P_N 表示正交投影：$L_P^2(\ ) \to S_N$. 易知

$$\| e^n \| \leqslant cN^{-s} + \| \eta^n \| . \tag{10.26}$$

由于正交性,有

$$(e^n, \phi(x)) = (\eta^n, \phi), (e_{xx}^n, \phi(x)) = -(\eta_x^n, \phi_x). \tag{10.27}$$

将(10.27)代入(10.25),取 $\phi = \eta^{n+1} + \eta^{n-1}$.(10.25)取实部得

$$\| \eta^n \|_{\hat{t}} = c_0 \| \eta^{n+1} + \eta^{n-1} \|^2 - \mathrm{Re}(c_0 - i)(f(|u^n|^2)u^n - I_N[f(|u_N^n|^2)u_N^n] + \tau^n, \eta^{n+1} + \eta^{n-1}), \tag{10.28}$$

这里

$$\| \eta^n \|_{\hat{t}} = \frac{\| \eta^{n+1} \|^2 - \| \eta^{n-1} \|^2}{2\Delta t}.$$

设 $f^*(z) \in C_0^s(\mathbb{C})$, $f^*(v(x,t))$ 满足

$$f^*(v(x,t)) = \begin{cases} f(|v(x,t)|), v(x,t) \in S_\varepsilon(u(x,t)), \\ \bar{f}(v(x,t)), v(x,t) \notin S_\varepsilon(u(x,t)), \end{cases} \tag{10.29}$$

这里 $S_\varepsilon(u(x,t))$ 表示方程(10.1)的解的 ε 邻域.

对特殊函数 f^* 在(10.28)中作估计

$$\begin{aligned}
&(f^*(u^n)u^n - I_N[f^*(u_N^n)u_N^n], \eta^{n+1} + \eta^{n-1}) \\
&= ([(E - I_N)(f^*(u^n)u^n)] + I_N(f^*(u^n)u^n - f^*(u_N^n)u_N^n)], \\
&\quad \cdot \eta^{n+1} + \eta^{n-1}) = ((E - I_N)(f^*(u^n)u^n) + I_N[(f^*(u^n) \\
&\quad - f^*(u_N^n))u^n] + I_N[f(u_N^n)e^n], \eta^{n+1} + \eta^{n-1}) \\
&\leqslant [\| u^n \|_\infty (\| \frac{\partial f^*}{\partial u} \|_\infty \| e^n \| + CN^{-s}) \\
&\quad + (\| f^*(u_N^n) \|_\infty \| e^n \| + CN^{-s})] \| \eta^{n+1} - \eta^{n-1} \| \\
&\leqslant c[N^{-2s} + \| \eta^{n-1} \|^2 + \| \eta^n \|^2 + \| \eta^{n+1} \|^2],
\end{aligned} \tag{10.30}$$

这里 E 为恒等算子.对于(10.28)最后一项有

$$(\tau^n, \eta^{n+1} + \eta^{n-1}) \leqslant c(\Delta t^4 + \| \eta^{n+1} \|^2 + \| \eta^{n-1} \|^2). \tag{10.31}$$

将(10.30)和(10.31)代入(10.28),得

$$\| \eta^n \|_{\hat{t}}^2 \leqslant c(N^{-2s} + \Delta t^4 + \| \eta^{n-1} \|^2 + \| \eta^n \|^2 + \| \eta^{n-1} \|^2). \tag{10.32}$$

用 Gronwall 不等式，当 Δt 充分小时，有

$$\|\eta^n\| \leqslant c(N^{-s} + (\Delta t)^2 + \|\eta^1\| + \|\eta^0\|). \tag{10.33}$$

由(10.23)式中第二个方程，类似上面证明可得

$$\|\eta^1\| \leqslant c(\Delta t^2 + N^{-s}). \tag{10.34}$$

联系(10.33)、(10.34)和(10.26)，定理对于 f^* 成立，易知对 f 也是成立的.

§11　三次一五次非线性 Ginzburg-Landau 方程的慢周期解

考虑如下的 Ginzburg-Landau 方程

$$w_t = c_0 w + (c_0 + i\varepsilon c_1) w_{xx} - \left(\frac{c_0}{2} + i\varepsilon c_2\right) |w|^2 w - \left(\frac{c_0}{2} + i\varepsilon c_3\right) \cdot |w|^4 w, \tag{11.1}$$

其中 $w(x,t)$ 为空间和时间 $(x,t) \in R \times R^+$ 的复值函数，c_0, c_1, c_2, c_3 为实常数，ε 为小参数. 当 $c_0 = 0$ 时，它为非线性 Schrödinger 方程

$$iw_t + \varepsilon c_1 w_{xx} - \varepsilon c_2 |w|^2 w - \varepsilon c_3 |w|^4 w = 0. \tag{11.2}$$

我们先看看(11.1)的周期解

$$w(x,t) = Re^{i(kx - \omega t)}. \tag{11.3}$$

将(11.3)代入(11.1)，分开实部、虚部可得

$$\begin{cases} R^4 + R^2 = 2(1 - k^2), \\ w = \varepsilon(c_1 k^2 + c_2 R^2 + c_3 R^4). \end{cases} \tag{11.4}$$

$w = 0$ 为定常解，$w \neq 0$ 存在慢振幅周期解，$w = O(\varepsilon)$.

为了对动力系统作进一步分析，令

$$w(x,t) = \rho(x) e^{i[\theta(x) - \varepsilon\omega t]}, \tag{11.5}$$

代入(11.1)，并乘两边以 $e^{-i[\theta(x) - \varepsilon\omega t]}$，得

$$-i\varepsilon\omega\rho = c_0\rho + (c_0 + i\varepsilon c_1)(\rho_{xx} + 2i\rho_x\theta_x + i\rho\theta_{xx} - \rho\theta_x^2)$$

$$-\left(\frac{1}{2}c_0 + i\varepsilon c_2\right)\rho^3 - \left(\frac{c_0}{2} + i\varepsilon c_3\right)\rho^5. \tag{11.6}$$

上式写成实部和虚部

$$\begin{cases} -\varepsilon\omega\rho = c_0(2\rho_x\theta_x + \rho\theta_{xx}) + \varepsilon c_1(\rho_{xx} - \rho\theta_x^2) - \varepsilon c_3\rho^3 - \varepsilon c_3\rho^5, \\ c_0\rho + c_0(\rho_{xx} - \rho\theta_x^2) - \varepsilon c_1(2\rho_x\theta_x + \rho\theta_{xx}) - \frac{c_0}{2}\rho^3 - \frac{c_0}{2}\rho^5 = 0. \end{cases} \tag{11.7}$$

由(11.7)可得

$$\begin{cases} 2\rho_x\theta_x + \rho\theta_{xx} = \frac{\varepsilon c_0\rho}{c_0^2 + \varepsilon^2 c_1^2}\left[(c_1 - \omega) + \left(c_2 - \frac{c_1}{2}\right)\rho^2 + \rho^4\left(c_3 - \frac{c_1}{2}\right)\right], \\ \rho_{xx} - \rho\theta_x^2 = \frac{\rho}{c_0^2 + \varepsilon^2 c_1^2}\left[(c_0^2 + \varepsilon^2 c_1\omega) - \left(\frac{c_0^2}{2} + \varepsilon^2 c_1 c_2\right)\rho^2 - \left(\frac{c_0^2}{2} + \varepsilon^2 c_1 c_3\right)\rho^4\right]. \end{cases} \tag{11.8}$$

当 $\varepsilon = 0$ 时可得可积方积组

$$\begin{cases} 2\rho_x\theta_x + \rho\theta_{xx} = 0, \\ \rho_{xx} - \rho\theta_x^2 = -\rho + \frac{1}{2}\rho^3 + \frac{1}{2}\rho^5, \end{cases} \tag{11.9}$$

具有积分

$$\begin{cases} \rho^2\theta_x = \Omega, \\ \rho_x^2 + \rho^2 + \frac{\Omega^2}{\rho^2} - \frac{1}{4}\rho^4 - \frac{1}{6}\rho^6 = K, \end{cases} \tag{11.10}$$

其中 Ω 和 K 为积分常数.

以下考虑 $\Omega = \Omega(x)$ 为扰动方程组的慢变元. $v = \rho_x$ 从(11.8)可得

$$\begin{cases} \rho_x = v, \\ v_x = \frac{\Omega^2}{\rho^3} - \rho + \frac{1}{2}\rho^3 + \frac{1}{2}\rho^5 + \frac{\varepsilon^2 c_1\rho}{c_0^2 + \varepsilon^3 c_1^2}\cdot\left[(c_1 - \omega)\right. \\ \qquad \left. + \left(c_2 - \frac{c_1}{2}\right)\rho^2 + \left(c_3 - \frac{c_1}{2}\right)\rho^4\right], \\ \Omega_x = \rho^2\frac{\varepsilon c_0}{c_0^2 + \varepsilon^2 c_1^2}\left[(c_1 - \omega) + \left(c_2 - \frac{c_1}{2}\right)\rho^2 + \left(c_3 - \frac{c_1}{2}\right)\rho^4\right]. \end{cases} \tag{11.11}$$

以下考虑未扰动方程组.

此时为方程组(11.11),$\epsilon = 0$. 由此可知 $\Omega = \Omega_0 \in R$,可得方程组

$$
\begin{cases}
\rho_x = v, \\
v_x = \dfrac{\Omega_0^2}{\rho^3} - \rho + \dfrac{1}{2}\rho^3 + \dfrac{1}{2}\rho^5.
\end{cases}
\tag{11.12}
$$

研究(11.12)的平衡点,引入函数

$$
g(P) = \frac{1}{2}P^4 + \frac{1}{2}P^3 - P^2 + \Omega_0^2, \tag{11.13}
$$

其中 Ω_0 为实常数,$P = \rho^2$. 显然(11.13)的根为(11.12)的平衡点. 当然除了平凡解 $P = 0, \Omega_0 = 0$ 外,$g(P)$ 的图如图 11.1 所示(对应于不同的 Ω_0). 如

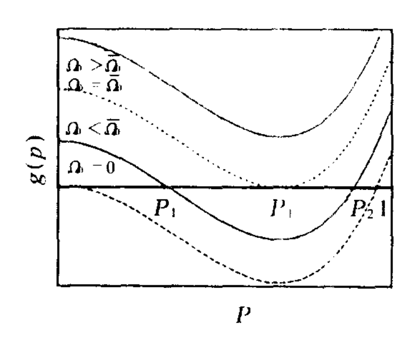


图 11.1 P 和 $g(p)$ 的关系

$$
p_0 = \frac{\sqrt{73} - 3}{8}, \quad \overline{\Omega_0} = \sqrt{\frac{827 - 73\sqrt{73}}{1024}},
$$

$P_j (j = 1,2)$ 为(11.13)的正根,不难得到以下结果

引理 11.1 未扰动方程组(11.12)具有

(Ⅰ) 三个平衡点$(\pm 1,0)$,$(0,0)$,对 $\Omega_0 = 0$;

(Ⅱ) 一对平衡点$(\pm \sqrt{P_0}, 0)$,$\Omega_0 = \pm \overline{\Omega}_0$;

(Ⅲ) 二对平衡点$(\pm \sqrt{P_j}, 0)$,$0 < |\Omega_0| < \overline{\Omega}_0 (j = 1,2)$;

(Ⅳ) 当 $\Omega > \overline{\Omega}_0$ 时,没有平衡点.

进一步,$0 < P_1 < P_0 < P_2 < 1$. $P_1(\Omega_0)$ 为 Ω_0 的增加函数,$P_2(\Omega_0)$ 为 Ω_0 的减少函数,满足

$$\lim_{|\Omega_0| \to \overline{\Omega}_0} P_1(\Omega_0) = \lim_{|\Omega_0| \to \overline{\Omega}_0} P_2(\Omega_0) = P_0;$$

$$\lim_{|\Omega_0| \to 0} P_1(\Omega_0) = 0; \lim_{|\Omega_0| \to 0} P_2(\Omega_0) = 1.$$

现讨论平衡点的性质.

容易验证(11.12)在平衡点$(\pm \rho_j^*, 0)$,$\Omega_0 = \pm \Omega_j^*$ 处的特征方程为

$$\lambda^2 - \frac{1}{P_j}\left(\frac{5}{2}P_j^4 + \frac{3}{2}P_j^3 - P_j^2 - 3\Omega_0^2\right) = 0. \qquad (11.14)$$

令 $q(P_j) = \frac{5}{2}P_j^4 + \frac{3}{2}P_j^3 - P_j^2 - 3\Omega_0^2$,则 $g(P_j) = 0$,$q(P_j) + 3g(P_j) = 4P_j^4 + 3P_j^3 - 4P_j^2$,我们有 $q(P_j) = q(P_j) + 3g(P_j) = 4P_j(P_j - P_0) \cdot \left(P_j + \frac{\sqrt{73} + 3}{8}\right)$. 当 $P_j < P_0$ 时,我们有 $q(P_j) < 0$. 这推出 $\lambda_{1,2}$ 是纯虚根. 因此 P_j 为稳定的(中心)不动点,另一方面,当 $P_j > P_0$,$q(P_j) > 0$,则 P_j 是不稳定(鞍点)不动点. 当 $P_j = P_0$ 时,$q(P_j) = 0$. 由(11.4)的分析,我们有如下结果.

引理 11.2 方程(11.12)临界点的性质

(1) 当 $0 < |\Omega_0| < \overline{\Omega}_0$ 时,临界点$(\pm\sqrt{P_1}, 0)$是中心稳定,临界点$(\pm\sqrt{P_2}, 0)$是鞍点不稳定.

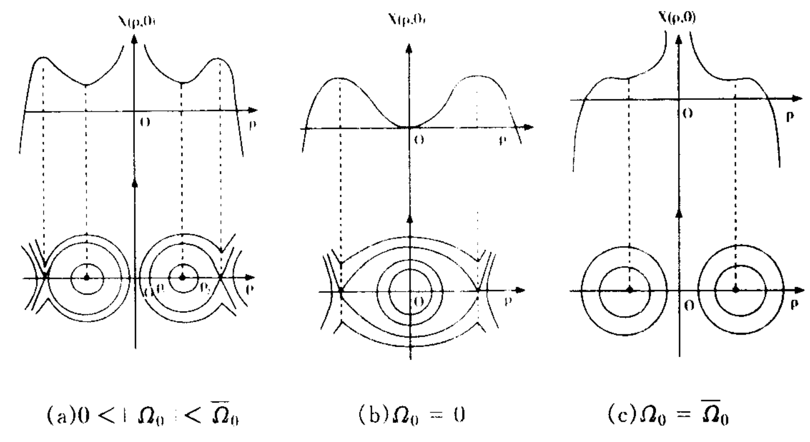
(2) 当 $\Omega_0 = 0$ 时,临界点$(1,0)$是鞍点不稳定,而$(0,0)$是一个中心.

(3) 当 $\Omega_0 = \overline{\Omega}_0$ 时,临界点$(\pm\sqrt{P_0}, 0)$是非双曲的.

定义 $K(\rho, v)$ 作为第二积分定义如下:

$$K(\rho, v) = v^2 + \frac{\Omega^2}{\rho^2} + \rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4 - \frac{1}{6}\rho^6. \qquad (11.15)$$

以 $K_i(\rho(\Omega_0), 0)$ 表示 K 在临界点 $\rho_i(\Omega_0)$,$i = 1,2$ 的值. $K(\rho, 0)$ 的极小值和极大值对应于(11.2)的中心和鞍点,如图 11.2 所示.



(a) $0<|\Omega_0|<\overline{\Omega}_0$　　(b) $\Omega_0=0$　　(c) $\Omega_0=\overline{\Omega}_0$

图 11.2　方程(11.12)的相图

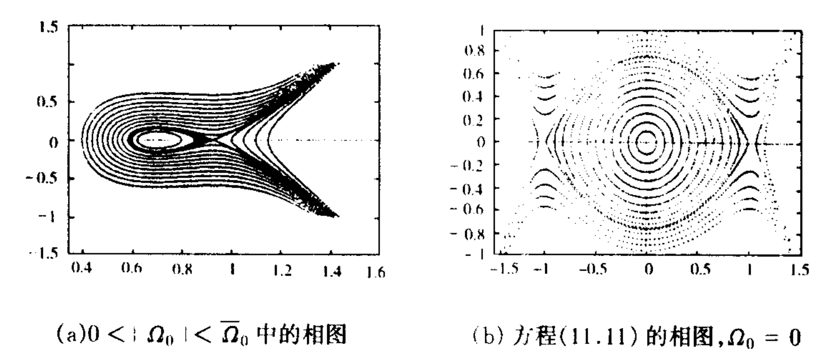
由(11.15)的积分值和引理 9.2,可得(11.12)相平面上的图像:

引理 11.3　(1) 存在二族周期轨道和二族同宿轨道,它们对于 v 轴是对称的,$0<|\Omega_0|<\overline{\Omega}_0$(见图 11.2).

(2) 存在单参数周期轨道和二族异宿轨道 $\Omega_0=0$.

(3) 存在二族周期轨道关于 v 轴是对称的,$\Omega_0=\overline{\Omega}_0$.

(11.12)的计算结果对 $0<|\Omega_0|<\overline{\Omega}_0$ 和 $\Omega_0=0$,见图 11.3.



(a) $0<|\Omega_0|<\overline{\Omega}_0$ 中的相图　　(b) 方程(11.11)的相图,$\Omega_0=0$

图 11.3

(11.1)的周期解,对 x 是拟周期的,对 z 是慢周期的.

(11.12)的周期轨道的积分值 (K,Ω) 在 (K,Ω) 空间形成一个有界域 E.(对称于 K 轴).E 的边界 ∂E,由对应于临界点 $\rho_i(\Omega)(i=1,2)$ 的点组成.

$$\partial E_i = \Big\{(K,\Omega):\Omega^2 = y^2 - \frac{1}{2}y^3 - \frac{1}{2}y^4,$$
$$K = 2y - \frac{3}{4}y^2 - \frac{2}{3}y^3, y = \rho_i^2\Big\},\quad i = 1,2. \tag{11.16}$$

由数值计算得到图 11.4.

以下讨论扰动方程组(11.11)平衡点的存在性及其性质.

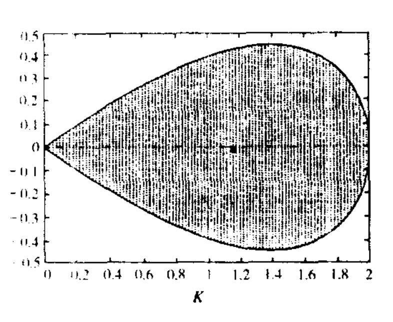


图 11.4 区域 E、K 和 Ω 的关系

引 理 11.4 (1) 方程组(11.11)所确定的流在对称变换下: $x \to -x, v \to -v, \Omega \to -\Omega$ 以及 $\rho \to -\rho, v \to -v$ 是不变的.

(2)(11.11)的临界点,如它们存在而且满足条件

$$\begin{cases} aP^2 + bP + c = 0, & (11.17) \\ P^2 - \frac{1}{2}P^3 - \frac{1}{2}P^4 = \Omega^2, P = \rho^2, & (11.18) \end{cases}$$

其中

$$a = c_3 - \frac{c_1}{2}, b_1 = c_2 - \frac{c_1}{2}, c = c_1 - \omega,$$

则它也是未扰动方程组(11.10)的临界点,如 P_* 是一个临界点,则$0 < p_* \leqslant 1$. 临界点的位置与 c_0, ϵ 无关.

这是显然的,如 $P = \rho^2, \Omega$ 为(11.11)的临界点,则 P 满足(11.17),(11.18).

引理 11.5 设非负实数 P_* 为(11.18)的解,当且仅当

$$0 \leqslant \Omega^2 = -\frac{1}{2}P_*^2(P_* - 1)(p_* + 2) \Leftrightarrow 0 \leqslant P_* \leqslant 1.$$

对 $a \neq 0$ 写(11.17),(11.18)为

$$\begin{cases} P^2 + rP + s = 0, & (11.19) \\ P^2 - \frac{1}{2}P^3 - \frac{1}{2}P^4 = \Omega^2, & (11.20) \end{cases}$$

其中 $r=\dfrac{b}{a}, s=\dfrac{c}{a}$.

从(11.19),(11.20) 求解 P 和 Ω. 由(11.17),(11.18) 或 (11.12) 的讨论,有如下存在性定理

定理 11.6 设 $f(P)=P^2-\dfrac{1}{2}P^3-\dfrac{1}{2}P^4$,则有

(1) 在 $s=\dfrac{r^2}{4}, 0>r\geqslant -2$,对 $w=c_1-\Delta<c_2+c_3, 2c_2<c_1<2c_3$ 或 $\omega=c_1+\Delta>c_2+c_3, 2c_3<c_1<2c_2$,其中 $\Delta=\dfrac{\left(c_2-\dfrac{c_1}{2}\right)^2}{4\left(c_3-\dfrac{c_1}{2}\right)}$,存在(11.14) 的一个正根 $0<p_0=\dfrac{c_1-2c_2}{2(2c_3-c_1)}<1$ 和(11.11) 的四个平衡点:$(\rho_0, 0, \pm\Omega_0)$ 和$(-\rho_0, 0, \pm\Omega_0)$,这里 $\pm\rho_0=\pm\sqrt{p_0}, \pm\Omega_0=\pm\sqrt{f(p_0)}$.

(2) 在区域 $0<s<\dfrac{r^2}{4}, r+s>-1, r<0$ 上:对于 $c_1-\Delta<\omega<\min\{c_1+c_2+c_3\}, 2c_2<c_2<2c_3$ 或 $\max\{c_1, c_2+c_3\}<\omega<c_1+\Delta, 2c_3<c_1<2c_2$,存在(11.20) 二个正根 $0<P_1<P_2<1$ 和(11.12) 的 8 个平衡点:

$(\rho_1, 0, \pm\Omega_1), (-\rho_1, 0, \pm\Omega_1), (\rho_2, 0, \pm\Omega_2), (-\rho_2, 0, \pm\Omega_2)$,其中 $\pm\rho_i=\pm\sqrt{p_i}, i=1,2, \Omega^2=\Omega_i^2=(-\Omega_i)^2, i=1,2$.

(3) 在区域 $s=0, -1<r<0$ 上:对 $2c_2<\omega=c_1<\min\{c_2+c_3, 2c_3\}$ 或 $\max\{c_2+c_3, 2c_3\}<\omega=c_1<2c_2$,存在(11.17),(11.18) 的一个零根 $P=0$ 和一个正根 $p_1=\dfrac{c_1-2c_2}{2c_3-c_1}<1$ 和存在(11.11) 的五个平衡点:

$$(0,0,0), (\rho_1, 0, \pm\Omega_1), (-\rho_1, 0, \pm\Omega_1),$$

其中 $\pm\rho_1=\pm\sqrt{p_1}, \pm\Omega_1=\pm\sqrt{f(p_1)}$.

(4) 在区域 $s<0, r+s>-1$ 上:对 $\omega\leqslant c_2+c_3, c_1<\min\{2c_3, \omega\}$ 或 $\omega\geqslant c_2+c_3, c_1>\max\{2c_3, \omega\}$,存在(11.18) 的一个正根和(11.11) 的四个平衡点:

$$(\rho_1, 0, \pm \Omega_1), (-\rho_1, 0, \pm \Omega_1),$$

其中 $\pm \rho_1 = \pm \sqrt{P}$, $\pm \Omega_1 = \pm \sqrt{f(P)}$.

(5) 在区域 $r + s = -1$, $-2 < r$ 上:对 $c_1 - \Delta < \omega = c_2 + c_3 < c_1 < 2c_3$ 或 $2c_3 < c_1 < \omega = c_2 + c_3 < c_1 + \Delta$,存在(11.11)的一个正根 $P = 1$,因此存在(11.11)二个平衡点: $(1,0,0)$ 的 $(-1,0,0)$.

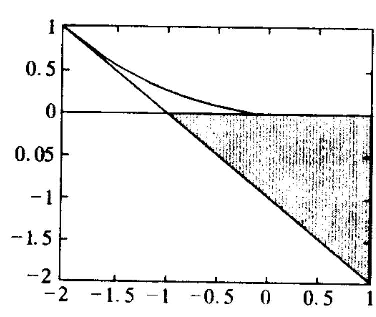
(6) 在区域 $r = 0, s = 0$ 上:对 $c_1 \neq 2c_3, w = c_1 = 2c_2$ 仅存在(11.11)的一个临界点 $(0,0,0)$.

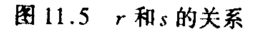
(7) 在区域 $a = 0, 0 < -\frac{c}{b} < 1$ 上:仅存在(11.17),(11.18)一个正根 $P = -\frac{c}{b} < 1$,存在(11.11)二个临界点 $\left(\pm\sqrt{\frac{-c}{b}}, 0, \pm \Omega\right)$.

当系数 $a = c_3 - \frac{c_1}{2} \neq 0$ 时,(11.11)系统的平衡点数目依赖于 r 和 s,图 11.5 表明 r 和 s 的关系.图 11.6 表明 8 个平衡点,能综合 9.6 于表 11.6 中.

现来研究平衡点的性质,(11.11)的特征方程为

$$\lambda^3 - A_j\lambda - B_jc_j = 0, \tag{11.21}$$




图 11.5 r 和 s 的关系

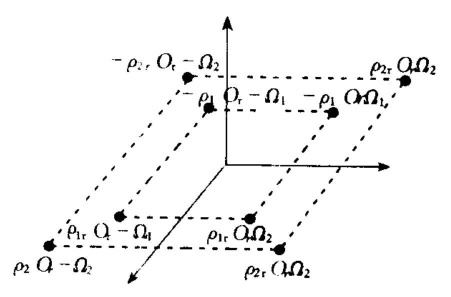


图 11.6 8 个平衡点的图

其中

$$A_j = -3\frac{\Omega_j^2}{\rho_j^4} - 1 + \frac{3}{2}\rho_j^2 + \frac{5}{2}\rho_j^4 + \frac{\varepsilon^2 c_1}{c_0^2 + \varepsilon^2 c_1^2}[c + 3b\rho_j^2 + 5a\rho_j^4],$$

$$B_j = \frac{2\Omega_j}{\rho_j^3}, c_j = \frac{\varepsilon c_0 \rho_j}{c_0^2 + \varepsilon^2 c_1^2}[2c + 4b\rho_j^2 + 6a\rho_j^4],$$

因 $aP_j^2 + bP_j + c = 0, P_j^2 - \frac{1}{2}P_j^3 - \frac{1}{2}p_j^4 = \Omega_j^2$,我们有

$$A_j = 4(P_j - P_0)\left(p_j + \frac{\sqrt{73} + 3}{8}\right) + \frac{2\varepsilon^2 c_1 p_j}{c_0^2 + \varepsilon^2 c_1^2}(b + 2ap_j),$$

$$B_j c_j = \frac{4\Omega_j \varepsilon c_0}{c_0^2 + \varepsilon^2 c_1^2}(b + 2ap_j).$$

为方便计,设 $c_1 > 0, \varepsilon c_0 > 0$,以下讨论(11.14)平衡点的稳定性,分二种情况:

情况 1　(11.17),(11.18)有二个根.

设(11.17),(11.18)具有二个正根,则 $P_1 < -\frac{b}{2a} < P_2$,即 $2aP_1 + b < 0, 2aP_2 + b > 0$. 如 $\Omega_j > 0$,

$$B_1 c_1 < 0, B_2 c_2 > 0, A_1 < 0, A_2 > 0. \tag{11.22}$$

首先讨论小正根 P_1 的稳定性,设 $\Omega_j > 0, \lambda_1^1, \lambda_2^1, \lambda_3^1$ 为(11.21)的三个根. 则由根和系数的关系可得

$$\begin{cases} \lambda_1^1 + \lambda_2^1 + \lambda_3^1 = 0, & (11.23) \\ \lambda_1^1\lambda_2^1 + \lambda_1^1\lambda_3^1 + \lambda_2^1\lambda_3^1 = -A_1 > 0, & (11.24) \\ \lambda_1^1\lambda_2^1\lambda_3^1 = B_1 c_1 < 0. & (11.25) \end{cases}$$

(11.25)推出存在一个负根,设 $\lambda_3^1 < 0$. 令 $\lambda_1^1 = \alpha + i\beta, \lambda_2^1 = \alpha - i\beta$,将 λ_j^1 代入(11.23),有 $\alpha = \frac{\lambda_3^1}{2} < 0$. 因此

$$\mathrm{Re}\lambda_2^1 = \mathrm{Re}\lambda_2^1 > 0, \lambda_3^1 < 0.$$

其次分析对应于最大正根 P_2 的稳定性,设 $f_2(\lambda) = \lambda^3 - A_2\lambda - B_2 c_2$,则 $f'_2(\lambda) = 3\lambda^2 - A_2, f_2(\lambda)$ 具有二个定态点 $\pm\sqrt{\frac{A_2}{3}}$,更进一步 $B_2 c_2 = O(\varepsilon)$. 推出

$$f_2\left(-\sqrt{\frac{A_2}{3}}\right) = \frac{2}{3}A_2\sqrt{\frac{A_2}{3}} - B_2 c_2 > 0,$$

$$f_2\left(\sqrt{\frac{A_2}{3}}\right) = -\left(\frac{2}{3}A_2\sqrt{\frac{A_2}{3}} + B_2c_2\right) < 0.$$

因

$$f_2(0) = -B_2c_2 < 0, \lambda_1^2 < 0, \lambda_2^2 < 0,$$

$$\lambda_3^2 > 0\left(\lambda_1^2 < -\sqrt{\frac{A_2}{3}} < \lambda_2^2, \lambda_3^2 > \sqrt{\frac{A_2}{3}}\right).$$

由以上分析对于(11.11)特征值(在 P_1 和 P_2 点线性化)有 $\lambda_3 < 0, \mathrm{Re}\lambda_j > 0\ (j = 1,2), \lambda_j < 0(j = 1,2), \lambda_3 > 0$ 对于 $\Omega > 0$, $a \neq 0$. 而 P_1 和 P_2 的特征值 $\lambda_3 > 0, \mathrm{Re}\lambda_j < 0(j = 1,2)$ 和 $\lambda_j > 0(j = 1,2), \lambda_3 < 0, \Omega < 0, a \neq 0$. 我们有如下定理

定理 11.7 设(11.19),(11.20)或(11.11)具有二种类型的平衡点. 如 $\varepsilon c_0 > 0, \Omega_j > 0, c_1 > 0$, 则 P_1 是鞍焦点, P_2 是鞍点. 进一步

(i) 对平衡点 $P_1^1(\rho_1, 0, \Omega_1)$ 和 $P_1^2(-\rho_1, 0, \Omega_1)$, 我们有 $\dim W_{\mathrm{loc}}^s((\pm\rho_1, 0, \Omega)) = 1, \dim W_{\mathrm{loc}}^u((\pm\rho_1, 0, \Omega_1)) = 2$.

(ii) 对平衡点 $P_1^3(\rho_1, 0, -\Omega_1)$ 和 $P_1^4(-\rho_1, 0, -\Omega_1)$, 我们有 $\dim W_{\mathrm{loc}}^s((\pm\rho_1, 0, \Omega_1)) = 2, \dim W_{\mathrm{loc}}^u((\pm\rho_1, 0, -\Omega_1)) = 1$.

(iii) 对平衡点 $P_2^1(\rho_2, 0, \Omega_2)$ 和 $P_2^2(-\rho_2, 0, \Omega_2)$, 我们有 $\dim W_{\mathrm{loc}}^s((\pm\rho_2, 0, \Omega_2)) = 2, \dim W_{\mathrm{loc}}^u((\pm\rho_2, 0, \Omega_2)) = 1$.

(iv) 对于平衡点 $P_2^3(\rho_2, 0, \Omega_2)$ 和 $P_2^4(-\rho_2, 0, -\Omega_2)$, 我们有 $\dim W_{loc}^s((\pm\rho_2, 0, -\Omega_2)) = 1, \dim W_{\mathrm{loc}}^u(\pm\rho_2, 0, -\Omega_2) = 2$, 其中 $W_{\mathrm{loc}}^s((\pm\rho_j, 0, \Omega_j))$ 和 $\dim W_{\mathrm{loc}}^u((\pm\rho_j, 0, \Omega_j))$ 分别表示平衡点 $(\pm\rho_j, 0, \Omega_j)(j = 1,2)$ 稳定流形和不稳定流形.

情况 2 (11.17),(11.18)有一个根.

如 $a = 0$, 则 $P_* = \dfrac{w - c_1}{c_2 - \dfrac{c_1}{2}}$ 为(11.17),(11.18)的一个正根, 它几乎同于情况 1 有如下结果.

定理 11.8 如 $a = 0(c_1 = 2c_3), \varepsilon c_0 b > 0$, 则存在(11.11)的 4 个平衡点 $(\pm\rho_*, 0, \Omega_*), (\pm\rho_*, 0, -\Omega_*)$. 进一步有

(i) 如 $(\pm\rho_*)^2 = P_* < P_0$，则平衡点是鞍点焦点和 $\dim W^s_{loc}((\pm\rho_*, 0, \Omega_*)) = 2, \dim W^u_{loc}((\pm\rho_*, 0, \Omega_*)) = 1$, $\dim W^s_{loc}((\pm\rho_*, 0, -\Omega_*)) = 1, \dim W^u_{loc}((\pm\rho_*, 0, -\Omega_*)) = 2$.

(ii) 如 $P_0 < (\pm P_*)^2 = P_* \leqslant 1$，则平衡点是鞍点，且

$\dim W^s_{loc}((\pm\rho_*, 0, \Omega_*)) = 2, \dim W^u_{loc}((\pm\rho_*, 0, \Omega_*)) = 1$,

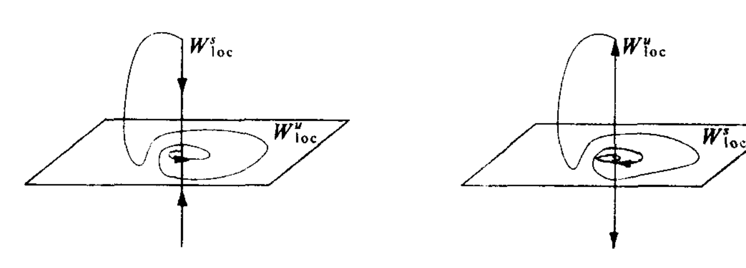
$\dim W^s_{loc}((\pm\rho_*, 0, -\Omega_*)) = 1, \dim W^u_{loc}((\pm\rho_*, 0, -\Omega_*)) = 2$.

当 $a \neq 0$ 时，我们有如下定理

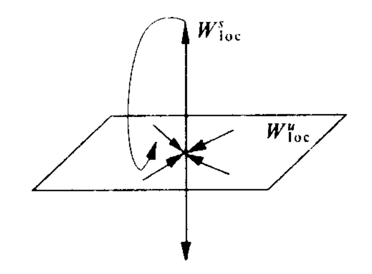
定理 11.9 设(11.19)，(11.20)具有一个根，如 $c_1 \neq 2c_2 (a \neq 0)$，$\varepsilon c_0 > 0$，$c_1 > 0$，则存在(11.17)，(11.18)或(11.11)四个平衡点，进一步有

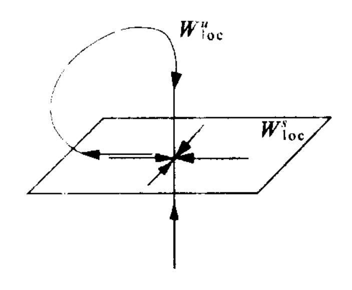
(i) 如 $(\pm\rho_*)^2 = P_* < P_0$，则平衡点是鞍焦点，且 $\dim W^s_{loc}((\pm\rho_*, 0, \Omega_*)) = 1, \dim W^u_{loc}((\pm\rho_*, 0, \Omega_*)) = 2$, $\dim W^s_{loc}((\pm\rho_*, 0, -\Omega_*)) = 2, \dim W^u_{loc}((\pm\rho_*, 0, -\Omega_*)) = 1$.

(ii) 如 $P_0 < (\pm\rho_*)^2 = P_* < 1$，则平衡点是鞍点，且 $\dim W^s_{loc}((\pm\rho_*, 0, \Omega_*)) = 2, \dim W^u_{loc}((\pm\rho_*, 0, \Omega_*)) = 1$, $\dim W^s_{loc}((\pm\rho_*, 0, -\Omega_*)) = 1, \dim W^u_{loc}((\pm\rho_*, 0, -\Omega_*)) = 2$,
其中 W^s_{loc} 和 W^u_{loc} 分别为平衡点的稳定和不稳定流形. 以上均见图 11.7 表示.



(a) $P_1^2(-\rho_1, 0, \Omega_1)$ or $P_1^1(-\rho_1, 0, \Omega_1)$ $(W^s = 1, W^u = 2)$　(b) $P_1^4(-\rho_1, 0, \Omega_1)$ or $P_1^3(-\rho_1, 0, \Omega_1)$ $(W^s = 2, W^u = 1)$





(c) $P_2^2(-\rho_2,0,\Omega_1)$ or $P_2^1(-\rho_2,0,\Omega_2)$ (d) $P_2^4(-\rho_1,0,\Omega_1)$ or $P_2^3(-\rho_1,0,\Omega_1)$

($W^s=2, W^u=1$) ($W^s=2, W^u=1$)

图 11.7 最近平衡点的几何

我们考虑(11.11),它具一个不动点

$$\begin{cases}\rho = R,\\ \Omega = R^2 k,\\ v = 0,\end{cases} \tag{11.26}$$

其中 R 和 k 满足(11.14).不动点对应于(11.1)的周期解,我们将讨论方程组(11.11)周期解的存在性和非存在性,它不具形式(11.3).

由(11.10)第一式和(11.11)第三式可得

$$\begin{cases}K_x = \dfrac{2\Omega\varepsilon c_0}{c_0^2+\varepsilon^2 c_1^2}\left[(c_1-\omega)+\rho^2\left(c_2-\dfrac{c_1}{2}\right)+\rho^4\left(c_3-\dfrac{c_1}{2}\right)\right], & (11.27)\\ \Omega_x = \rho^2\dfrac{\varepsilon c_0}{c_0^2+\varepsilon^2 c_1^2}\left[(c_1-\omega)+\left(c_2-\dfrac{c_1}{2}\right)\rho^2+\left(c_3-\dfrac{c_1}{2}\right)\rho^4\right]. & (11.28)\end{cases}$$

K、Ω 形成有界域 E. Poincaré 映照 P 定义在 E 的 $O(\varepsilon)$ 邻域,E_ε 定义为:如 $(K_0,\Omega_0)\in E_\varepsilon$,考虑 $\Gamma_\varepsilon(x)$ 为(11.11)具初值 $v(0)=0,\Omega(0)=\Omega_0,\rho(0)$ 使得 $K(0)=K_0$ 的一个解,令 $(\overline{\rho},0,\overline{\Omega})$ 为 $\Gamma_\varepsilon(x)$ 和 $v=0$ 平面具 $\dfrac{dv}{dx}<0$ 的交点,则有

$$P(K_0,\Omega_0)=(\overline{K}(\overline{\rho}_0,0,\overline{\Omega}),\overline{\Omega})=\left(\overline{\rho}^2+\frac{\overline{\Omega}^2}{\overline{\rho}^2}-\frac{1}{4}\overline{\rho}^4-\frac{1}{6}\overline{\rho}^6,\overline{\Omega}\right).$$

定义 $\Delta K(K_0,\Omega_0)$ 和 $\Delta\Omega(K_0,\Omega_0)$ 为

$$
\begin{aligned}
P(K_0,\Omega_0) &= (\overline{K},\overline{\Omega}) \\
&= (K_0 + \Delta K(K_0,\Omega_0),\Omega_0 + \Delta\Omega(K_0,\Omega_0)).
\end{aligned}
$$

$\Delta K,\Delta\Omega$ 依到 $O(\varepsilon)$ 计算为

$$
\Delta K(K_0,\Omega_0) = \int_0^{X_\varepsilon(K_0,\Omega_0)} K_x(\Gamma_\varepsilon(x))\mathrm{d}x,
$$

$$
\Delta\Omega(K_0,\Omega_0) = \int_0^{X_\varepsilon(K_0,\Omega_0)} \Omega_x(\Gamma_\varepsilon(x))\mathrm{d}x.
$$

$X_\varepsilon(K_0,\Omega_0)$ 为 Γ_ε 的回来时间("时间 $= x$").

设 ρ_* 为扰动组的平衡点,则 ρ_* 满足

$$
c_1 - w + \left(c_2 - \frac{c_1}{2}\right)\rho_*^2 + \left(c_3 - \frac{c_1}{2}\right)\rho_*^4 = 0.
$$

由上面等式和(11.27)以及注意到 $\dfrac{2\Omega\varepsilon c_0}{c_0^2 + \varepsilon^2 c_1^2} = \dfrac{2\Omega\varepsilon}{c_0} + O(\varepsilon)$ 推出

$$
\begin{aligned}
\Delta K = \int_0^{x(K_0,\Omega_0)} \frac{2\Omega\varepsilon}{c_0}(\rho^2 - \rho_*^2)\Big[\left(c_2 - \frac{c_1}{2}\right) \\
+ \left(c_3 - \frac{c_1}{2}\right)(\rho^2 + \rho_*^2)\Big]\mathrm{d}x + O(\varepsilon^2).
\end{aligned}
$$

轨线 $(\rho_0(x),v_0(x))$ 在 Ω_0 平面上(11.10)的积分 K 描述. 它和 ρ 轴 $(v = \rho_x)$ 相交于二个点 $0 < \rho_1(k_0,\Omega_0) < \rho_2(K_0,\Omega_0)$. 因此令 $\rho^2 = R,\rho_1^2 = R_1,\rho_2^2 = R_2$,由(11.10)第二式和 $2\rho\rho_x\mathrm{d}x = \mathrm{d}R$ 可得

$$
\begin{aligned}
\Delta K = -\frac{\Omega_0\varepsilon}{c_0}\int_{R_1(K_0,\Omega_0)}^{R_2(K_0,\Omega_0)} \\
\cdot \frac{(\rho_*^2 - R)[(c_2 - \frac{c_1}{2}) + (c_3 - \frac{c_1}{2})(R + \rho_*^2)]}{\sqrt{K_0R - R^2 - \Omega_0^2 + \frac{1}{4}R^3 + \frac{1}{6}R^4}}\mathrm{d}R,
\end{aligned}
\tag{11.29}
$$

且 $\Delta k < 0,\rho^2(x) < \rho_*^2$.

类似可得

$$\Delta\Omega = -\frac{\varepsilon}{c_0}\int_{R_1(K_0,\Omega_0)}^{R_2(K_0,\Omega_0)} \cdot \frac{(\rho_*^2 - K)[(c_2 - \frac{c_1}{2}) + (c_3 - \frac{c_1}{2})(R + \rho_*^2)]}{\sqrt{K_0R - R^2 - \Omega_0^2 + \frac{1}{4}R^3 + \frac{1}{6}R^4}} \mathrm{d}R + O(\varepsilon^2), \tag{11.30}$$

且 $\Delta\Omega < 0, \rho^2(x) < \rho_*^2$. 因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\Omega^2 - \rho_*^2 K) = \frac{2\Omega\varepsilon c_0}{c_0^2 + \varepsilon^2 c_1^2}(\rho^2 - \rho_*^2)^2(\rho^2 - \rho_{2*}^2)(c_3 - \frac{c_1}{2}).$$

为方便计,设 $a = c_3 - \frac{c_1}{2} > 0$,则

$$2\Omega\Delta\Omega - \rho_*^2\Delta K > 0, \Omega\varepsilon c_0 > 0. \tag{11.31}$$

(11.31) 表示对 $\Omega_0 \neq 0, \Delta\Omega = \Delta K = 0$ 是不可解的. 因此 Poincaré 映照 P 对 $\Omega \neq 0$ 不具有不动点.

定理 11.10 对 $\Omega \neq 0, \varepsilon \neq 0$,扰动方程组(11.11)的所有周期解是坍塌的,所有的(11.1)拟周期解 $w(x,t)$ 对扰动是破裂的.

对于 $\Omega = 0$,存在 K_0 使得 $\Delta K(K_0,0) = \Delta\Omega(K_0,0) = 0$. 因此有

定理 11.11 存在 Ginzburg – Landau 方程具小复系数的解,它对时间和空间是慢周期的,不具形式 $e^{i(kx-\omega t)}$.

现考虑异宿轨道.

系统(11.11)对某些值表现出异宿轨道,我们从二维不稳定流形 Γ_u^+ 在平衡点$(\pm\sqrt{p_j}, 0, \Omega_j)$开始,定义 $\gamma_u^+ = \{(K_i^+, \Omega_i^+)\}_{i \in I}, I = \{1,2,3\cdots\}$. 其中$(K_1^+, \Omega_1^+) \in E_*$ 为 Γ_u^+ 和 $v = 0$ 平面$(v_x < 0)$的第一个交点. $(K_{i+1}^+, \Omega_{i+1}^+) = P(k_i^+, \Omega_i^+)$. 这里 $P_j = \rho_j^2$ 为未扰动方程组的平衡点. 同样我们定义 γ_s^+ 为 E_* 中的点集,在 K 轴对称于 γ_u^+. 而 γ_i^- 为对应于$(\mp\sqrt{p_j}, 0, \pm\Omega_j)$或$(\pm\sqrt{p_j}, 0, \mp\Omega_j)$的一维稳定流形 Γ_s^-. 我们研究系数 $C_0, C_1, C_2, C_3, \varepsilon$ 和 w,使得 $\Gamma_u^+ = \Gamma_s^-$. 由

Poincaré 映照,我们有

定理 11.12 对任何 ε 充分小,至少存在系数 C_0、C_1、C_2 和 C_3 依赖于 $j(j=1,2)$ 使得系统(11.11)具有异宿轨道相连$(\sqrt{p_j},0,\Omega_j)$ 和$(\sqrt{p_j},0,-\Omega_j)$,另外相连$(-\sqrt{p_j},0,\Omega_j)$ 和$(-\sqrt{p_j},0,-\Omega_j)$. 见图 11.8、图 11.9、图 11.10

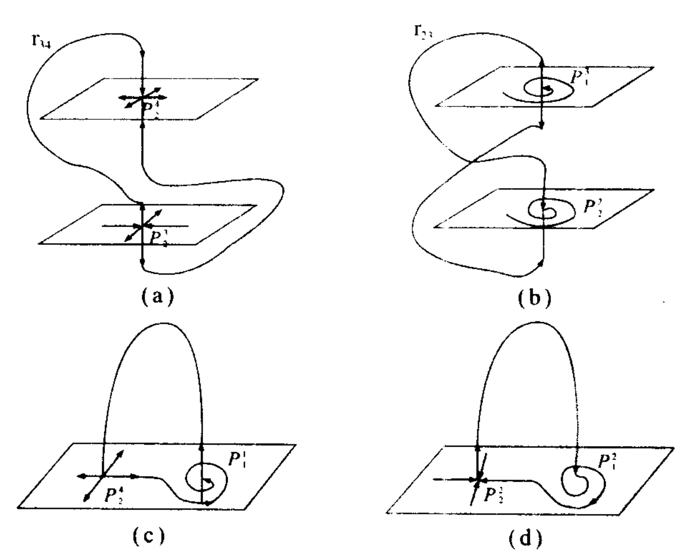


图 11.8 异宿轨道的几何

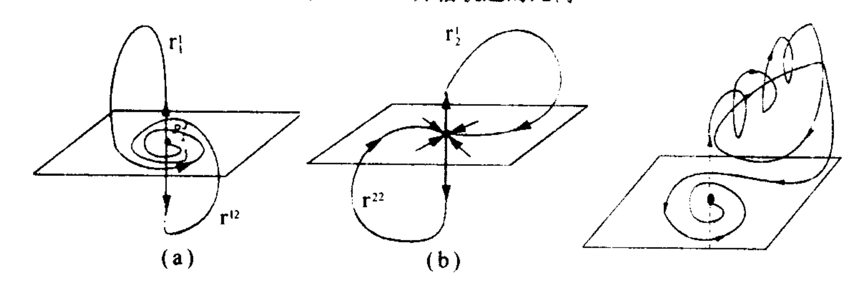


图 11.9 同宿轨道的对称图　　　图 11.10 双脉冲同宿轨道

对于立方 — 五次 Ginzburg-Landau 方程(11.1),用拟谱方法数值求解它. 数值如果表明(11.1)的解不具有周期性,$\varepsilon \neq 0$. 在图 11.11—11.14 中,我们在相平面$(|w(x_0,t)|,|w(x_0,t)|_t)$ 中画出图. 其中

$$x_0 = \frac{\pi}{q}, \quad q = 1.0931,$$

初值 $W(x,0) = 1 + 0.02\exp(i\,\frac{\pi}{4}) \cdot \cos qx, \varepsilon = 0.0025.$

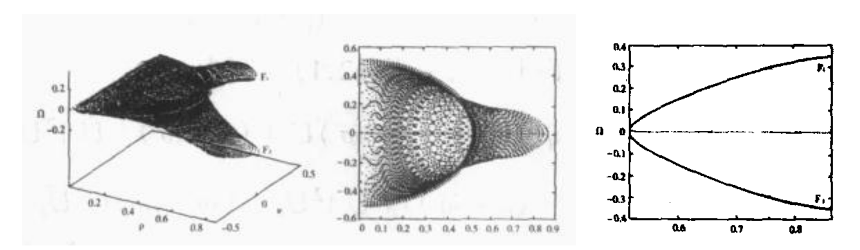


图 11.11　异宿轨道　　图 11.12　　图 11.13 中异宿轨道在 Ω_{w} 上的 Poincaré 截面

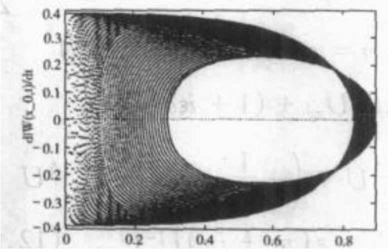


图 11.14　在相空间($|w(x_0,t)|$, $w(x_0,t)|_t$ 上 $w(x,t)$ 的流($\varepsilon = 0.025$)

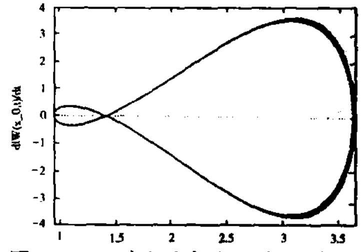


图 11.15　在相空间($|w(x_0,t)|$, $|w(x_0,t)|_t$ 上 $w(x,t)$ 的流, $\varepsilon = 0$

§12　广义 Ginzburg-Landau 方程行波解的稳定性

考虑如下形式的广义 GL 方程

$$\begin{aligned} U_\tau + \tilde{\mu}\, U_x = {} & (\tilde{\mu} + i\tilde{\sigma})U + (1 + i\tilde{\beta})U_{xx} \\ & + (\tilde{\eta} + i\tilde{\delta})\,|U|^2U + (\tilde{\xi} + i\tilde{\gamma})\,|U|^4U \\ & - (\tilde{\alpha} + i\tilde{q})\,|U|^2U_x - (\tilde{m} + i\tilde{n})U^2\overline{U_x}, \end{aligned} \tag{12.1}$$

其中$(x,\tau) \in R \times R^+$, $U(x,z)$ 为未知复值函数, $\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}, \tilde{\beta}, \tilde{\eta}, \tilde{\delta}$, $\tilde{\xi}, \tilde{\gamma}, \tilde{\alpha}, \tilde{q}, \tilde{m}, \tilde{n}$ 均为实常数. 考虑(12.1) 的平面波解

$$U(z) = r_0 e^{-iQ_0 z}, z = x - \varepsilon c\tau, 0 < \varepsilon \ll 1, \tag{12.2}$$

其中 r_0,θ_0 满足

$$\begin{cases}\tilde{\mu}-\theta_0^2+\tilde{\eta}\ r_0^2+\tilde{\xi}\ r_0^4-\tilde{q}\ r_0^2\theta_0+\dot{\eta}\ r_0^2\theta_0=0,\\ \tilde{\sigma}+\tilde{\delta}\ r_0^2+\tilde{\gamma}\ r_0^4+(\tilde{\alpha}-\tilde{m})r_0^2\theta_0=(\tilde{\beta}+\varepsilon c-\tilde{\nu})\theta_0.\end{cases}\qquad(12.3)$$

在$(z=x-\varepsilon c\tau,\tau)$平面上,GL 方程(12.1)可写为

$$U_\tau(\tau c-\tilde{\nu})U_z+(1+i\tilde{\beta})U_{zz}+(\tilde{\mu}+i\tilde{\sigma})U+(\tilde{\eta}+i\tilde{\delta})|U|^2U$$
$$+(\tilde{\xi}+i\tilde{\gamma})|U|^4U-(\tilde{\alpha}+i\tilde{q}))|U|^2U_z-(\tilde{m}+i\tilde{n})U^2\overline{U}_z.\qquad(12.4)$$

令 $\tilde{\nu}=\varepsilon\nu,\tilde{\eta}=1,\tilde{\eta}=-\dfrac{1}{2},\tilde{\beta}=\varepsilon\beta,\tilde{\sigma}=\varepsilon\sigma,\tilde{\delta}=\varepsilon\delta,\tilde{\xi}=-\dfrac{1}{2}$,
$\tilde{\gamma}=\varepsilon\gamma,\tilde{\alpha}=\varepsilon\alpha,\tilde{q}=\varepsilon q,\tilde{m}=\varepsilon m,\tilde{n}=\varepsilon n$,则(12.4)可写为

$$U_z=\varepsilon(c-\nu)U_z+(1+i\varepsilon\beta)U_{zz}+(1+i\varepsilon\sigma)U$$
$$+\left(-\frac{1}{2}+i\varepsilon\delta\right)|U|^2U+\left(-\frac{1}{2}+i\varepsilon\gamma\right)|U|^4U$$
$$-\varepsilon(\alpha+iq)|U|^2U_z-\varepsilon(m+in)U^2\overline{U}_z.\qquad(12.5)$$

引入极坐标

$$U(z,\tau)=r(z,\tau)e^{-i\theta(z,\tau)},\qquad(12.6)$$

(12.5)变为

$$\begin{cases}r_\tau=r_{zz}+\varepsilon\beta r\theta_{zz}+\varepsilon(c+2\beta\theta_z-\nu)r_z+r\Big(1-\dfrac{1}{2}r^2\\ \qquad-\dfrac{1}{2}r^4-\theta_z\Big)-\varepsilon(\alpha+m)r^2r_z-r^3\varepsilon(q-n)\theta_z,\\ \theta_\tau=\theta_{zz}-\varepsilon\beta\dfrac{r_{zzz}}{r}+2\dfrac{r_z\theta_z}{r}+\varepsilon(c+\beta\theta_z)-\varepsilon\nu\theta_z\\ \qquad-\varepsilon\alpha-\varepsilon\delta r^2-\varepsilon rr^4-\varepsilon(\alpha-m)r^2\theta_z+\varepsilon(q+n)rr_z.\end{cases}\qquad(12.7)$$

令

$$t=\varepsilon^2\tau,z=\varepsilon Z,\theta=\varepsilon\Theta,\qquad(12.8)$$

则(12.7)变为

$$\begin{cases} \varepsilon^2 r_t = \varepsilon^2 r_{zz} + \varepsilon^2 \beta r\theta_{zz} + \varepsilon^2 (c + 2\beta\theta_x - \nu) r_z + r\Big(1 - \frac{1}{2}r^2 \\ \qquad - \frac{1}{2}r^4 - \theta_z^2\Big) - \varepsilon^2(\alpha + m) r^2 r_z - r^3 \varepsilon (q - n)\theta_z, \\ \theta_t = \theta_{zz} - \varepsilon^2 \beta \frac{r_{zz}}{r} + \frac{2r_z\theta_z}{r} + (c + \beta\theta_z - \nu)\theta_z - (\sigma + \delta r^2 + rr^4) \\ \qquad - (\alpha - m) r^2 \theta_z + \varepsilon(q + n) r r_z. \end{cases} \tag{12.9}$$

设 $r_z, r_{zz}, r_t, \theta_z, \theta_{zz}$ 为$O(1)$次,对一切$(z, t) \in R \times R^+$和 $\forall \varepsilon > 0$,令 $\varepsilon \to 0$,可得

$$\begin{cases} 1 - \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}r^4 - \theta_z^2 = 0, \\ \theta_t = \theta_{zz} + 2\frac{r_z\theta_z}{r} + (c + \beta\theta_z - \nu)\theta_z - (\sigma + \delta r^2 + rr^4) \\ \qquad - (\alpha - m) r^2 \theta_z. \end{cases} \tag{12.10}$$

从(12.10)解出 r^2 为

$$r^2 = \frac{\sqrt{9 - 8\theta_z^2} - 1}{2}. \tag{12.11}$$

将(12.11)代入(12.10)第二个方程,得

$$\theta_t = \theta_{zz} - \frac{8\theta_z^2\theta_{zz}}{\sqrt{9 - 8\theta_z^2}(\sqrt{9 - 8\theta_z^2} - 1)} + [c - \nu + (\beta + 2r)\theta_z]\theta_z$$
$$- \sigma + 2\gamma + (\gamma - \delta)\frac{\sqrt{9 - 8\theta_z^2} - 1}{2}. \tag{12.12}$$

为方便计,令 $\beta = 0$ 于(12.9)中,由此可得

$$\begin{cases} \varepsilon^2 r_t = \varepsilon^2 r_{zz} + \varepsilon^2 (c - \nu - (\alpha + m) r^2) r_z + r(1 - \frac{1}{2}r^2 \\ \qquad - \frac{1}{2}r^4 - \theta_z^2) - r^3 \varepsilon (q - n)\theta_z, \\ \theta_t = \theta_{zz} + (c - \nu - (\alpha - m) r^2 + 2\frac{r_z}{r})\theta_z - (\sigma + \delta r^2 + \gamma r^4) \\ \qquad + \varepsilon(q + n) r r_z. \end{cases}$$

(12.13)

现考虑(12.13)的定态解,$\varepsilon \ll 1$,可得二个方程组,即慢变方程组和快变方程组.慢变方程组为

$$
\begin{cases}
\varepsilon r' = s, \\
\varepsilon s' = -\varepsilon(c - \nu - (\alpha + m)r^2)s - r\left(1 - \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}r^4 - \phi^2\right) \\
\qquad + \varepsilon r^3(q - n)\phi, \\
\theta' = \phi, \\
\phi' = -(c - \nu - (\alpha - m)r^2 + 2\frac{s}{\varepsilon r})\phi + (\sigma + \delta r^2 + \gamma r^4) \\
\qquad - (q + n)rs,
\end{cases}
\tag{12.14}
$$

其中 $' = \frac{d}{dz}$,令 $z = \varepsilon\xi$,则得快变方程组

$$
\begin{cases}
\dot{r} = s, \\
\dot{s} = -\varepsilon(c - \nu - (\alpha + m)r^2)s - r\left(1 - \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}r^4 - \phi^2\right) \\
\qquad + \varepsilon r^3(q - n)\phi, \\
\dot{\theta} = \varepsilon\phi, \\
\dot{\phi} = -\varepsilon(c - \nu - (\alpha - m)r^2 + \frac{2s}{\varepsilon r})\phi + \varepsilon(\sigma + \delta r^2 + \gamma r^4) \\
\qquad - \varepsilon(q + n)rs,
\end{cases}
\tag{12.15}
$$

其中 $\cdot = \frac{d}{d\xi}$.

当 $\varepsilon = 0$ 时,存在不变流形.

$$M_0 = \{(r, s, \theta, \phi) : r^2 + r^4 + 2\phi = 2, s = 0, \theta \in R\}. \tag{12.16}$$

(12.15)在此流形线性化,可计算特征方程

$$\det(Df|_{M_0} - \lambda I) = \lambda^2[\lambda^2 + 4 - 3r^2 - 4r^4] = 0,$$

因此当 $r^2 > \frac{\sqrt{73} - 3}{8}$,$M_0$ 为法向双曲的,或 $\phi^2 < \frac{35 - \sqrt{73}}{64}$,令

$Q_0 = \left(\frac{35-\sqrt{73}}{64}\right)^{\frac{1}{2}}$. 因此存在(12.14)的不变流形 M_ε，它以 $O(\varepsilon)$ 逼近 M_0，流形 M_ε 为

$$
\begin{aligned}
M_\varepsilon = \{(r,s,\theta,\phi):\gamma = M^r(\phi,\varepsilon),\\
s = M^s(\phi,\varepsilon),\theta\in R,\phi^2 < \frac{35-\sqrt{73}}{64}\},
\end{aligned}
\tag{12.17}
$$

其中

$$
M^r(\phi,0) = \sqrt{\frac{\sqrt{9-8\phi^2}-1}{2}},M^s(\phi,0) = 0. \tag{12.18}
$$

在方程组(12.15)中，θ 不与其他方程耦合，因此可考虑为(r,s,ϕ)的方程组 θ 作为辅助方程.

由(12.14)的最后一个方程，可得

$$
\begin{aligned}
(r^2\phi)' = r^2[(\nu+(\alpha-m)r^2-c)\phi+(\sigma+\delta r^2+\gamma r^4)\\
-\frac{\varepsilon}{2}(r^2)'(q+n)].
\end{aligned}
\tag{12.19}
$$

因此 $r = M^r$ 整个方程在M_ε 上为

$$
\begin{cases}
\theta' = \phi,\\
\phi' = \dfrac{9-8\phi^2-\sqrt{9-8\phi^2}}{9-16\phi^2-\sqrt{9-8\phi^2}}g(\phi)+O(\varepsilon),
\end{cases}
\tag{12.20}
$$

其中

$$
g(\phi) = A+B\phi+C\sqrt{9-8\phi^2}+D\phi\sqrt{9-8\phi^2}+E\phi^2, \tag{12.21}
$$

这里 $A = \sigma-\frac{\delta}{2}-\frac{5}{2}\gamma, B = \nu-c-\frac{\alpha-m}{2}, C = \frac{\delta-\gamma}{2}, D = \frac{\alpha-m}{2}, E = -2\gamma$. 对于不同参数 A,B,C,D,E，函数 $g(\phi) = 0$ 的根的数目是不同的，取 $C = D = E = 0$，$|\frac{A}{B}| < Q_0$ 作为例子，则 $\phi = -A/B$ 为$g(\phi)$的根. 因此(12.20)第二个方程能写为

$$
\phi' = \frac{9-8\phi^2-\sqrt{9-8\phi^2}}{9-16\phi^2-\sqrt{9-8\phi^2}}g(\phi)
$$

$$= k(\phi)\prod_{j=1}^{s}(\phi - \phi_j)(0 \leqslant s \leqslant 4), \tag{12.22}$$

其中 ϕ_j 为 $g(\phi)=0$ 的根,为方便计,设 $k(\phi)>0$.

情况 1. 1 个根.

此时存在一个根,设 $\phi=\phi_1$ 有

$$\lim_{z\to+\infty}\phi(z)=\phi_1.$$

情况 2. 2 个根.

此时存在两个根,设为 $\phi_\pm$, $\phi_- < \phi_+$ 有

$$\lim_{z\to\pm\infty}\phi(z)=\phi_\pm.$$

情况 3. 3 个根.

此时有 3 个根,设为 $\phi_j(j=1,2,3)$,且 $\phi_1<\phi_2<\phi_3$.

$$\phi' = k(\phi)(\phi-\phi_1)(\phi-\phi_2)(\phi-\phi_3).$$

积分可得

$$(\phi-\phi_1)^{\beta_1}(\phi-\phi_3)^{\beta_3} = c_0 e^{\int_0^z k(\phi(s))\mathrm{d}s}(\phi-\phi_2)^{\beta_2},$$

其中 $\beta_1=\phi_3-\phi_2$, $\beta_2=\phi_3-\phi_1$, $\beta_3=\phi_2-\phi_1$.

注意到 $k(\phi)>0$, $|\phi|<Q_0$, 由 $k(\phi)$ 的连续性有 $\min\limits_{z\in R}k(\phi(z))>0$. 因此有

$$\lim_{z\to-\infty}\phi(z)=\phi_1 \text{ 或 } \phi_3,\ \lim_{z\to+\infty}\phi(z)=\phi_2.$$

情况 4. 4 个根.

类似计算可得

$$(\phi-\phi_2)^{\beta_2}(\phi-\phi_4)^{\beta_4} = c_0 e^{\int_0^z k(\phi(s))\mathrm{d}s}(\phi-\phi_1)^{\beta_1}(\phi-\phi_3)^{\beta_3},$$

其中

$$\beta_1 = (\phi_4-\phi_3)(\phi_4-\phi_2)(\phi_3-\phi_2),$$
$$\beta_2 = (\phi_4-\phi_2)(\phi_4-\phi_1)(\phi_3-\phi_1),$$
$$\beta_3 = (\phi_4-\phi_2)(\phi_4-\phi_1)(\phi_2-\phi_1),$$
$$\beta_4 = (\phi_3-\phi_2)(\phi_3-\phi_1)(\phi_2-\phi_1).$$

因此

$$\lim_{z\to+\infty}\phi(z)=\phi_1 \text{ 或 } \phi_3,$$

$$\lim_{z\to+\infty}\phi(z)=\phi_2 \text{ 或 } \phi_4.$$

异宿轨道的图形见图 12.1,图 12.2.

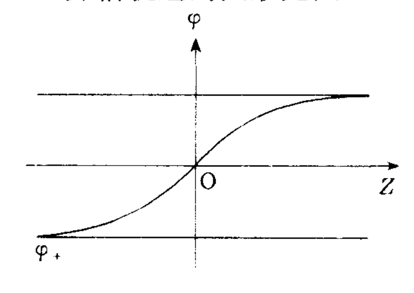


图 12.1　情况 2 的异宿轨道

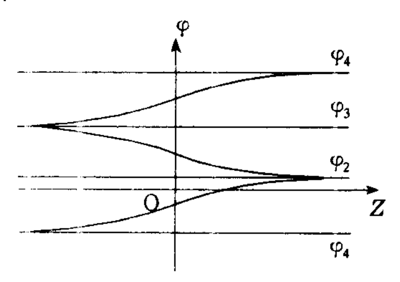


图 12.2　情况 4 的异宿轨道

无损于一般性,我们设相近(12.22)的轨道 $\tilde{\phi}(z)$ 存在, $\lim\limits_{z\to\pm\infty}\tilde{\phi}(z)=\phi_{\pm}$. 因临界点 $\phi_{\pm}$ 对(12.22)是双曲的,因此在流形 M_{ε} 上我们有轨道线为

$$\tilde{r}(z)=\sqrt{(\sqrt{9-8(\tilde{\phi}(z))^2}-1)/2+O(\varepsilon)}, \qquad (12.23)$$

$$\tilde{\theta}(z)=\int_0^z\tilde{\phi}(s)\mathrm{d}s.$$

因此有

定理 12.1　存在 $\varepsilon_0>0$,使得当 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$,存在参数空间的区域,对于它,(12.14)的异宿轨道在 M_{ε} 存在. 现考虑这些轨道的稳定性. 令

$$r(z)=\rho(z),\theta(z)=\int_0^z\phi(s)\mathrm{d}s, \qquad (12.24)$$

其中 $\lim\limits_{z\to+\infty}\phi(z)=\phi_{\pm}$.

为了得到(12.13)关于行波解(12.24)的稳定性. 对(12.13)作线性化,引入小扰动

$$r(z,t)=\rho(z)+R(z,t),\theta(z,t)=\int_0^z\phi(s)\mathrm{d}s+\theta(x,t),$$

代入(12.13),并作线性化,得

$$
\begin{cases}
R_t = R_{zz} + [c - \nu - (\alpha + m)\rho^2]R_x - \left[\dfrac{2\rho\phi}{\varepsilon^2} + \dfrac{\rho^3}{\varepsilon}(q - n)\right]\theta_x \\
\quad + \dfrac{1}{\varepsilon^2}\left[1 - \dfrac{3}{2}\rho^2 - \dfrac{5}{2}\rho^4 - \phi^2 - 2\varepsilon^2(\alpha + m)\rho\rho_z - 3\varepsilon\rho^2(q - n)\phi\right]R, \\
\theta_t = \theta_{zz} + \left[c - \nu - (\alpha - m)\rho^2 + 2\dfrac{\rho_x}{\rho}\right]\theta_x + \left[2\dfrac{\phi}{\rho} + \varepsilon(q + n)\rho\right]R_x \\
\quad + \left[\varepsilon(q + n)\rho_x - 2(\alpha - m)\phi\rho - 2\dfrac{\rho_x}{\rho}\phi - 2\delta\rho - 4\gamma\rho^3\right]R.
\end{cases}
\tag{12.25}
$$

上式方便地写成

$$
\begin{pmatrix} R \\ \theta \end{pmatrix}_t = L\begin{pmatrix} R \\ \theta \end{pmatrix}. \tag{12.26}
$$

置

$$
R(z,t) = R(z)e^{\lambda t}, \theta(\lambda t) = \theta(z)e^{\lambda t}, \tag{12.27}
$$

代入(12.25)可得特征值方程

$$
\begin{cases}
\varepsilon^2 R'' + \varepsilon^2[c - \nu - (\alpha + m)\rho^2]R' - \left[\dfrac{2\rho\phi}{\varepsilon^2} + \rho^3\varepsilon(q - n)\right]\theta' \\
\quad + \left[1 - \dfrac{3}{2}\rho^2 - \dfrac{5}{2}\rho^4 - \phi^2 - 2\varepsilon^2(\alpha + m)\rho\rho_z - 3\varepsilon\rho^2(q - n)\phi\right]R \\
\quad = \varepsilon^2\lambda R, \\
\theta'' + \left[c - \nu - (\alpha - m)\rho^2 + 2\dfrac{\rho_z}{\rho}\right]\theta' + \left[2\dfrac{\phi'}{\rho} + \varepsilon(q + n)\rho\right]R' \\
\quad + [\varepsilon(q + n)\rho_z - 2(\alpha + m)\phi\rho - 2\dfrac{\rho_z}{\rho}\phi - 2\delta\rho - 4\gamma\rho^3]R = \lambda\theta,
\end{cases}
\tag{12.28}
$$

其中 $' = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ 为特征值.

如对任何 $\lambda \in \mathbb{C}$ 具有正的实部, 存在(12.28)的非平凡解 $(R(z), \theta(z))$, 奇性轨道是不稳定的.

方程组(12.28)具快 - 慢结构, 慢方程组为

$$
\begin{cases}
\varepsilon R' = S, \\
\varepsilon S' = -\varepsilon[c-\nu-(\alpha+m)\rho^2]S + \left[\dfrac{2\rho\phi}{\varepsilon^2} + \rho^3\varepsilon(q-n)\right]\Phi \\
\qquad -\left[1-\dfrac{3}{2}\rho^2 - \dfrac{5}{2}\rho^4 - \phi^2 - 2\varepsilon^2(\alpha+m)\rho\rho_z\right. \\
\qquad \left. -3\varepsilon\rho^2(q-n)\phi - \varepsilon^2\lambda\right]R, \\
\Theta' = \Phi, \\
\Phi' = -\left[c-\nu-(\alpha-m)\rho^2 + 2\dfrac{\rho_z}{\rho}\right]\Phi - \left[2\dfrac{\phi}{\rho} + \varepsilon(q+n)\rho\right]S/\varepsilon \\
\qquad -\left[\varepsilon(q+n)\rho_z - 2(\alpha-m)\phi\rho - 2\dfrac{\rho_z}{\rho}\phi - 2\delta\rho - 4\gamma\rho^3\right]R + \lambda\theta, \\
\tau' = k(1-\tau^2),
\end{cases}
\tag{12.29}
$$

其中变元 τ 由关系

$$
z = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{1+\tau}{1-\tau}\right) \tag{12.30}
$$

确定，这里 $K > 0$ 充分小使得(12.29) 在 $\mathbb{C}^4 \times [-1,1]$ 上属于 C^1(见 Alexander 等[19] 引理 3.1). 显然如 $z \to \pm\infty$，则 $\tau \to \pm\infty$. 由于引入 τ 的方程，使系统为自治的，因此在 $\mathbb{C}^4 \times [-1,1]$ 上定义动力系统，作变元变换 $z = \varepsilon\xi$，得到快方程组

$$
\begin{cases}
\dot{R} = S, \\
\dot{S} = -\varepsilon[c-\nu-(\alpha+m)\rho^2]S + \left[\dfrac{2\rho\phi}{\varepsilon^2} + \rho^3\varepsilon(q-n)\Phi - \left[1-\dfrac{3}{2}\rho^2\right.\right. \\
\qquad \left. -\dfrac{5}{2}\rho^4 - \phi^2 - 2\varepsilon^2(\alpha+m)\rho\rho_z - 3\varepsilon\rho^2(q-n)\phi - \varepsilon^3\lambda\right]R, \\
\dot{\Theta} = \varepsilon\Phi, \\
\dot{\Phi} = -\varepsilon[c-\nu-(\alpha-m)\rho^2]\Phi + 2\dfrac{\dot{\rho}}{\rho^2}\phi R - 2\dfrac{\dot{\rho}}{\rho}\Phi - \dfrac{2\phi}{\rho}S - \varepsilon(q+n)\rho S \\
\qquad -\varepsilon[(q+n)\dot{\rho} - 2(\alpha-m)\phi\rho - 2\delta\rho - 4\gamma\rho^3]R + \varepsilon\lambda\theta, \\
\dot{\tau} = \varepsilon k(1-\tau^2).
\end{cases}
\tag{12.31}
$$

以下我们证明存在 $\lambda_0 > 0$，如 $|\lambda| > \lambda_0$，则 λ 不是(12.28) 的特征值. 如同 Alexander[19] 中的证明. 设 $\Phi_-(\lambda, z)$，$\Phi_+(\lambda, z)$ 分

别表示不稳定丛和稳定丛,有如下引理

引理 12.2[19] $\lambda \in \Omega$ 为 L 的特征值当且仅当 $\Phi_-(\lambda,\tau) \cap \Phi_+(\lambda,\tau) \neq 0$,对某 $\tau \in (-1, +1)$,其中 Ω 的定义见[19].

引理 12.3 存在正数 M 和 $\delta\left(\delta < \frac{\pi}{2}\right)$ 使得如 $|\lambda| > M$, $|\arg\lambda| < \pi - \delta$,则 λ 不是方程组(12.28)的一个特征值.

证 记

$$\psi(z) = \rho'(z)/\rho(z). \tag{12.32}$$

考虑(12.29),$\varepsilon \neq 0$,作伸缩变换

$$y = z|\lambda|^{\frac{1}{2}}, \tilde{S} = S/|\lambda|^{\frac{1}{2}}, \tilde{\Phi} = \Phi/|\lambda|^{\frac{1}{2}}, \tag{12.33}$$

则(12.29)变成

$$\begin{cases} \varepsilon R' = \tilde{S}, \\ \varepsilon \tilde{S}' = -\varepsilon \dfrac{c - \nu - (\alpha + m)\rho^2}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}} \tilde{S} + \dfrac{\dfrac{2\rho\phi}{\varepsilon^2} + \rho^3 \varepsilon (q - n)}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}} \tilde{\Phi} \\ \qquad - \left[\dfrac{1 - \frac{3}{2}\rho^2 - \frac{5}{2}\rho^4 - \phi^2 - 2\varepsilon^2(\alpha + m)\rho\rho_z - 3\varepsilon\rho^2(q - n)\phi}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}} \right. \\ \qquad \left. - \varepsilon^2 e^{i\arg\lambda} \right] R, \\ \theta' = \tilde{\Phi}, \\ \tilde{\Phi}' = \dfrac{c - \nu - (\alpha - m)\rho^2 + 2\dfrac{\rho_z}{\rho}}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}} \tilde{\Phi} - \dfrac{2\dfrac{\phi}{\rho} + \varepsilon(q + n)\rho}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}} \tilde{S}/\varepsilon \\ \quad - \dfrac{\varepsilon(q + n)\rho_z - 2(\alpha - m)\phi\rho - 2\dfrac{\rho_z}{\rho}\phi - 2\delta\rho - 4\gamma\rho^3}{R} + e^{i\arg\lambda}\theta, \\ \tau' = \dfrac{K}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}(1 - z^2), \end{cases} \tag{12.34}$$

这里 $' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}$.

取(12.34), $|\lambda| \to \infty$ 的极限得

$$\begin{cases}\varepsilon R' = \tilde{S}, \\ \varepsilon \tilde{S} = \varepsilon^2 e^{i\arg\lambda} R, \\ \theta' = \tilde{\Phi}, \\ \tilde{\Phi} = e^{i\arg\lambda}\theta, \\ \tau' = 0.\end{cases} \tag{12.35}$$

由 $\tau' = 0$ 推出流(12.35)在每个 τ 片上是不变的.对于 $\tau \in [-1, +1]$,(12.35)右端的特征值为 $\pm e^{i\arg\lambda/2}$.如 $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ 和 $|\arg\lambda| < \pi - \delta$,则存在两个正实部的特征值和两个负实部的特征值,对固定 τ,(12.35)确定的流在 Grassmann$G_2(C^4)$ 上具有一个吸引子.它是不稳定子空间.由此推出如 $|\lambda|$ 充分大,则流(12.34)的解在 $G_2(C^4) \times [-1,1]$ 上趋近于这个吸引子.因此不可能和 Φ_+ 相连.由引理 12.2,λ 不可能是特征值.

以下考虑不稳定流形的构造.

设 Σ 为含有右半平面的复平面上一个开集,以 Γ 为它的边界 $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$:

$$\Gamma_1 = \{\lambda_0 + re^{i\gamma_0} : r \geqslant 0, \frac{\pi}{2} \leqslant \gamma_0 < \pi\},$$

$$\Gamma_2 = \{-r^2 + ia^2 r : -\mu \leqslant r \leqslant \mu\},$$

$$\Gamma_3 = \{\lambda : \bar{\lambda} \in \Gamma_1\}.$$

$\lambda_0 = -\mu^2 + ia^2\mu$,如图 12.3 所示,$\overline{\Sigma}$ 表示它的闭包,显然 $\{0\} \subset \sigma_e(L) \cap \overline{\Sigma}$,$\sigma_e(L)$ 表示算子 L 的连续谱.

令 $Y = (R, S, \theta, \Phi,)^T$.方程(12.34)可写成

$$\begin{cases}Y' = M(\lambda, \tau, \varepsilon) Y, \\ \tau' = K(1 - \tau^2).\end{cases} \tag{12.36}$$

定义渐近矩阵 $M^{\pm}(\lambda, \varepsilon)$ 为

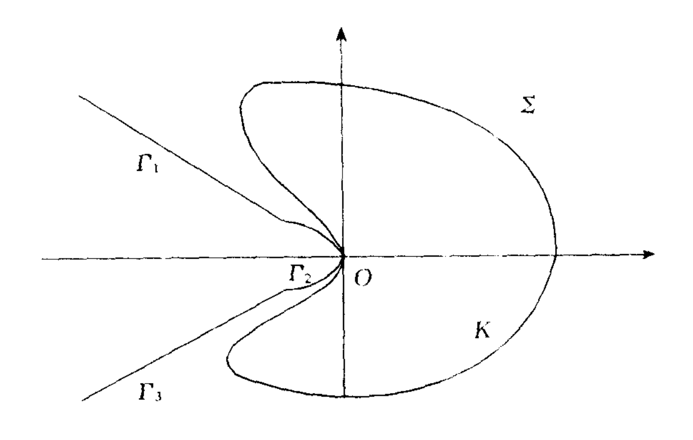


图 12.3　曲线 K 与区域 Σ

$$M^{\pm}(\lambda,\varepsilon)=\lim_{\tau\to\pm1}M(\lambda,\tau,\varepsilon).\tag{12.37}$$

(12.36) 的渐近方程组为

$$\begin{cases}Y'=M^{\pm}(\lambda,\varepsilon)Y,\\ \tau'=0.\end{cases}\tag{12.38}$$

Evans 函数 $E(\lambda,\varepsilon)$ 定义为

$$E(\lambda,\varepsilon)=e^{-\int_0^z \mathrm{tr}M(\lambda,s,\varepsilon)\mathrm{d}S}\,|\,Y_1\cdots Y_4\,|\,(\lambda,z,\varepsilon),\tag{12.39}$$

其中 $|\cdot|$ 表示 4×4 矩阵的行列式，$Y_j(\lambda,z,\varepsilon)$，$j=1,2,\cdots,4$，表示(12.38) 的解，使得

$$\lim_{z\to-\infty}Y_j(\lambda,z,\varepsilon)=0,j=1,2;\ \lim_{z\to+\infty}Y_j(\lambda,z,\varepsilon)=0,j=3,4.$$

这些解是存在的，有如下引理(见[20]).

引理 12.4　对任何固定的 ε 和 $\lambda\in\Sigma$ 有

(1)$E(\lambda,\varepsilon)$ 关于 λ 是解析的，

(2)$E(\lambda,\varepsilon)=0$ 当且仅当 λ 是一个特征值.

引理 12.5　对任何 $\varepsilon>0$，Evans 函数 $E(\lambda,\varepsilon)$ 在 $\lambda=0$ 处解析.

引理 12.6　存在 $\varepsilon_0>0$ 使得当 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ 时，$E(0,\varepsilon)\neq0$.

设 K 为一曲线同胚于 S^1，它不含有 L 的特征值 K_0 为 K 所界的区域. 可在集合

$$K_0 \times \{-1\} \cup K \times [-1,1] \cup K_0 \times \{+1\}$$

上构造丛,此集合同构于 S^2,如图 12.4 所示. 不稳定丛的扩张记为 $\varepsilon(K)$,它具有纤维

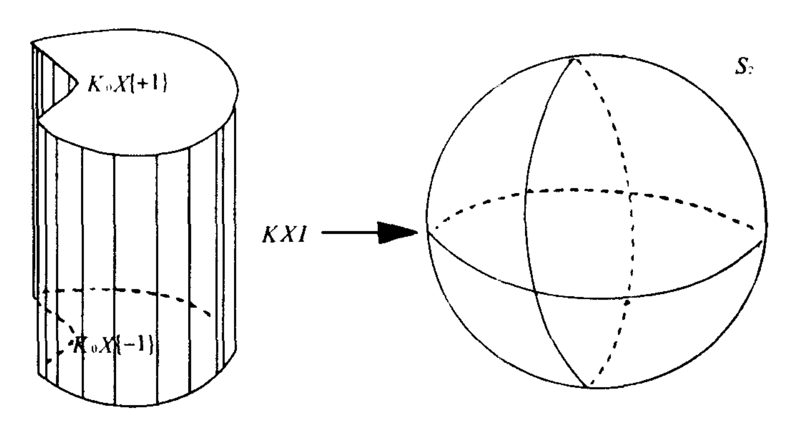


图 12.4　不稳定增大丛集

$$\begin{cases} U^{\pm}(\lambda), \tau = \pm 1, \\ U^{*}(\lambda, \tau), \tau \in (-1, +1). \end{cases}$$

引理 12.7　第一陈数 $c_1(\varepsilon(K))$ 等于在 K 内 L 的特征值数目(包括代数重数).

现构造快不稳定丛 $\varepsilon_f(K)$. (12.29) 的不稳定丛是二个一维丛 $\varepsilon_f(K)$ 和 $\varepsilon_s(K)$ 的直接和. 首先构造 $\varepsilon_f(K)$. 当 $\varepsilon = 0$ 时,由(12.16) 有 $\dot{\rho} = 0$.

$\rho^2 + \rho^4 + 2\phi^2 = 2$,其中 $' = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}$,当 $\varepsilon = 0$ 时,(12.31) 变成

$$\begin{cases} \dot{R} = S, \\ \dot{S} = (4 - \rho^2 - 4\phi^2)R + 2\phi\rho\Phi, \\ \dot{\theta} = 0, \\ \dot{\Phi} = -2\dfrac{\phi}{\rho}S, \\ \dot{\tau} = 0. \end{cases} \tag{12.40}$$

上面右端的特征值为 $\pm\sqrt{4 - \rho^2 - 8\phi^2}$ 和 0. 类似于[5] 的证明有

引理 12.8 存在 $\varepsilon_1 > 0$,使得当 $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$,则丛 $\varepsilon_f(K)$ 具有 $c_1(\varepsilon_f(K)) = 0$.

现构造慢不稳定丛 $\varepsilon_s(K)$.(12.40) 具有不变流形.

$$M_0^L = \{(R,S,\theta,\Phi,\tau) : S = 0, R = \frac{2\rho\phi}{4-\rho^2-4\phi^2},$$
$$\theta \in R, \tau \in [-1,+1]\}. \tag{12.41}$$

当 $4-\rho^2-4\phi^2 > 0$ 时,这个流形是法向双曲的.因此存在慢方程组(12.29) 的流形 M_ε^L 以 $O(\varepsilon)$ 逼近于 M_0^L.同时可证.

引理 12.9 存在 $\varepsilon_2 > 0$,使得 $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$,则丛 $\varepsilon_f(K)$ 具有 $c_1(\varepsilon_s(K)) = 0$.

整个丛为 Whitney 丛和 $\varepsilon(K) = \varepsilon_s(K) \oplus \varepsilon_f(K)$. 令 $\varepsilon_3 = \min\{\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$,因向量丛的第一阵数为子丛的相元求和. 由引理 12.8,12.9 可得

$$c_1(\varepsilon(K)) = c_1(\varepsilon_s(K)) + c_1(\varepsilon_f(K)) = 0.$$

由此可得[20] 中如下线性稳定性结果.

定理 12.10 设 $0 < \varepsilon < \varepsilon_3$,则在 K 为边界的区域 K_0 内,没有(12.29) 的特征值.

定理 12.11 参数 $c,\nu,\beta,\sigma,\delta,\gamma,\alpha,q,m,n$ 选取得使 $p(\phi) = 0$ 具有二个解 $\phi_\pm$, $\phi_\pm^2 \leqslant \frac{35-\sqrt{73}}{64}$,则存在 $\varepsilon_0 > 0$,使当 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ 时,(12.13) 的行波解以 $O(\varepsilon)$ 逼近(12.10) 的行波解. 这个解表示(12.24),存在 $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$ 使得 $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ 时,行波是稳定的.

§ 13 Ginzburg-Landau 方程的环绕数上界估计

考虑如下的 Ginzburg – Landau 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (1+i\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+i\mu)|u|^2 u - au = 0, \tag{13.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), x \in R, \tag{13.2}$$

$$u(x+1t) = u(x,t), x \in R, t \geqslant 0, \tag{13.3}$$

其中 $a > 0, \nu, \mu$ 为给定实数. $u_0(x) \in L^2_{loc}(R)$.

定义 $f: R \to \mathbb{C}$ 为可微周期为 1 的函数, $\{f\} = \{f(x): x \in [0,1]\} \subseteq \mathbb{C}$; 则 f 环绕点 $p \notin f$ 的环绕数为

$$\operatorname{ind}_p(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x) - p}\mathrm{d}x. \tag{13.4}$$

记 H 为复值平方可积函数; H 为 R 域上的 Hilbert 空间, 引入内积 $(u, \nu) = \operatorname{Re}\int_\Omega uv^* \mathrm{d}x$, $|u| = (u, v)^{\frac{1}{2}}$.

作 F 氏展开

$$u = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j e^{2\pi ijx}, u_j \in \mathbb{C}, \tag{13.5}$$

它满足 $|u|^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |u_j|^2 < \infty$.

设 A 为闭无界正算子.

$$A^s u = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |2\pi j|^{2s} u_j e^{2\pi ijx}, \tag{13.6}$$

其中 u 为(13.5)所定义, $s > 0$. 这些算子的定义域为 $D(A^s) = \left\{u = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j e^{2\pi ijx}: \sum_{j=-\infty}^{\infty} |2\pi j|^{2s} |u_j|^2 < \infty\right\}$.

注意到

$$|A^{\frac{m}{2}} u| = |u^{(m)}| = \frac{\partial^m u}{\partial x^m}, u \in D(A^{\frac{m}{2}}), m \in \mathbb{N}. \tag{13.7}$$

定义 $B(u, v, \omega) = uv\omega^*$, $u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$. 方程(13.1)可写成形式

$$u_t(1 + i\nu)Au + (1 + i\mu)B(u, u, u) - au = 0. \tag{13.8}$$

为了建立非线性项 B 的估计, 我们用如下 Agmon 不等式

$$|u|_\infty^2 = (\sup_{x\in\Omega} |u(x)|)^2 \leqslant |u||u_x| + |u|^2. \tag{13.9}$$

对函数 $u \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$, 它是 1 周期 $\left(u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$, 且

$$|u|_\infty^2 \leqslant |u||u_x|. \tag{13.10}$$

如 $\int_\Omega u\mathrm{d}x = 0$, 则有

$$|(B(u_1,u_2v),v)| \leqslant |u_1||u_2||v|_\infty^2$$
$$\leqslant |u_1||u_2|(|v||v_x|+|v|^2), \tag{13.11}$$

类似有

$$|(B(v,u_1,u_2),v)| \leqslant |u_1||u_2||v|_\infty^2$$
$$\leqslant |u_1||u_2|(|v||v_x|+|v|^2). \tag{13.12}$$

对应于初值 u_0 的解 $u(t) = S(t)u_0$ 对 $t \geqslant 0$, $S(t)$ 具有以下性质:

(ⅰ) $S(t)H \subseteq H$,对 $t \geqslant 0$, $\lim\limits_{t\to 0^+} S(t)u_0 = S(0)u_0 = u_0$, $u_0 \in H$.

(ⅱ) $S(t)s(s)u_0 = S(t+s)u_0, s, t \geqslant 0, u_0 \in H$.

(ⅲ) $S(t)$ 是一对一的,对任何 $t \geqslant 0$.

(ⅳ) 存在常数 $\rho_0 = \rho_0(a,\nu,\mu)$, $t_0 = t_0(a,\nu,\mu)$ 使得对 $t \geqslant t_0$ $S(t)H \subseteq B = \{u \in H: |u| \leqslant \rho_0\}$.

更进一步,$S(t)B \subseteq B$, $\forall t \geqslant 0$,可取 $\rho_0 = 2\sqrt{a}$. 整体吸引子为 $\mathscr{A} = \bigcap\limits_{t>0} S(t)B$.

吸引子的性质:

(a) $\mathscr{A} \neq 0$.

(b) $S(t)\mathscr{A} = \mathscr{A}, t \geqslant 0$.

(c) $|u_0| \leqslant \rho_0, u_0 \in \mathscr{A}$.

(d) $\lim\limits_{t\to\infty} \sup\limits_{u_0 \in H} \mathrm{dist}(S(t)u_0, \mathscr{A}) = 0$.

解的 Gevrey 类正则性:对 $\tau > 0$,考虑算子

$$e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} u = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j e^{\tau|2\pi j|} e^{2\pi ijx}, \tag{13.13}$$

对所有 $u = \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} u_j e^{2\pi ijx}$,使得

$$|u|_\tau^2 = |e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} u|^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{2\tau|2\pi j|} |u_j|^2 < \infty. \tag{13.14}$$

$D(e^{\tau A^{\frac{1}{2}}})$为$e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}$的定义域,称为函数具参数$\tau$的Gevrey类.它是一个Hilbert空间,定义内积

$$(u,v)_2=(e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}u,e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}v),u,v\in D(e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}),$$

$$|u|_\tau=(u,u)_\tau^{\frac{1}{2}}.$$

令$u_k\in D(e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}),k=1,2,3,4,\tau>0.$

对$u_k=\sum_{j=-\infty}^{\infty}u_{kj}e^{2\pi ijx}$和对固定$\tau>0$,令

$$\tilde{u}_k=\sum_{j=-\infty}^{\infty}|u_{kj}|e^{\tau|2\pi j|}e^{2\pi ijx}=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\tilde{u}_{kj}e^{2\pi ijx}.$$

引理13.1 $|(B(u_1,u_2,u_3),u_4)_\tau|\leqslant(B(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\tilde{u}_3),\tilde{u}_4).$

证 $|(B(u_1,u_2,u_3),u_4)_\tau|$

$$=\left|\mathrm{Re}\sum_{j,m,k=-\infty}^{\infty}u_{1,j}u_{2,k}u_{3,j+k-m}^{*}u_{4,m}^{*}e^{2\tau|2\pi m|}\right|$$

$$\leqslant\sum_{j,m,k=-\infty}^{\infty}|u_{1,j}||u_{2,k}||u_{3,j+k-m}^{*}||u_{4,m}^{*}|e^{2\tau|2\pi m|}$$

$$=\sum_{j,m,k=-\infty}^{\infty}\tilde{u}_{1,j}\tilde{u}_{2,k}\tilde{u}_{3,j+k-m}\tilde{u}_{4,m}\exp(2\pi\tau(|m|-|j+k-m|-|j|-|k|))$$

$$\leqslant\sum_{j,m,k=-\infty}^{\infty}\tilde{u}_{1j}\tilde{u}_{2k}\tilde{u}_{3,j+k-m}\tilde{u}_{4,m}=(B(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\tilde{u}_3),\tilde{u}_4).$$

从(13.14)知$|\tilde{u}_i|=|u_i|_\tau,|\tilde{u}_{ix}|=|A^{\frac{1}{2}}u_i|_\tau,\tau\geqslant0,i=1,2,3,4.$连同引理,(13.11),(13.12)推出

$$|(B(u_1,u_2,v),v)_\tau|\leqslant|u_1|_\tau|u_2|_\tau(|v|_\tau|A^{\frac{1}{2}}v|_\tau+|v|_\tau^2),\tag{13.15}$$

$$|(B(v,u_1,u_2),v)_\tau|\leqslant|u_1|_\tau|u|_\tau(|v|_\tau|A^{\frac{1}{2}}v|_\tau+|v|_\tau^2).\tag{13.16}$$

定理13.2 存在常数$\rho_1=\rho_1(\alpha,\nu,\mu)$使得下式成立:如果$|u_0|\leqslant\rho_0,u(t)=S(t)u_0$,则

$$|e^{(\frac{3}{8}\rho_1)tA^{\frac{1}{2}}}u(t)| \leqslant 2\rho_0, 0 \leqslant t \leqslant 8\rho_1^2/3 = t_1, \tag{13.17}$$

$$|e^{\rho_1 A^{\frac{1}{2}}}u(t)| \leqslant 2\rho_0, t > 8\rho_1^2/3 = t_1, \tag{13.18}$$

其中选取

$$\rho_1 = \frac{3}{8}(2a + 8\rho_0^2\sqrt{1+\mu^2} + 16\rho_0^4(1+\mu^2)^{-\frac{1}{2}}. \tag{13.19}$$

证 令 $\varphi(t) = (u, u)_{\alpha t}, \alpha > 0$,则

$$\frac{1}{2}\varphi'(t) = (e^{\alpha tA^{\frac{1}{2}}}u_t, e^{\alpha tA^{\frac{1}{2}}}u) + \alpha(A^{\frac{1}{2}}e^{\alpha tA^{\frac{1}{2}}}u, e^{\alpha A^{\frac{1}{2}}}u)$$

$$= -(Au, u)_{\alpha t} - ((1+i\mu)B(u, u, u)_{\alpha t} + \alpha|u|_{\alpha t}^2 + \alpha|A^{\frac{1}{4}}u|_{\alpha t}^2.$$

因$(iv, Au, u)_{\alpha t} = 0$,由(13.15)和插值不等式可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\varphi'(t) + |A^{\frac{1}{2}}u|_{\alpha t} &\leqslant \sqrt{1+\mu^2}(|u|_{\alpha t}^4 + |u|_{\alpha t}^3|A^{\frac{1}{2}}u|_{\alpha t} \\ &\quad + \alpha|u|_{\alpha t}|A^{\frac{1}{2}}u|_{\alpha t} \\ &\leqslant \sqrt{1+\mu^2}|u|_{\alpha t}^4 + \frac{1}{2}(1+\mu^2)|u|_{\alpha t}^6 + \frac{1}{2}|A^{\frac{1}{2}}u|_{\alpha t}^2 \\ &\quad + \alpha|u|_{\alpha t}^2 + \frac{1}{2}\alpha^2|u|_{\alpha t}^2 + \frac{1}{2}|A^{\frac{1}{2}}u|_{\alpha t}^2.\end{aligned}$$

因此

$$\varphi'(t) \leqslant (2a + \alpha^2)\varphi(t) + 2\sqrt{1+\mu^2}\varphi^2(t) + (1+\mu^2)\varphi^3(t).$$

注意到假设 $\varphi(0) \leqslant \rho_0^2$,只要 $\varphi(t) \leqslant 4\rho_0^2$,即有

$$\varphi'(t) \leqslant 4\rho_0^2(2a + \alpha^2 + 8\rho_0^2\sqrt{1+\mu^2} + 16\rho_0^4(1+\mu^2)) = 8\alpha^2\rho_0^2.$$

选取

$$\alpha = (2a + 8\rho_0^2\sqrt{1+\mu^2} + 16\rho_0^4(1+\mu^2))^{\frac{1}{2}}.$$

这就证明了

$$\varphi(t) \leqslant \varphi(0) + 8\alpha^2\rho_0^2 t, t \leqslant \frac{3}{8\alpha^2} = t_1.$$

现取 $\rho_1 = \dfrac{3}{8\alpha}$,即得(13.17).不等式(13.18)作为(13.17)和$S(t)$性质(iv)的推论.

推论 13.3(空间解析性) 对任何 $u_0 \in H$,使得 $|u_0| \leqslant \rho_0$,

和每个固定 $t \geqslant t_1$，函数 $\mathrm{Re}S(t)u_0$ 和 $\mathrm{Im}S(t)u_0$ 为空间变元的实解析函数，它的解析半径至少为 ρ_1，我们有估计

$$\left.\begin{aligned}&\left|\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{Re}S(t)u_0\right| \leqslant n!2\rho_0\cdot\rho_1^{-n},\ n=0,1,2\cdots,\\&\left|\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{Im}S(t)u_0\right| \leqslant n!2\rho_0\rho_1^{-n},\ n=0,1,2\cdots,\end{aligned}\right\}\ \forall t\geqslant t_1.$$

证 这两个估计来自(13.18)和(13.7)，为得到解析性，固定任意 $\varepsilon\in(0,1)$，取 $n\geqslant 1$，利用(13.10)得

$$\left|\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{Re}S(t)u_0\right|_\infty \leqslant \left|\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{Re}S(t)u_0\right|^{\frac{1}{2}}\left|\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\mathrm{Re}S(t)u_0\right|^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant (n+1)!2\rho_0\rho_1^{-\frac{1}{2}}\rho_1^{-n} \leqslant n!2\varepsilon^{-1}\rho_0\rho_1^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1+\varepsilon}{\rho_1}\right)^n.$$

对 $n=0$，利用(13.9)得

$$|\mathrm{Re}S(t)u_0|_\infty \leqslant (2\rho_0)^2\left(1+\frac{1}{\rho_1}\right).$$

$\mathrm{Re}S(t)$ 的解析性来自[21，定理 19.9]. 相同的原理对 $\mathrm{Im}S(t)u_0$ 可得.

现考虑高阶导数的强挤压性.

定理 13.4([22]，强挤压性) 存在常数 $\rho_2=\rho_2(a,\nu,\mu)$ 和 $\rho_3=\rho_3(a,\nu,\mu)$ 具有如下性质：如 u_1,u_2 为 GL 方程的解，且 $|u_1(0)|\leqslant\rho_0$，$|u_2(0)|\leqslant\rho_0$. 令 $v=u_1-u_2$，则如下断言之一成立：

(a) $|v(t)|\leqslant|v(0)|e^{-\rho_2 t}, t\geqslant 0$,

(b) 存在 $t'>0$，使得

$$|A^{\frac{1}{2}}v(t)|^2\leqslant\rho_3|v(t)|^2, t\geqslant t'. \tag{13.20}$$

进一步，如(13.20)对 $t=t''$ 成立，则它对任何 $t'\geqslant t''$ 成立.

推论 13.5([22]) 如 $u_1,u_2\in\mathscr{A}$，$v_1=u_1-u_2$，则

$$|A^{\frac{1}{2}}v|^2\leqslant\rho_3|v|^2.$$

定理 13.6 存在常数 $\rho_4=\rho_4(a,\nu,\mu)$，$t_2=t_2(a,\nu,\mu)$ 使

以下结论成立:如 u_1,u_2 为 GL 方程的解使得

$$|e^{\rho_1 A^{\frac{1}{2}}}u_i(t)|\leqslant 2\rho_0,\quad t\geqslant 0,\quad i=1,2 \tag{13.21}$$

和

$$|A^{\frac{1}{2}}v(t)|^2\leqslant \rho_3|v(t)|^2, \tag{13.22}$$

其中 $v=u_1-u_2$,则有

$$|e^{\rho_4 A^{\frac{1}{2}}}v(t)|\leqslant 2|v(t)|. \tag{13.23}$$

证 易知

$$\begin{aligned} v_t+(1+i\nu)Av+(1+i\mu)(B(u_1,u_2,v)\\ +B(v,u_1+u_2,u_2)-av=0. \end{aligned} \tag{13.24}$$

令 $\varphi(t)=(v,v)_{\alpha t}$,固定 $\alpha>0$,则对 $\alpha t\leqslant\rho_1$ 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\varphi'(t)&=(e^{\alpha A^{\frac{1}{2}}}vt,e^{\alpha tA^{\frac{1}{2}}}v)+\alpha(A^{\frac{1}{2}}e^{\alpha tA^{\frac{1}{2}}}v,e^{\alpha tA^{\frac{1}{2}}}v)\\ &=-(Av,v)_{\alpha t}-((1+i\mu)B(u_1,u_2,v),v)_{\alpha t}\\ &\quad-((1+i\mu)B(v,u_1+u_2,u_2),v)_{\alpha t}\\ &\quad+\alpha|v|_{\alpha t}^2+\alpha|A^{\frac{1}{4}}v|_{\alpha t}. \end{aligned}$$

由估计 (13.15),(13.16) 和(13.21) 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\varphi'(t)+|A^{\frac{1}{2}}v|_{\alpha t}^2&\leqslant\sqrt{1+\mu^2}|u_1|_{\alpha t}^2(|v|_{\alpha t}|A^{\frac{1}{2}}v|_{\alpha t}+|v|_{\alpha t}^2)\\ &\quad+\sqrt{1+\mu^2}|u_1+u_2|_{\alpha t}|u_2|_{\alpha t}(|v|_{\alpha t}|A^{\frac{1}{2}}v|_{\alpha t}+|v|_{\alpha t}^2)\\ &\quad+\alpha|v|_{\alpha t}^2+\alpha|v|_{\alpha t}|A^{\frac{1}{2}}v|_{\alpha t}\\ &\leqslant|v|_{\alpha t}|A^{\frac{1}{2}}v|_{\alpha t}(12\rho_0^2\sqrt{1+\mu^2}+\alpha)\\ &\quad+|v|_{\alpha t}^2(12\rho_0^2\sqrt{1+\mu^2}+a)\\ &\leqslant 72\rho_0^4(1+\mu^2)|v|_{\alpha t}^2+\frac{1}{2}|A^{\frac{1}{2}}v|_{\alpha t}^2\\ &\quad+\frac{1}{2}\alpha^2|v|_{\alpha t}^2+\frac{1}{2}|A^{\frac{1}{2}}v|_{\alpha t}^2\\ &\quad+|v|_{\alpha t}^2(12\rho_0^2\sqrt{1+\mu^2}+a),\alpha t\leqslant\rho_1. \end{aligned}$$

因此

$$\varphi'(t) \leqslant \varphi(t)(144\rho_0^4(1+\mu^2)+a^2+24\rho_0^2\sqrt{1+\mu^2}+2a)$$
$$=\varphi(t)(\lambda_1+a^2), \alpha \leqslant \rho_1. \tag{13.25}$$

另一方面,作(13.24)和 v 的内积,由(13.22)推出

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|v|^2 = -|A^{\frac{1}{2}}v|^2 - [((1+i\mu)B(u_1,u_2,v),v)$$
$$-((1+i\mu)\cdot B(u_1,u_1+u_2,v),v] + a|v|^2$$
$$\geqslant -\rho_3|v|^2 - 12\rho_0^2\sqrt{1+\mu^2}(|v||A^{\frac{1}{2}}v|+|v|^2)$$
$$\geqslant -|v|^2(\rho_3+12\rho_0^2\rho_3^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\mu^2}+12\rho_0^2\sqrt{1+\mu^2})$$
$$= -\frac{\lambda^2}{2}|v|^2, t \geqslant 0,$$

可得

$$|v(t)|^2 \geqslant e^{-\lambda_2 t}|v(0)|^2.$$

连同(13.25)得

$$|e^{\alpha+A^{\frac{1}{2}}}v(t)|^2 \leqslant e^{(\lambda_1+\lambda_2+\alpha^2)t}|v(t)|^2, \alpha t \leqslant \rho_1.$$

选取 $\alpha = \max\{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}\}, t = t_2 = \min\left\{\frac{1}{4\lambda_1}, \frac{1}{4\lambda_2}, \frac{\rho_1}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{\rho_1}{\sqrt{\lambda_2}}\right\}$和 $\rho_4 = \alpha t_4$,则有

$$|e^{\rho_4 A^{\frac{1}{2}}}v(t_2)| \leqslant e^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}|v(t_2)|^2 \leqslant 4|v(t_2)|^2.$$

得到(13.23),$t = t_2$. 利用对时间的平移,可得(13.23),对一切 $t \geqslant t_2$.

附注 13.7 如果忽略对 μ, ν 的依赖性,可得

$$\begin{cases} \rho_0 = O(a^{\frac{1}{2}}), \\ \rho_1^{-1} = O(a), \\ \rho_2^{-1} = O(a^{-2}), \\ \rho_3 = O(a^4), & a \to \infty \\ \lambda_1 = O(a^2), \\ \lambda_2 = O(a^4), \\ \rho_4^{-1} = O(a^{-2}). \end{cases}$$

推论 13.8 设 $u_1, u_2 \in \mathscr{A}, v = u_1 - u_2$,则有

(ⅰ) $|v|_{\rho_4} \leqslant 2|v|$;

(ⅱ) $|v^{(n)}| \leqslant 2n!\rho_4^{-n}|v|, n = 0,1,2,\cdots$;

(ⅲ) $|v^{(n)}|_\infty \leqslant \frac{M}{2}n!(\frac{2}{\rho_4})^n|v|_\infty$,对 $n = 0,1,2\cdots$,

其中 $M = \max\left\{4\rho_4^{-\frac{1}{2}}, 2\left(1 + \frac{2}{\rho_4}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$.

证 由吸引子性质(b),存在 $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \in \mathscr{A}$,使得 $S(t_1 + t_2)\tilde{u}_i = u_i, i = 1,2$. 由性质(c)和定理 13.2,我们有

$$|e^{\rho_1 A^{\frac{1}{2}}}S(t)\tilde{u}_i| \leqslant 2\rho_0, t \geqslant t_1, \quad i = 1,2.$$

由推论 13.5 有

$$|A^{\frac{1}{2}}(S(t)\tilde{u}_1 - S(t)\tilde{u}_2)| \leqslant \rho_3|S(t)\tilde{u}_1 - S(t)\tilde{u}_2|, \quad t \geqslant t_1.$$

由定理 13.6,即得(ⅰ),(ⅱ)易从(ⅰ)得到.

(ⅲ) 对 $n > 1$,从(13.10)和(ⅱ)有

$$|v^{(n)}|_\infty \leqslant |v^{(n)}|^{\frac{1}{2}}|v^{(n+1)}|^{\frac{1}{2}} \leqslant 2(n+1)!\rho_4^{-\frac{1}{2}}\rho_4^{-n}|v|$$

$$\leqslant 2n!\rho_4^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\rho_4}\right)^n|v|.$$

对 $n = 0$ 可用(13.9)和(ⅱ):

$$|v|_\infty \leqslant |v|^{\frac{1}{2}}(|v| + |v_x|)^{\frac{1}{2}} \leqslant |v|\left(1 + \frac{2}{\rho_4}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

因 $|v| \leqslant |v|_\infty$,这就证明了(ⅲ).

推论 13.9 设 $u_1, u_2 \in \mathscr{A}, v = u_1 - u_2$,函数 $\mathrm{Re}v$ 和 $\mathrm{Im}v$ 能分别延拓为函数 v_r 和 v_i,它在

$$\pi_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}z| < \delta\}$$

是全纯的,$\delta = \frac{\rho_4}{4}$ 使得

$$|v_r(z)| \leqslant M|v|_\infty = M\sup_{x\in\Omega}|v(x)|, x \in \pi_\delta,$$

$$|v_i(z)| \leqslant M|v|_\infty = M\sup_{x\in\Omega}|v(x)|, z \in \pi_\delta.$$

证 由推论 13.3 可知函数 $\mathrm{Re}v$, $\mathrm{Im}v$ 是实解析的,因此,它们

能被延拓至 $\pi_{2\delta}$ 上的全纯函数(推论 13.8(ⅲ)). 为得到其他的断言,取 $z \in \pi_\delta$,对 v_r 作 F 氏展开:

$$|v_r(z)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{Re}v^{(n)}(\mathrm{Re}z)\cdot(z-\mathrm{Re}z)^n\right|$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}Mn!\frac{1}{(2\delta)^n}|v|_\infty\right)\delta^n = M|v|_\infty.$$

相同的估计适用于 v_i.

现考虑环绕数的上界.

命题 13.10 设 v 为一函数满足命题 13.9 的断言,且函数 $\mathrm{Re}v$ 和 $\mathrm{Im}v$ 的每一个至少在 Ω 上具有 m 个零点,这里 m 为非负整数. 如果

$$m \geqslant \max\left\{0, \frac{\log(M\sqrt{2})}{-\log\left(\tanh\frac{\pi}{4\delta}\right)}+1\right\} = m_0,$$

则 $v=0$.

为证明这个命题,我们需要如下的 Schwatz 引理.

引理 13.11 设函数 f 在带 π_δ 上全纯,$\delta > 0$ 且

$$|f(z)| \leqslant M', \quad M' > 0, \quad z \in \pi_\delta.$$

设 $z_1, z_2, \cdots, z_m \in \pi_\delta$ 为 $f(Z)$ 的零点,则

$$|f(z)| \leqslant M'\prod_{j=1}^{m}\left|\tanh\left(\frac{\pi(z-z_j)}{4\delta}\right)\right|, z \in \pi_\delta.$$

命题 13.10 的证明. 设 v_r 和 v_i 分别为 $\mathrm{Re}v$, $\mathrm{Im}v$ 的全纯扩张,且 v_1 为函数 v_r 或 v_i 之一,$x_1, \cdots, x_m$ 为 v_1 的零点,$m \geqslant m_0$,则由 Schwatz 引理,

$$|v_1|_\infty = \sup_{x\in\Omega}|v_1(x)| \leqslant M|v|_\infty\prod_{j=1}^{m}\sup_{x\in\Omega}\left|\tanh\left(\frac{\pi(x-x_j)}{4\delta}\right)\right|$$

$$\leqslant M\left(\tanh\left(\frac{\pi}{4\delta}\right)^m\right)|v|_\infty.$$

因此

$$|v|_\infty = \sup_{x\in\Omega}(|\mathrm{Re}v(x)|^2 + |\mathrm{Im}v(x)|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant M\sqrt{2}\left(\tanh\left(\frac{\pi}{4\delta}\right)\right)^{m}|v|_{\infty},$$

$m \geqslant m_0$,那么 $M\sqrt{2}\left(\tanh\left(\frac{\pi}{4\delta}\right)\right)^{m} < 1$. 于是 $v = 0$ 在 Ω 上,命题得证.

最后叙述和证明主要结果:

定理 13.12 设 $u \in \mathscr{A}, p \in$.

(ⅰ) 如每个函数 $\mathrm{Re}(u-p)$ 和 $\mathrm{Im}(u-p)$ 在 Ω 上至少有 m_0+1 个零点,则 $u(x) = p, x \in \Omega$.

(ⅱ) 如 $p \notin \{u\}$,则 $|\mathrm{Ind}p(u)| \leqslant \frac{m_0}{2}$.

证 显然(ⅰ)推出(ⅱ).

(ⅰ)的证明,令 $u \in \mathscr{A}$,设函数 $\mathrm{Re}(u-p)$ 和 $\mathrm{Im}(u-p)$ 至少有 m_0+1 个零点. 因 $\mathrm{Re}(u-p)$ 和 $\mathrm{Im}(u-p)$ 为实解析函数,能选取 $0 \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_{m_0+1} \leqslant 1$ 和 $0 \leqslant y_1 < y_2 < \cdots < y_{m_0+1} \leqslant 1$,使得 $x_1, \cdots, x_{m_0+1}$ 为 $\mathrm{Re}(u-p)$ 在 $[x_1, x_{m_0+1}]$ 上的所有零点, $y_1, \cdots, y_{m_0+1}$ 为 $\mathrm{Im}(u-p)$ 在 $[y_i, y_{m_0+1}]$ 上的所有零点,选取正数

$$\varepsilon < \min\left\{\min_{1\leqslant j\leqslant m_0}(x_{j+1}-x_j), \min_{1\leqslant j\leqslant m_0}(y_{j+1}-y_j)\right\}. \tag{13.26}$$

令 $u_1(x) = u(x), u_2(x) = u(x-\varepsilon), x \in R$,因 GL 方程在空间变元的平移下是不变的,我们有 $u_1, u_2 \in \mathscr{A}$. 取 $v = u_1 - u_2$,令 $i \in \{1,2,\cdots,m_0\}$. 计算

$\mathrm{Re}v(x_i+\varepsilon) = \mathrm{Re}u(x_i+\varepsilon) - \mathrm{Re}u(x_i) = \mathrm{Re}u(x_i+\varepsilon) - \mathrm{Re}p,$

$\mathrm{Re}v(x_{i+1}) = \mathrm{Re}u(x_{i+1}) - \mathrm{Re}u(x_{i+1}-\varepsilon) = \mathrm{Re}p - \mathrm{Re}u(x_{i+1}).$

因 $x_i, x_{i+1} \in [x_i, x_{i+1}]$, $\mathrm{Re}v$ 至少在 (x_i, x_{i+1}) 一次消失,推之,至少在 Ω 上 m_0 次消失. 类似, $\mathrm{Im}v$ 至少在 Ω 内 m_0 次消失. 由令题 13.10 得 $v = 0$,即 $u(x) = u(x-\varepsilon)$,对任何 $\varepsilon > 0$ 满足(13.26),因此 u 是一个常数. 定理证毕.

§14 广义 Ginzburg-Landau 方程的离散吸引子及其维数估计

考虑如下广义 GL 方程

$$\partial_t u + \nu u_x = \chi u + (\gamma_r + i\gamma_i) u_{xx} - (\beta_r + i\beta_i) |u|^2 u$$
$$- (\delta_r + i\delta_i) |u|^4 u - (\lambda_r + i\lambda_i) |u|^2 u_x$$
$$- (\mu_r + i\mu_i) u^2 \overline{u}_x, \tag{14.1}$$

其中 γ_r, δ_r 和 χ 为正常数，$i = \sqrt{-1}$，$\nu, \gamma_i, \beta_r, \beta_i, \delta_r, \delta_i, \lambda_r, \lambda_i, \mu_r$ 和 μ_i 均为实常数，考虑方程(14.1)的周期边界条件

$$u(x+1, t) = u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \tag{14.2}$$

和初始条件

$$u(x, 0) = u_0(x), x \in \mathbb{R}. \tag{14.3}$$

研究 GL 方程周期初值问题(14.1),(14.2),(14.3)的空间离散化.

令 $J \in \mathbb{N}$，$h = \frac{1}{J}$，近似函数 $u(x) \in L^2(0,1)$ 为

$$u = (u_1, u_2, \cdots, u_J)^{tr} = \left(u\left(\frac{1}{J}\right), u\left(\frac{2}{J}\right), \cdots, u(1)\right)^{tr}. \tag{14.4}$$

通常离散负 Laplace 算子 $-\Delta$ 是周期边界条件，用差分格式置为

$$A = J^2 A_1 = J_2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 2 & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & -2 & 2 & -1 \\ -1 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{J \times J} \tag{14.5}$$

用如下符号表示：

$$u_{jx} = \frac{1}{h}(u_{j+1} - u_j) = \frac{1}{h}\Delta_+ u_j, u_{j\bar{x}} = \frac{1}{2h}(u_{j+1} - u_{j-1}) = \frac{1}{h}\Delta_- u_j,$$

$$u_{j\hat{x}} = \frac{1}{2h}(u_{j+1} - u_{j-1}) = \frac{1}{2h}(\Delta_+ u_j + \Delta_- u_j).$$

此时问题(14.1),(14.2),(14.3) 近似为

$$\begin{aligned}\partial_t u_j + \nu u_{j\hat{x}} = & \chi u_j + (\gamma_r + i\gamma_i) u_{j\bar{x}x} - (\beta_r + i\beta_i) | u_j |^2 u_j \\ & - (\delta_r + i\delta_i) | u_j |^4 u_j - (\lambda_r + i\lambda_i) P(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}) \\ & - (\mu_\gamma + i\mu_i) Q(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}),\end{aligned} \tag{14.6}$$

其中 $P(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}) = \frac{1}{2}\bar{u}_j(u_j^2)_{\hat{x}} = \frac{1}{4h}\bar{u}_j(u_{j+1}^2 - u_{j-1}^2)$,

$$\begin{aligned}Q(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}) &= u_j(| u_j |^2)_{\hat{x}} - \frac{1}{2}\bar{u}_j(u_j^2)_{\hat{x}} \\ &= \frac{1}{4h}[2u_j(| u_{j+1} |^2 - | u_{j-1} |^2) - \bar{u}_j(u_{j+1}^2 - u_{j-1}^2)],\end{aligned} \tag{14.7}$$

$$u_j(t) = u_{j+1}(t), \tag{14.8}$$

$$u_j(0) = u_0(x_j), \quad j = 1,2,\cdots,J. \tag{14.9}$$

两个离散复周期函数 $u_h = \{u_j \mid j = 1,\cdots,J\}$ 和 $v_h = \{v_j \mid j = 1,2,\cdots,J\}$ 为

$$(u, v)_h = \sum_{j=1}^{J} u_j \bar{v}_j h,$$

其中 $\bar{v}_j$ 表示 v_j 的复数共轭,对于离散函数 u_h 和它的 k 阶差商 $\delta^k u_h (k > 0)$ 的模可表为

$$\| \delta^k u_h \|_p = \left(\sum_{j=1}^{J-k} \left\| \frac{\Delta_+^k u_j}{h^k} \right\|^p h \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\| \delta^k u_h \|_\infty = \max_{j=1,\cdots,J-k} \left\| \frac{\Delta_+^k u_j}{h^k} \right\|,$$

其中 $k > 0$ 为任何非负整数,p 为实数,现叙述某些插值关系关于离散函数 u_h 某些差商模在[0,1]上:

引理 14.1 对任何离散函数 $u_h = \{u_j \mid j = 1,2,\cdots,J\}$ 有

$$\| u_h \|_\infty \leqslant K_1 \| u_k \|_2^{\frac{1}{2}} (\| \delta u_h \|_2 + \| u_h \|_2)^{\frac{1}{2}}, \tag{14.10}$$

$$\| \delta u_h \|_2 \leqslant K_2 \| u_h \|_2^{\frac{1}{2}} (\| \delta^2 u_h \|_2 + \| u_h \|_2)^{\frac{1}{2}}, \quad (14.11)$$

$$\| \delta^k u_h \|_p \leqslant K_3 \| u_h \|_2^{1 - \frac{k + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}}{k}} \cdot (\| \delta^h u_h \|_2 + \| u \|_2)^{\frac{k + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}}{h}}, \quad (14.12)$$

其中 K_1, K_2 和 K_3 为正常数与离散函数 u_h 和步长无关.

$$2 \leqslant p \leqslant \infty, 0 \leqslant k < n.$$

为简单记，令 $\| u_h \|_2 = \| u_h \|$，$\| u_h \|_{H^1} = \| \delta u_h \| + \| u_h \|$，$\| u_h \|_{H^2} = \| \delta^2 u_h \| + \| u_h \|$，有时记 u_h 为 u.

引理 14.2 设二个复离散函数 $f_h = \{ f_j \mid j = 1, \cdots, J \}$ 和 $g_h = \{ g_j \mid j = 1, 2, \cdots, J \}$ 满足周期条件 $f_j = f_{j+J}, g_j = g_{j+J}$，有

$$\begin{cases} \mathrm{Re} \sum_{j=1}^{J} \overline{f}_j (f_{j+1} - f_{j-1}) = 0, \\ (f_j g_j)_x = f_{j+1} g_{jx} = f_{jx} g_j, \\ (f_j g_j)_{\hat{x}} = f_{j+1} g_{j\hat{x}} + f_{j\hat{x}} g_{j-1}, \\ (f, g_{\overline{x}}) = - (f_x, g). \end{cases} \quad (14.13)$$

证 直接计算得

$$\mathrm{Re} \sum_{j=1}^{J} \overline{f}_j (f_{j+1} - f_{j-1}) = \mathrm{Re} \Big[\sum_{j=1}^{J} \overline{f}_j f_{j+1} - \sum_{j'=0}^{J-1} \overline{f}_{j'+1} f_{j'} \Big].$$

利用周期条件 $\sum_{j'=0}^{J-1} \overline{f}_{j+1} f_{j'} = \sum_{j=1}^{J} \overline{f}_{j+1} f_j$，因此

$$\mathrm{Re} \sum_{j=1}^{J} \overline{f}_j (f_{j+1} - f_{j-1}) = \mathrm{Re} \sum_{j=1}^{J} (\overline{f}_j f_{j+1} - \overline{f}_{j+1} f_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{J} [\mathrm{Re} (\overline{f}_j f_{j+1} - \overline{f}_{j+1} f_j)] = 0,$$

$$(f_j, g_j)_x = \frac{1}{h} (f_{j+1} g_{j+1} - f_j g_j)$$
$$= \frac{1}{h} (f_{j+1} g_{j+1} - f_{j+1} g_j + f_{j+1} g_j - f_j g_j)$$
$$= f_{j+1} g_{jx} + f_{jx} g_j.$$

类似地

$$(f_j,g_j)_{\hat{x}} = \frac{1}{2h}(f_{j+1}g_{j+1} - f_{j-1}g_{j-1}) = f_{j+1}\frac{g_{j+1} - g_{j-1}}{2h}$$

$$+ \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2h}g_{j-1} = f_{j+1}g_{j\hat{x}} + f_{j\hat{x}}g_{j-1},$$

$$(f,g_{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^{J} f_j\bar{g}_{j\bar{x}}h = \sum_{j=1}^{J} f_j(\bar{g}_j - \bar{g}_{j-1}) = \sum_{j=1}^{J} f_j\bar{g}_j - \sum_{j=1}^{J} f_j\bar{g}_{j-1}$$

$$= \sum_{j=1}^{J} f_j\bar{g}_j - \sum_{j'=0}^{J-1} f_{j'+1}\bar{g}_{j'} = \sum_{j=1}^{J} f_j\bar{g}_j - \sum_{j=1}^{J} f_{j+1}\bar{g}_j = -(f_x,g).$$

引理 14.3 设 $\gamma_r > 0, \delta_r > 0, \chi > 0$ 和 $4\gamma_r\delta_r > (\lambda_i - \mu_i)^2$，则对离散系统(14.6),(14.8),(14.9)有

$$\| u(t) \|^2 \leqslant e^{-2\chi t} \| u(0) \|^2 + \frac{P^2}{2\chi}(1 - e^{-2\chi t}), \forall t > 0, \tag{14.14}$$

$$\int_0^\infty \| u_x(t) \|^2 \mathrm{d}t < \infty, \tag{14.15}$$

其中 $P = 2\chi + \left(\frac{\beta_r + \frac{1}{2}}{2\beta}\right)$，$\beta$ 为适当选取的确定常数.

证 作(14.6)和 u 的内积，得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| u \|^2 = -\nu\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J} u_{j\bar{x}}u_jh + \chi \| u \|^2 - \gamma_r \| u_x \|^2$$
$$- \beta_r\sum_{j=1}^{J} | u_j |^4h - \delta_r\sum_{j=1}^{J} | u_j |^6h$$
$$- \mathrm{Re}\{(\lambda_r + i\lambda_i)\sum_{j=1}^{J} P(u_{j-1},u_j,u_{j+1})\overline{u}_jh\}$$
$$- \mathrm{Re}\{(\mu_r + i\mu_i)\sum_{j=1}^{J} Q(u_{j-1},u_j,u_{j+1})\overline{u}_jh\}. \tag{14.16}$$

由引理 14.2

$$\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J} u_{j\hat{x}}\overline{u}_jh = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J}\overline{u}_j(\overline{u}_{j+1} - u_{j-1})h = 0,$$

$$\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J} P(u_{j-1},u_j,u_{j+1})\overline{u}_jh = \frac{1}{4}\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J}\overline{u}_j^2(u_{j+1}^2 - u_{j-1}^2)h = 0,$$

$$\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J} Q(u_{j-1},u_j,u_{j+1})\overline{u}_j h = \frac{1}{4}\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{J}[2|u_j|^2(|u_{j+1}|^2 - |u_{j-1}|^2) - \overline{u}_j^2(u_{j+1}^2 - u_{j-1}^2)] = 0.$$

我们有

$$\begin{aligned}
& -\mathrm{Re}\left\{(\lambda_r + i\lambda_i)\sum_{j=1}^{J} P(u_{j-1},u_j,u_{j+1})\overline{u}_j h\right\} \\
& -\mathrm{Re}\left\{(\mu_r + i\mu_i)\sum_{j=1}^{J} Q(u_{j-1},u_j,u_{j+1})u_j h\right\} \\
& = \frac{1}{4}\lambda_i \mathrm{Im}\sum_{j=1}^{J}(\overline{u}_j)^2(u_{j+1}^2 - u_{j-1}^2) - \frac{1}{4}\mu_i \mathrm{Im}\sum_{j=1}^{J}(\overline{u}_j)^2(u_{j+1}^2 - u_{j-1}^2) \\
& = \frac{1}{4}(\lambda_j - \mu_i)\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{J}(\overline{u}_j)^2(u_{j+1}^2 - u_{j-1}^2) \\
& = \frac{1}{4}(\lambda_i - \mu_i)\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{J}(\overline{u}_j)^2(u_{i+1} + u_{i-1})(u_{j+1} - u_j + u_j - u_{j-1}) \\
& \leqslant (\lambda_i - \mu_i)\sum_{j=1}^{J}|u_j|^2 \frac{|u_{j-2} + u_{j-1}|}{2}\frac{|u_{jx} + u_{j\overline{x}}|}{2}h \\
& \leqslant a_1 b_1\left(\sum_{j=1}^{J}|u_j|^4\left|\frac{u_{j+1} + u_{j-1}}{2}\right|^2 h\right)^{\frac{1}{2}}\|u_x\| \\
& \leqslant \frac{a_1^2}{2}\sum_{j=1}^{J}|u_j|^4\left|\frac{u_{j+1} + u_{j-1}}{2}\right|^2 h + \frac{b_1^2}{2}\|u_x\|^2 \\
& \leqslant \frac{a_1^2}{2}\sum_{j=1}^{J}|u_j|^6 h + \frac{b_1^2}{2}\|u_x\|^2, \qquad (14.17)
\end{aligned}$$

其中 $a_1 b_1 = |\lambda_i - \mu_i|$. Young 不等式

$$fg \leqslant \varepsilon^p \frac{f^p}{p} + \frac{\left(\frac{1}{\varepsilon}g\right)^{p'}}{p'}, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad f,g,\varepsilon > 0 \quad (14.18)$$

和周期函数性质已在不等式(14.17)中用到.

将以上估计代入(14.16),选取 a_1 和 b_1 使得

$$\alpha = 2\gamma_r - b_1^2 > 0, \quad \beta = 2\gamma_r - a_1^2 > 0.$$

我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2 \leqslant 2\chi\|u\|^2 - \alpha\|u_x\|^2 + 2\beta_r\sum_{j=1}^{J}|u_j|^4 h$$

$$- \beta \sum_{j=1}^{J} |u_j|^6 h. \tag{14.19}$$

因

$$\begin{aligned}
&-\beta |u_j|^6 + 2\beta_r |u_j|^4 + 2\chi |u_j|^2 \\
&= -\beta\left(|u_j|^3 - \frac{\beta_r + \frac{1}{2}}{\beta} |u_j| \right)^2 - |u_j|^4 \\
&\quad + \left(\frac{\left(\beta_r + \frac{1}{2}\right)^2}{\beta} + 4\chi \right) |u_j|^2 - 2\chi |u_j|^2 \\
&\leqslant -(|u_j|^2 - P)^2 + P^2 - 2\chi |u_j|^2 \\
&\leqslant P^2 - 2\chi |u_j|^2,
\end{aligned}$$

其中

$$P = 2\chi + \frac{\left(\beta_r + \frac{1}{2}\right)^2}{2\beta},$$

从(14.19)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| u \|^2 + 2\chi \| u \|^2 + \alpha \| u_x \|^2 \leqslant P^2. \tag{14.20}$$

由 Gronwall 不等式，可得(14.14). 从(14.20)和(14.14)可得(14.15). 这就证明了离散系统(14.6),(14.8),(14.9)整体解存在性.

推论 14.4 在引理 14.3 下，$\| u_0 \| \leqslant R, R > 0$，则存在离散系统(14.6),(14.8),(14.9)的整体解的存在性.

引理 14.5 在引理 14.3 条件下，存在不等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| u_x \|^2 + \gamma_r \| u_{x\bar{x}} \|^2 \leqslant E_1 (1 + \| u_x \|^2)^2, \tag{14.21}$$

其中常数 E_1 与离散函数 u_h 和步长 h 无关.

证 作(14.6)和 $u_{x\bar{x}}$ 的内积取实部，利用分部积分公式可得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| u_x \|^2 + \gamma_r \| u_{x\bar{x}} \|^2 = \chi \| u_x \|^2 + \mathrm{Re}\left\{ (\beta_r + i\beta_i) \sum_{j=1}^{J} \times |u_j|^2 u_j \bar{u}_{jx\bar{x}} h \right\} \\
+ \mathrm{Re}\left\{ (\delta_r + i\delta_i) \sum_{j=1}^{J} |u_j|^4 u_j \bar{u}_{jx\bar{x}} h \right\}
\end{aligned}$$

$$+\operatorname{Re}\left\{(\lambda_r+i\lambda_i)\sum_{j=1}^{J}P(u_{j-1},u_j,u_{j+1})\cdot\overline{u}_{jxx}h\right\}$$

$$+\operatorname{Re}\left\{(\mu_r+i\mu_i)\sum_{j=1}^{J}Q(u_{j-1},u_j,u_{j+1})\overline{u}_{jxx}h\right\}.\tag{14.22}$$

由引理 14.2,我们有

$$\sum_{j=1}^{J}|u_j|^2u_j\overline{u}_{jxx}=-\sum_{j=1}^{J}(|u_j|^2u_j)_x\overline{u}_{jx}$$

$$=-\sum_{j=1}^{J}|u_j|^2|u_{jx}|^2h-\sum_{j=1}^{J}|u_{j+1}|^2|u_{jx}|^2h-\sum_{j=1}^{J}u_ju_{j+1}\overline{u}_{jx}^2,$$

$$\sum_{j=1}^{J}|u_j|^4u_j\overline{u}_{jxx}h=-\sum_{j=1}^{J}(|u_j|^4u_j)_x\overline{u}_{jx}h$$

$$=-\sum_{j=1}^{J}|u_j|^4|u_{jx}|^2h-\sum_{j=1}^{J}u_{j+1}(|u_{j+1}|^4-|u_j|^4)\overline{u}_{jx}h$$

$$=-\sum_{j=1}^{J}|u_j|^4|u_{jx}|^2h-\sum_{j=1}^{J}(|u_{j+1}|^2+|u_j|^2)u_{j+1}\overline{u}_{jx}\times(|u_{j+1}|^2-|u_j|^2)h$$

$$=-\sum_{j=1}^{J}(|u_{j+1}|^4+|u_{j+1}|^2|u_j|^2+|u_j|^4)|u_{jx}|^2-\sum_{j=1}^{J}(|u_{j+1}|^2+|u_j|^2)u_{j+1}u_j\overline{u}_{jx}^2h,$$

因此

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_x\|^2+\gamma_r\|u_{xx}\|^2\leqslant\chi\|u_x\|^2-\beta_r\sum_{j=1}^{J}\times(|u_{j+1}|^2+|u_j|^2)\cdot|u_{jx}|^2h$$

$$+\sqrt{\beta_r^2+\beta_i^2}\sum_{j=1}^{J}|u_{j+1}||u_j||u_{jx}|^2h$$

$$-\delta_r\sum_{j=1}^{J}(|u_{j+1}|^4+|u_{j+1}|^2|u_j|^2+|u_j|^4|u_{jx}|^2)h$$

$$+\sqrt{\delta_r^2+\delta_i^2}\sum_{j=1}^{J}(|u_{j+1}|^2+|u_j|^2)|u_{j+1}||u_j||u_{jx}|^2h$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{(\lambda_r-\mu_r)^2+(\lambda_i-\mu_i)^2}\sum_{j=1}^{J}(|u_{j+1}|+|u_{j-1}|)|u_{jx}||u_{jx\bar{x}}|h$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{\mu_r^2+\mu_i^2}\sum_{j=1}^{J}|u_j|(|u_{j+1}|+|u_{j-1}|)|u_{jx}||u_{jx\bar{x}}|h. \tag{14.23}$$

应用引理 14.1,

$$\|u\|_\infty \leqslant K_1\|u\|^{\frac{1}{2}}(\|u\|+\|u_x\|)^{\frac{1}{2}},$$

可得

$$\sum_{j=1}^{J}(|u_{j+1}|^2+|u_j|^2)|u_{jx}|^2h \leqslant 2\|u\|_\infty^2\|u_x\|^2$$
$$\leqslant 2K_1\|u\|(\|u\|+\|u_x\|)\|u_x\|^2$$
$$\leqslant C(\|u_x\|^2+\|u_x\|^3)\leqslant C(\|u_x\|^2+\|u_x\|^4). \tag{14.24}$$

类似地

$$\sum_{j=1}^{J}|u_{j+1}||u_j||u_{jx}|^2h\leqslant C(\|u_x\|^2+\|u_x\|^4), \tag{14.25}$$

$$\sum_{j=1}^{J}(|u_{j+1}|^4+|u_{j+1}|^2|u_j|^2+|u_j|^4)|u_{jx}|^2h$$
$$\leqslant \|u\|_\infty^4\|u_x\|^2\leqslant C(\|u_x\|^2+\|u_x\|^4), \tag{14.26}$$

$$\sum_{j=1}^{J}(|u_{j+1}|^2+|u_j|^2)|u_{j+1}||u_j||u_{jx}|^2h$$
$$\leqslant C(\|u_x\|^2+\|u_x\|^4), \tag{14.27}$$

$$\sum_{j=1}^{J}|u_j|(|u_{j+1}|+|u_{j-1}|)|u_{jx}||u_{jx\bar{x}}|h$$
$$\leqslant \frac{\gamma_r}{2}\|u_{x\bar{x}}\|^2+\frac{1}{2\gamma_r}\sum_{j=1}^{J}|u_j|^2(|u_{j+1}|+|u_{j-1}|)^2|u_{jx}|^2h$$
$$\leqslant \frac{\gamma_r}{2}\|u_{x\bar{x}}\|^2+C(\|u_x\|^2+\|u_x\|^4). \tag{14.28}$$

将(14.24)—(14.28)代入(14.23)可得(14.21):

$$\frac{d}{dt}\| u_x \|^2 + \gamma_r \| u_{x\bar{x}} \|^2 \leqslant E_1(1 + \| u_x \|^2)^2.$$

引理 14.6(一致Gronwall引理[2]) 设 g, h, y 为三个正的局部可积函数于 $[t_0, \infty)$，使得 y' 在 $[t_0, \infty)$ 局部可积，它满足

$$\frac{dy}{dt} \leqslant gy + h, t \geqslant t_0,$$

$$\int_t^{t+r} g(s)ds \leqslant a_1, \int_t^{t+r} h(s)ds \leqslant a_2, \int_t^{t+r} y(s)ds \leqslant a_3, t \geqslant t_0,$$

其中 r, a_1, a_2, a_3 为正常数，则有

$$y(t+r) \leqslant \left(\frac{a_3}{r} + a_2\right)\exp(a_1), \forall t \geqslant t_0. \tag{14.29}$$

引理 14.7 在引理 14.3 条件下，设 $\| u_{0x} \|^2 \leqslant R, R > 0$，则对离散方程组(14.6)，(14.8)，(14.9) 的解有

$$\| u(t) \|^2 + \| u_x(t) \|^2 \leqslant E_2, \tag{14.30}$$

$$\int_t^{t+r} \| u_{x\bar{x}}(t) \|^2 dt \leqslant E'_2, \forall r > 0, \tag{14.31}$$

其中常数 E_2, E'_2 不依赖离散函数 u 和步长 h.

证 由引理 14.4 和(14.21) 我们有

$$\frac{d}{dt}\| u_x \|^2 \leqslant E_1(1 + \| u_x \|^2)^2 \leqslant 2E_1(1 + \| u_x \|^4). \tag{14.32}$$

由不等式(14.15)，$\int_t^{t+1} \| u_x \|^2 dt \leqslant a_1, \forall t \geqslant 1$. 应用引理 14.5，令 $g = y = 2E_1 \| u_x \|^2, h = c$，因此

$$\| u_x(t+1) \|^2 \leqslant (a_1 + c)\exp a_1, t \geqslant 1. \tag{14.33}$$

当 $0 < t < 1$ 时，由(14.31) 和一致 Gronwall 引理，我们有

$$\| u_x(t) \|^2 \leqslant ce^{\int_0^t \| u_x(s) \|^2 ds} \leqslant c_1, 0 \leqslant t \leqslant 2. \tag{14.34}$$

因此，从(14.32)，(14.33) 和引理 14.3 可得(14.30)，推出(14.31).

引理 14.8 在引理 14.7 条件下，设 $\| u_{0x\bar{x}} \|^2 \leqslant R, R > 0$，则离散方程组(14.6)，(14.8)，(14.9) 的解有

$$\| u(t) \|^2 + \| u_x(t) \|^2 + \| u_{x\bar{x}}(t) \|^2 \leqslant E_3, \tag{14.35}$$

其中常数 E_3 与离散函数 u 和步长 h 无关.

证　首先建立不等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| u_{x\bar{x}}(t) \|^2 + \gamma_r \| u_{x\bar{x}x} \|^2 \leqslant C(1 + \| u_{x\bar{x}}(t) \|^4), \tag{14.36}$$

事实上,作(14.6)和 $u_{\bar{x}x\bar{x}}$ 的内积,利用分部积分再取实部得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| u_{x\bar{x}} \|^2 + \gamma_r \| u_{x\bar{x}x} \|^2 &= \chi \| u_{x\bar{x}} \|^2 \\
&- \mathrm{Re}\Big[(\beta_r + i\beta_i) \sum_{j=1}^{J} | u_j |^2 u_j \overline{u}_{jx\bar{x}x\bar{x}} h \Big] \\
&- \mathrm{Re}\Big[(\delta_r + i\delta_i) \sum_{j=1}^{J} | u_j |^4 u_j \overline{u}_{jx\bar{x}x\bar{x}} h \Big] \\
&- \mathrm{Re}\Big[(\mu_r + i\mu_i) \sum_{j=1}^{J} Q(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}) \overline{u}_{jx\bar{x}x\bar{x}} h \Big].
\end{aligned} \tag{14.37}$$

由引理 14.2,可得

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{J} | u_j |^2 u_j u_{jx\bar{x}x\bar{x}} h &= \sum_{j=1}^{J} (| u_j |^2 u_j)_{x\bar{x}} \overline{u}_{jx\bar{x}} h \\
&= \sum_{j=1}^{J} [| u_j |_x^2 u_{j+1} + (u_j)^2 u_{jx}]_x \overline{u}_{jx\bar{x}} h \\
&= \sum_{j=1}^{J} [(| u_j |_{x\bar{x}}^2 u_j + u_{j\bar{x}} (| u_j |^2)_x \\
&\quad + (| u_j |^2)_{\bar{x}} u_{jx} + | u_j |^2 u_{jx\bar{x}}] \cdot \overline{u}_{jx\bar{x}} h .
\end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{J} | u_j |^4 u_j \overline{u}_{jx\bar{x}x\bar{x}} h = \sum_{j=1}^{J} [(| u_j |^4)_{x\bar{x}} u_j + u_{j\bar{x}} (| u_j |^4)_x \\
+ (| u_j |^4)_{\bar{x}} u_{jx} + | u_j |^4 u_{jx\bar{x}}] \overline{u}_{jx\bar{x}},
\end{aligned}$$

$$\Big| \sum_{j=1}^{J} P(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}) \overline{u}_{jx\bar{x}x\bar{x}} h \Big| \leqslant \frac{1}{2} \Big| \sum_{j=1}^{J} (\overline{u}_j (u_j^2)_{\hat{x}})_x \overline{u}_{jx\bar{x}x} h \Big|$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{J} | u_{j+1} (u_j^2)_{\hat{x}x} + \overline{u}_{jx} (u_j^2)_{\hat{x}} | | \overline{u}_{jx\bar{x}x} | h$$

$$\leqslant \frac{\gamma_r}{3} \| u_{jx\bar{x}xx} \|^2 + c \| u_{jx\bar{x}} \|^2, \tag{14.38}$$

$$\left| \sum_{j=1}^{J} Q(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}) \overline{u}_{jx\bar{x}x\bar{x}} h \right| \leqslant \left| \sum_{j=1}^{J} \Big[u_j(|u_j|^2)_{\hat{x}} - \frac{1}{2} \overline{u}_j (u_j^2)_{\hat{x}} \Big]_x \cdot u_{jx\bar{x}x} h \right| \leqslant \frac{\gamma_r}{3} \| u_{jx\bar{x}x} \|^2 + c \| u_{jx\bar{x}} \|^2, \tag{14.39}$$

这里 $\| u_{x\bar{x}} \| = \| u_{\hat{x}x} \| = \| u_{xx} \|$(周期情况).因此从(14.37),(14.38),(14.39)有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| u_{xx} \|^2 + \gamma_r \| u_{x\bar{x}x} \|^2 \leqslant \chi \| u_{x\bar{x}} \|^2 + c \sum_{j=1}^{J} [(|u_j|^2)_{x\bar{x}} u_j \\ &+ u_{j\bar{x}}(|u_j|^2)_x + (|u_j|^2)_{\bar{x}} + |u_j|^2 u_{jx\bar{x}}] \overline{u}_{jx\bar{x}} h \\ &+ c \sum_{j=1}^{J} |[(|u_j|^4)_{x\bar{x}} u_j + u_{j\bar{x}}(|u_j|^4)_x + (|u_j|^4)_{\bar{x}} u_{jx} \\ &+ |u_j|^4 u_{jx\bar{x}}] \cdot u_{jx\bar{x}} | h + \frac{2}{3} \gamma_r \| u_{x\bar{x}x} \|^2 + c \| u_{x\bar{x}} \|^2. \end{aligned} \tag{14.40}$$

由引理 14.1, $\| u_x \|_\infty \leqslant c(\| u_x \|^2 + \| u_{xx} \|^2)^{\frac{1}{2}} \| u_x \|^{\frac{1}{2}}$

$$\leqslant c(1 + \| u_{xx} \|^2)^{\frac{1}{2}},$$

且 $\| u \|_\infty \leqslant c$,我们有

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{J} |[(|u_j|^2)_{x\bar{x}} u_j + u_{j\bar{x}}(|u_j|^2)_x \\ &\quad + (|u_j|^2)_x u_{jx} + |u_j|^2 |u_{jx\bar{x}}|] u_{jx\bar{x}} h | \\ &\leqslant c \sum_{j=1}^{J} [|u_{jx\bar{x}}| (|u_j|^2 + |u_j||u_{j-1}| + |u_j||u_{j+1}|) \\ &\quad + (|u_{jx}|^2 + |u_{j\bar{x}}|^2 + |u_{jx}||u_{j\bar{x}}|) |u_j|] |u_{jx\bar{x}}| h \\ &\leqslant c(1 + \| u_{x\bar{x}} \|^2 + \| u_{x\bar{x}} \|^4), \end{aligned} \tag{14.41}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{J} |[(|u_j|^4)_{x\bar{x}} u_j + u_{j\bar{x}}(|u_j|^4)_x \\ &\quad + (|u_j|^4)_x u_{jx} + |u_j|^4 u_{jx\bar{x}}] \overline{u}_{jx\bar{x}} h | \end{aligned}$$

$$\leqslant c\sum_{j=1}^{J}[\,|\,u_{j,x\bar{x}}\,|\,(\,|\,u_j\,|+|\,u_{j+1}\,|$$

$$+\,|\,u_{j-1}\,|\,)^4+|\,u_j\,|^3(\,|\,u_{j,x}\,|+|\,u_{j\bar{x}}\,|\,)^2\,|\,u_{jx\bar{x}}\,|\,h$$

$$\leqslant c(1+\|u_{x\bar{x}}\|+\|u_{x\bar{x}}\|^4). \tag{14.42}$$

将(14.41),(14.42)代入(14.40)可得(14.36)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{x\bar{x}}\|^2+\gamma_r\|u_{x\bar{x}x}\|^2\leqslant E_2(1+\|u_{x\bar{x}}\|^4), \tag{14.43}$$

其中 E_2 为绝对常数，则从引理 14.6，不等式(14.31)和一致 Gronwall 引理，可得不等式(14.35).

现证离散整体吸引子的存在性及作其维数估计.

定理 14.9 设 $\gamma_r>0,\delta_r>0,\chi>0$ 和 $4\gamma_r\delta_r>(\lambda_i-\mu_i)^2$，则对任何初值在 C^J 中，$C^J=C\times\overbrace{C\times\cdots\times C}^{J次C}$，$C$ 为复系数集合，离散方程组(14.6),(14.8),(14.9)的解整体存在.进一步，如初值 u_0 满足

$$\|u_0\|\leqslant R_0,R_0>0, \tag{14.44}$$

则对 $\Gamma'_0>\Gamma_0=\dfrac{P^2}{2\chi}$,(14.6)的解 $u(t)$ 具 $u(0)=u_0$ 满足

$$\|u(t)\|\leqslant\Gamma'_0,\forall\,t\geqslant T_0=\frac{1}{2\chi}\log\frac{R_0^2}{(\Gamma'_0)^2-\Gamma_0^2}. \tag{14.45}$$

证 不等式(14.14)推出(14.15).

定理 14.10 在定理 14.9 条件下，存在半流(4.6)关于模 $\|\cdot\|$ 的整体吸引子.这个吸引子位于 $B(0,\Gamma_0)\subset C^J$ 中，其中 $B(0,\Gamma_0)$ 表示以 $O\in C^J$ 为中心，Γ_0 为半径的球.

定理 14.11 设定理 14.9 的条件下，初值 u_0 满足

$$\|u_0\|_{H^1}\leqslant R_0,\quad R_0>0, \tag{14.46}$$

则对 $\Gamma'_1>\Gamma_1=(a_1+2E_1)^{\frac{1}{2}}(\exp a_1)^{\frac{1}{2}},a_1=\frac{1}{2}[P^2+(2\chi+1)\Gamma_0^2]$ 离散方程组(14.6),(14.8),(14.9)的解 $u=u(t)$ 满足

$$\|u(t)\|_{H^1}\leqslant\Gamma'_1,\forall\,t\geqslant\Gamma_1=\max\{\Gamma_0,2\}. \tag{14.47}$$

半流(14.6)在模 $\|\cdot\|_{H^1}$ 下具有整体吸引子，这个吸引子位于

$B(0,\Gamma_1) \in C^J$ 中，其中 $B(0,\Gamma_1)$ 为以 $0 \in C^J$ 为中心，Γ_1 为半径的球.

证 从不等式(14.20)有

$$\| u(t+1) \|^2 - \| u(t) \|^2 + 2\chi\int_t^{t+1} \| u(t) \|^2 \mathrm{d}t + \alpha\int_t^{t+1} \| u_x(t) \|^2 \mathrm{d}t \leqslant P^2. \tag{14.48}$$

由定理 14.9，

$$\| u(t) \| \leqslant \Gamma_0, \forall t \geqslant \Gamma_0, \tag{14.49}$$

因此 $\int_t^{t+1} \| u_x(t) \|^2 \mathrm{d}t \leqslant a_1 = \frac{1}{\alpha}[P^2 + (2\chi+1)\Gamma_0^2]$. 从(14.33)有

$$\| u_x(t+1) \| \leqslant \Gamma_1 = (a + 2E_1)^{\frac{1}{2}}(\exp a_1)^{\frac{1}{2}}, \forall t \geqslant 1, \tag{14.50}$$

因此不等式(14.47)成立，定理得证.

类似地，从(14.21)，(14.43)和一致 Gronwall 不等式可得

定理 14.12 设定理 14.9 条件满足，且初值 u_0 满足

$$\| u_0 \|_{H^2} \leqslant R_0, \quad R_0 > 0, \tag{14.51}$$

则对 $\Gamma_0' > \Gamma_2 = (a_2 + 2E_2)\ln a_n, a_2 = \frac{\Gamma_1^2 + 2E_1(1+\Gamma_1^4)}{\gamma_r}$，离散方程组(14.6)，(14.8)，(14.9)的解 $u(t)$ 满足

$$\| u(t) \|_{H^2} \leqslant \Gamma_2', \forall t \geqslant \Gamma_2 \geqslant \Gamma_1. \tag{14.52}$$

半流(14.6)依 $\| \cdot \|_{H^2}$ 具有整体吸引子. 这个吸引子位于 $B(0,\Gamma_2) \in C^J$ 中，这里 $B(0,\Gamma_2)$ 表示以 $0 \in C^J$ 为中心，Γ_2 为半径的球.

现来估计整体吸引子的维数.

考虑(14.6)的线性化方程

$$\begin{aligned} iv_t + \nu v_{\hat{x}} &= \chi v + (\gamma_r + i\gamma_i)v_{x\bar{x}} - (\beta_r + i\beta_i)(3|u|^2 v + u^2\bar{v}) \\ &\quad - (\delta_r + i\delta_i)(3|u|^4 v + 2|u|^2 u^2 \bar{v}) \\ &\quad - (\lambda_r + i\lambda_i)\left[\frac{1}{2}\bar{v}(u^2)_{\hat{x}} + \frac{1}{2}v(u^2)_{\hat{x}} + (uv)_{\hat{x}}\bar{u}\right] \end{aligned}$$

$$-(\mu_r + i\mu_i)\left[|u|_x^2 v - \frac{1}{2}(u^2)_x \bar{v} + (v\bar{u} + u\bar{v})_x u - (uv)_x \bar{u}\right],$$

(14.53)

$$v(0) = v_0 \in C^J, \qquad (14.54)$$

其中 $u = S(t)u_0$ 为问题(14.6),(14.8),(14.9)的解.令

$$Q(t)v_0 = Q(t;u_0, v_0) = v(t), \qquad (14.55)$$

由半流(14.53)在 C^J 所确定.

由标准的方法,能证 $Q(t)$ 实际上为 $S(t)$ 在点 $u_0 \in C^J$ 上的切映照,事实上有

命题 14.13 对任何 $t \in R$,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \sup_{\substack{u_0, u_1 \in \mathscr{A} \\ 0 < \|u_0 - u_1\| < \epsilon}} \frac{\|S(t)u_0 - S(t)u_1 - Q(t;u_0)(u_0 - u_1)\|}{\|u_0 - u_1\|} = 0,$$

(14.56)

$$\sup_{u_0 \in \mathscr{A}} \|Q(t;u_0)\|_{0p} < \infty. \qquad (14.57)$$

对任何 $l \in N$,令 $v^{(j)}(t)$ 表示(14.54)具初值 $v^{(j)}(0) = \xi^{(j)} \in H^0$ 的解.则由已知方法[2]给出

$$|v^{(1)}(t) \wedge v^{(2)}(t) \wedge \cdots \wedge v^{(l)}(t)|_{\wedge^l H^1}$$

$$= |\xi^{(1)} \wedge \xi^{(2)} \wedge \cdots \wedge \xi^{(l)}|_{\wedge^l H^1} \exp\left(\int_0^t \mathrm{Re}\Gamma r(F'(u(\tau))Q_l(\tau)\right) d\tau,$$

(14.58)

其中我们已写(14.53)具形式

$$v_t = F'(u)v, \qquad (14.59)$$

这里 $Q_h(\tau)$ 表示 H^1 正交投影于 $v^{(1)}(\tau), v^{(2)}(\tau), \cdots, v^{(l)}(\tau)$ 所张的子空间.

设 $\varphi^{(k)}(\tau) \in (k \in N)$ 为正交基,是矩阵 A,即(14.5)的特征向量.我们有

$$\mathrm{ReTr}F'(u(\tau)) \cdot Q_l(\tau)$$

$$= \mathrm{Re}\sum_{K=1}^{\infty}(F'(u(\tau) \cdot Q_l(\tau)\varphi^{(k)}, \varphi^{(k)})_{H^1}$$

$$= \sum_{K=1}^{l} \mathrm{Re}(F'(u)\varphi^{(k)}, \varphi^{(k)})_{H^1}$$
$$= \sum_{K=1}^{l} (\mathrm{Re}(F'(u)\varphi^{(k)}, \varphi^{(k)}) + \mathrm{Re}((F'(u)\varphi^{(k)})_x, \varphi_x^{(k)}), \tag{14.60}$$

$$\mathrm{Re}(F'(u)\varphi^{(k)}, \varphi^{(k)}) = \chi \| \varphi^{(k)} \|^2 - \gamma_r \| \varphi^{(k)} \|^2$$
$$- \mathrm{Re}(\beta_r + i\beta_i)(2 | u |^2 \varphi^{(k)} + u^2 \overline{\varphi}^{(k)}, \varphi^{(k)}) - \mathrm{Re}(\delta_r + i\delta_i)$$
$$\cdot (3 | u |^4 \varphi^{(k)} + 2 | u |^2 \cdot u^2 \overline{\varphi}^{(k)}, \overline{\varphi}^{(k)})$$
$$- \mathrm{Re}(\mu_r + i\mu_i)(| u |_{\hat{x}}^2 \varphi^{(k)} - \frac{1}{2}(u^2)_{\hat{x}} \overline{\varphi}^{(k)} + (\varphi^{(k)} \overline{u} + u \overline{\varphi^{(k)}})_{\hat{x}} u$$
$$- (u\varphi^{(k)})_{\hat{x}} \overline{u}, \varphi^{(k)}) \leqslant \chi \| \varphi^{(k)} \|^2 - \gamma_r \| \varphi_x^{(k)} \|^2$$
$$- 2\beta_r \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{J} | u_j |^2 | \varphi_j^{(k)} |^2 h + \sqrt{\beta_r^2 + \beta_i^2} \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{J} | u_j |^2$$
$$\cdot | \varphi_j^{(k)} |^2 h + (2\sqrt{\delta_r^2 + \delta_i^2} - 3\delta_i) \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{J} | u_j |^4 | \varphi_j^{(k)} |^2 h$$
$$- \mathrm{Re}(\lambda_r + i\lambda_i) \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{J} [(u_{j+1} u_{j\hat{x}} (\overline{\varphi_j^{(k)}})^2 + u_{j+1} \varphi_{j\hat{x}}^{(k)} \overline{u}_j \overline{\varphi_j^{(k)}}$$
$$+ u_{j\hat{x}} \varphi_{j-1}^{(k)} \overline{u}_j \overline{\varphi_j^{(k)}}] h - \mathrm{Re}(\mu_r + i\mu_i) \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{J} [2u_{j+1} u_{j\hat{x}} | \varphi_j^{(k)} |^2$$
$$- u_{j+1} u_{j\hat{x}} (\overline{\varphi_j^{(k)}})^2 + (\overline{u}_{j+1} \varphi_{j\hat{x}}^{(k)} + \overline{u}_{j\hat{x}} \varphi_{j-1}^{(k)}) \overline{\varphi_j^{(k)}} u_j + (u_{j+1} \overline{\varphi_{j\hat{x}}^{(k)}}$$
$$+ u_{j\hat{x}} \overline{\varphi_{j-1}^{(k)}}) \overline{\varphi_j^{(k)} u_j} - (u_{j+1} \varphi_{j\hat{x}}^{(k)} + u_{j\hat{x}} \varphi_{j-1}^{(k)}) \overline{u}_j \overline{\varphi_j^{(k)}}] h, \tag{14.61}$$

其中

$$\sum_{j=1}^{J} | u_j |^2 | \varphi_j^{(k)} |^2 h \leqslant \| u \|_\infty^2 \| \varphi^{(k)} \|^2,$$
$$\sum_{j=1}^{J} | u_j |^4 | \varphi_j^{(k)} |^2 h \leqslant \| u \|_\infty^4 \| \varphi^{(k)} \|^2,$$
$$\sum_{j=1}^{J} [u_{j+1} u_{j\hat{x}} (\overline{\varphi_j^{(k)}})^2 + u_{j+1} \overline{u}_j \varphi_{j\hat{x}}^{(k)} \overline{\varphi}_j^{(k)} + \overline{u}_j u_{j\hat{x}} \varphi_{j-1}^{(k)} \varphi_j^{(k)}] h$$
$$\leqslant 2 \| u \|_\infty \| u_{\hat{x}} \| \| \varphi^{(k)} \|_4^2$$
$$+ \| u \|_\infty^2 \left(\varepsilon_1 \| \varphi_x^{(k)} \|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_1} \| \varphi^{(k)} \|^2 \right),$$

$$\varepsilon_1 > 0.$$

$$\left| \sum_{j=1}^{J} u_{j+1} u_{j\hat{x}} \mid \varphi_j^{(k)} \right|^2 h \Big| + \Big| \sum_{j=1}^{J} u_{j+1} u_{j\hat{x}} (\overline{\varphi_j^{(k)}})^2 h \Big|$$

$$\leqslant 2 \| u \|_\infty \| u_{\hat{x}} \| \| \varphi^{(k)} \|_4^2,$$

$$\Big| \sum_{j=1}^{J} [(\overline{u}_{j+1} \varphi_{j\hat{x}}^{(k)} + \overline{u}_{j\hat{x}} \varphi_{j-1}^{(k)}) \overline{\varphi}_j^{(k)} u_j + (u_{j+1} \overline{\varphi}_{j\hat{x}}^{(k)} + u_{j\hat{x}} \overline{\varphi_{j-1}^{(k)}}) \overline{\varphi_j^{(k)}} u_j$$

$$- (u_{j+1} \varphi_{j\hat{x}}^{(k)} + u_{j\hat{x}} \varphi_{j-1}^{(k)}) \overline{u}_j \overline{\varphi_j}^{(k)}] h \Big|$$

$$\leqslant 3[\| u \|_\infty^2 \left(\varepsilon_2 \| \varphi_x^{(k)} \|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_2} \| \varphi^{(k)} \|^2 \right)$$

$$+ \| u \|_\infty \| u_{\hat{x}} \| \| \varphi^{(k)} \|_4^2], \varepsilon_2 > 0.$$

再由引理 14.1,

$$\| \varphi^{(k)} \|_4^2 \leqslant C_1 (\| \varphi^{(k)} \| + \| \varphi_x^{(k)} \|)^{\frac{1}{2}} \| \varphi^{(k)} \|^{\frac{3}{2}}$$

$$\leqslant C_1 \| \varphi^{(k)} \|^2 + \varepsilon_3 \| \varphi_x^{(k)} \|^2, \quad \varepsilon_3 > 0.$$

$$\| u \|_\infty \leqslant C (\| u \| + \| u_x \|)^{\frac{1}{2}} \| u \|^{\frac{1}{2}} \leqslant C \| u \|_{H^1}^{\frac{1}{2}}.$$

因此从(14.61)有

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(F'(u)\varphi^{(k)}, \varphi^{(k)}) &\leqslant \chi \| \varphi^{(k)} \|^2 - \gamma_r \| \varphi_x^{(k)} \|^2 \\
&+ \sqrt{\beta_r^2 + \beta_i^2} \| u \|_\infty^2 \| \varphi^{(k)} \|^2 + | 2\sqrt{\delta_r^2 + \delta_i^2} \\
&- 3\delta_i | \| u \|_\infty^4 \| \varphi^{(k)} \|^2 + \sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} [2 \| u \|_\infty \| u_{\hat{x}} \| \\
&\cdot (C_1 \| \varphi^{(k)} \|^2 + \varepsilon_3 \| \varphi^{(k)} \|^2) + \| u \|_\infty^2 (\varepsilon_1 \| \varphi_x^{(k)} \|^2 \\
&+ \frac{1}{4\varepsilon_1} \| \varphi^{(k)} \|^2)] + \sqrt{\mu_r^2 + \mu_i^2} [2 \| u \|_\infty \| u_{\hat{x}} \| (\| C_1 \| \varphi^{(k)} \|^2 \\
&+ \varepsilon_3 \| \varphi_x^{(k)} \|^2) + 3 \| u \|_\infty^2 (\varepsilon_2 \| \varphi_x^{(k)} \|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_2} \| \varphi^{(k)} \|^2) \\
&+ 3 \| u \|_\infty \| u_{\hat{x}} \| (C_1 \| \varphi^{(k)} \|^2 + \varepsilon_3 \| \varphi_x^{(k)} \|^2)] \leqslant - [\gamma_r \\
&- \sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} (2\varepsilon_3 \| u \|_\infty \| u_{\hat{x}} \| + \varepsilon_1 \| u \|_\infty^2) - \sqrt{\mu_r^2 + \mu_i^2} \\
&\cdot (2\varepsilon_3 \| u \|_\infty \| u_{\hat{x}} \| + 3\varepsilon_2 \| u \|_\infty^2 + 3\varepsilon_3 \| u \|_\infty \| u_{\hat{x}} \|)] \\
&\cdot \| \varphi_x^{(k)} \|^2 + k_2 (\| u \|_{H^1} + \| u \|_{H^1}^2 + 1) \| \varphi^{(k)} \|^2.
\end{aligned} \tag{14.62}$$

由于 $\varepsilon,\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 和 ε_3 充分小，故可得

$$\mathrm{Re}(F'(u)\varphi^{(k)},\varphi^{(k)})\leqslant-\frac{\gamma_r}{2}\|\varphi_x^{(k)}\|^2+k_3(\|u\|_{H^1}+\|u\|_{H^1}^2)\|\varphi^{(k)}\|^2, \tag{14.63}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}((F'(u)\varphi^{(k)})_x,\varphi_x^{(k)})&=\chi\|\varphi_x^{(k)}\|^2-\delta_r\|\varphi_{xx}^{(k)}\|^2\\&-\mathrm{Re}(\beta_r+i\beta_i)((3|u|^2\varphi^{(k)}+u^2\overline{\varphi}^{(k)})_x,\varphi_x^{(k)})\\&-\mathrm{Re}(\delta_r+i\delta_i)((3|u|^4\varphi^{(k)}+2|u|u^2\overline{\varphi^{(k)}})_x,\varphi_x^{(k)})\\&-\mathrm{Re}(\lambda_r+i\lambda_i)\left(\frac{1}{2}(\overline{\varphi}^{(k)}(u^2)_{\hat{x}})_x+((u\varphi^{(k)})_{\hat{x}}\overline{u})_x,\varphi_x^{(k)}\right)\\&-\mathrm{Re}(\mu_r+i\mu_i)((|u|_{\hat{x}}^2\varphi^{(k)})_x-\frac{1}{2}((u^2)_{\hat{x}}\overline{\varphi}^{(k)})_x\\&-((\varphi^k\overline{u}+u\overline{\varphi^{(k)}})_{\hat{x}}u)_x-((u\varphi^{(k)})_{\hat{x}}\overline{u})_x,\varphi_x^{(k)}),\end{aligned} \tag{14.64}$$

其中 $(3|u_j|^2\varphi^{(k)}+u_j^2\overline{\varphi_j^{(k)}})_x=3|u_{j+1}|^2\varphi_{jx}^{(k)}+3|u_j|_x^2\varphi_j^{(k)}+u_{j+1}^2+\overline{\varphi_{jx}^{(k)}}+(u_j^2)_x\overline{\varphi_j^{(k)}}$,

$(3|u_j|^4\varphi_j^{(k)}+2|u_j|^2u_j^2\overline{\varphi_j^{(k)}})_x=3|u_{j+1}|^4\varphi_{jx}^{(k)}$
$+3|u_j|_x^4\varphi_j^{(k)}+2|u_{j+1}|^2u_{j+1}^2\overline{\varphi_{jx}^{(k)}}+2(|u_j|^2u_j^2)_x\overline{\varphi_j^{(k)}}$,

$\frac{1}{2}[(\overline{\varphi_j^{(k)}}u_j^2)_{\hat{x}}]_x=\frac{1}{2}[\overline{\varphi_{j+1}^{(k)}}(u_j^2)_{\hat{x}x}+\overline{\varphi_{jx}^{(k)}}(u_j^2)_{\hat{x}}]$,

$[(u_j\varphi_j^{(k)})_{\hat{x}}\overline{u}_j]_x=(u_{j+1}\varphi_{j+1}^{(k)})_{\hat{x}}\overline{u}_{jx}+(u_j\varphi_j^{(k)})_{\hat{x}x}\overline{u}_j$,

$[|u_j|_{\hat{x}}^2\varphi_j^{(k)}]_x=|u_{j+1}|_{\hat{x}}^2\varphi_{jx}^{(k)}+|u_j|_{\hat{x}x}^2\varphi_j^{(k)}$,

$\frac{1}{2}[(u_j^2)_{\hat{x}}\overline{\varphi_j^{(k)}}]_x=\frac{1}{2}(u_{j+1}^2)_{\hat{x}}\varphi_{jx}^{(k)}+|u_j|_{\hat{x}x}^2\varphi_j^{(k)}$,

$[(\varphi_j^{(k)}\overline{u}_j+u_j\overline{\varphi_j^{(k)}})_{\hat{x}}u_j]_x=(\varphi_{j+1}^{(k)}\overline{u}_{j+1}+u_{j+1}\overline{\varphi_{j+1}^{(k)}})_{\hat{x}}u_{jx}$
$+(\varphi_j^{(k)}\overline{u}_j+u_j\overline{\varphi_j^{(k)}})_{\hat{x}x}u_j$,

$[(u_j\varphi_j^{(k)})_{\hat{x}}\overline{u}_j]_x=(u_{j+1}\varphi_{j+1}^{(k)})_{\hat{x}}\overline{u}_{jx}+(u_j\varphi_j^{(k)})_{\hat{x}x}\overline{u}_j$,

$$\begin{aligned}|u_j|_x^4&=(|u_{j+1}|^2+|u_j|^2)|u_j|_x^2\\&=(|u_{j+1}|^2+|u_j|^2)(u_{j+1}\overline{u}_{jx}+u_{jx}\overline{u}_j),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(u_j\varphi_j^{(k)})_{\hat{x}x}&=(u_{j+1}\varphi_{j\hat{x}}^{(k)}+u_{j\hat{x}}\varphi_{j-1}^{(k)})_x\\&=u_{j+2}\varphi_{j\hat{x}x}^{(k)}+u_{jx}\varphi_{j\hat{x}}^{(k)}+u_{j+1\hat{x}}\varphi_{j-1x}^{(k)}+u_{j\hat{x}x}\varphi_{j-1}^{(k)},\end{aligned}$$

$|\mathrm{Re}(\beta_r+i\beta_i)((3|u|^2\varphi^{(k)}+u^2\overline{\varphi}^{(k)})_x,\varphi_x^{(k)})|$

$$\leqslant\sqrt{\beta_r^2+\beta_i^2}[4\|u\|_\infty^2\|\varphi_x^{(k)}\|^2+3\|u\|_\infty\|u_x\|_\infty$$
$$(\|\varphi^{(k)}\|^2+\|\varphi_x^{(k)}\|^2)],$$
$$|\mathrm{Re}(\delta_r+i\delta_i)((3|u|^4\varphi^{(k)}+2u|u|^2\overline{\varphi}^{(k)})_x,\varphi^{(k)})|$$
$$\leqslant\sqrt{\delta_r^2+\delta_i^2}[5\|u\|_\infty^4\|\varphi_x^{(k)}\|^2+20\|u\|_\infty^3(\|u_x\|^2+\|\varphi_x^{(k)}\|^2)],$$
$$\left|\mathrm{Re}(\lambda_r+i\lambda_i)\left(\left(\frac{1}{2}\varphi^{(k)}(u^2)_{\hat{x}}\right)_x+((u\varphi^{(k)})_{\hat{x}}\overline{u})_x,\varphi_x^{(k)}\right)\right|$$
$$\leqslant\sqrt{\lambda_r^2+\lambda_i^2}[(\|u\|_\infty\|u_{x\hat{x}}\|+\|u\|_\infty^2)(\|\varphi^{(k)}\|^2+\|\varphi_x^{(k)}\|^2)$$
$$+3\|u\|_\infty\|u_{\hat{x}}\|_\infty\|\varphi_x^{(k)}\|^2+\|u\|_\infty^2\|\varphi_x^{(k)}\|\|\varphi_{xx}^{(k)}\|]$$
$$\leqslant\sqrt{\lambda_r^2+\lambda_i^2}[(\|u\|_\infty\|u_{x\hat{x}}\|+3\|u\|_\infty\|u_{\hat{x}}\|_\infty+\frac{1}{4\varepsilon_4}\|u\|_\infty^2)$$
$$\cdot\|\varphi_x^{(k)}\|^2+\varepsilon_4\|u\|^2\|\varphi_{xx}^{(k)}\|^2],\varepsilon_4>0,$$
$$|\mathrm{Re}(\mu_r+i\mu_i)((|u|_{\hat{x}}^2\varphi^{(k)})_x-\frac{1}{2}((u^2)_{\hat{x}}\overline{\varphi}^{(k)})_x$$
$$-((\varphi^{(k)}\overline{u}+u\overline{\varphi}^{(k)})_{\hat{x}}u)_x-((u\varphi^{(k)})_{\hat{x}}\overline{u})_x,\varphi_x^{(k)})|$$
$$\leqslant\sqrt{\mu_r^2+\mu_i^2}[3\|u\|_\infty\|u_{\hat{x}}\|\|\varphi_x^{(k)}\|^2+\frac{3}{2}(\|u\|_\infty\|u_{x\hat{x}}\|+\|u_x\|_\infty^2)$$
$$\cdot(\|\varphi^{(k)}\|^2+\|\varphi_x^{(k)}\|^2)+2\|u\|_\infty\|u_x\|_\infty\|\varphi_x^{(k)}\|^2+\|u_x\|_\infty^2$$
$$\cdot(\|\varphi^{(k)}\|^2+\|\varphi_x^{(k)}\|^2)+2\|u\|_\infty(\varepsilon_5\|\varphi_{xx}^{(k)}\|^2$$
$$+\frac{1}{4\varepsilon_5}\|\varphi^{(k)}\|^2)+4\|u\|_\infty\cdot\|u_{\hat{x}}\|_\infty\|\varphi_x^{(k)}\|^2$$
$$+\|u\|_\infty\|u_{x\hat{x}}\|(\|\varphi^{(k)}\|^2+\|\varphi_x^{(k)}\|^2)]$$
$$\leqslant\sqrt{\mu_r^2+\mu_i^2}\left\{\left[9\|u\|_\infty\|u_{\hat{x}}\|+\frac{5}{2}(\|u\|_\infty\|u_{x\hat{x}}\|+\|u_x\|_\infty^2)\right]\right.$$
$$\cdot\|\varphi_x^{(k)}\|^2+2\varepsilon_5\|u\|_\infty\|\varphi_{xx}^{(k)}\|^2+\left[\frac{5}{2}(\|u\|_\infty\|u_{x\hat{x}}\|_2+\|u_x\|_\infty^2)\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2\varepsilon_5}\|u\|_\infty^2\right]\|\varphi^{(k)}\|^2\right\},\varepsilon_5>0.$$

从(14.64)可得

$$\mathrm{Re}((F'(u)\varphi^{(k)})_x,\varphi_x^{(k)})\leqslant\chi\|\varphi_x^{(k)}\|^2-\gamma_r\|\varphi_{xx}^{(k)}\|^2$$
$$+\varepsilon_4\sqrt{\lambda_r^2+\lambda_i^2}\|u\|_\infty^2+2\varepsilon_5\|u\|_\infty^2\sqrt{\mu_r^2+\mu_i^2}\|\varphi_{xx}^{(k)}\|^2$$
$$+k_4(\|u\|_\infty+\|u_x\|+\|u_x\|_\infty+\|u_{x\hat{x}}\|)$$

$\cdot (\| \varphi^{(k)} \|^2 + \| \varphi_x^{(k)} \|^2)$.

于是当 $\varepsilon_4, \varepsilon_5$ 充分小时,有

$$\mathrm{Re}((F'(u)\varphi^{(k)})_x, \varphi_x^{(k)}) \leqslant -\frac{\gamma_r}{2} \| \varphi_{xx}^{(k)} \|^2 + k_5 \| u \|_{H^2} \cdot (\| \varphi^{(k)} \|^2 + \| \varphi_x^{(k)} \|^2). \tag{14.65}$$

从(14.60),(14.63),(14.65)可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{l} \mathrm{Re}(F'(u)\varphi^{(k)}, \varphi^{(k)})_{H^1} \\
&\leqslant -\frac{\gamma_r}{2} \sum_{k=1}^{l} \| \varphi_{xx}^{(k)} \|^2 + k_6 \| u \|_{H_2} \sum_{k=1}^{l} (\| \varphi^{(k)} \|^2 + \| \varphi_x^{(k)} \|^2) \\
&\leqslant -\frac{\gamma_r}{2} \sum_{k=1}^{l} \lambda_k^2 + k_6 \| u \|_{H^2} \left(l + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \right),
\end{aligned} \tag{14.66}$$

其中 $\lambda_k = J^2 4 \sin^2 \frac{k\pi}{J}, k = 1, 2 \cdots, \left[\frac{J}{2}\right]$为矩阵 $A = J^2 A_1$ 的重特征值. 由于$\frac{\sin x}{x} \geqslant \frac{2}{\pi}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, 由(14.66)可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{l} \mathrm{Re}(F'(u)\varphi^{(k)}, \varphi^{(k)})_{H^1} \leqslant -\frac{\gamma_r}{2} J^4 \left(\frac{2}{\pi}\right)^4 \sum_{k=1}^{\left[\frac{l}{2}\right]} \left(\frac{k\pi}{J}\right)^4 \\
&+ k_6 \| u \|_{H^2} \cdot 2l \leqslant -64\gamma_r \sum_{k=1}^{\left[\frac{l}{2}\right]} k^4 + 2lk_6 \sqrt{E_3} \leqslant -64\gamma_r \\
&\cdot \frac{1}{6}\left(\frac{J}{2} - 1\right)^5 + 2lk_6 \sqrt{E_3} \leqslant -\frac{\gamma_r}{3} \left(\left(\frac{l}{\theta_2}\right)^5 \right. \\
&\left. - 10\left(\frac{l}{\theta_2}\right)^4 + 40\left(\frac{l}{\theta_2}\right)^3 - 80\left(\frac{l}{\theta_2}\right)^2 + 80\left(\frac{l}{\theta_2}\right) - 32 \right),
\end{aligned}$$

其中 $\theta_l J < l < \theta_2 J, \theta_1, \theta_2 > 0$. 因此如选取

$$l = l_0 = \left[\frac{2k_6 \sqrt{E_6}\, \theta_2}{\gamma_r} + 12 \right] \theta_2, \tag{14.67}$$

则存在 $J_0 \geqslant l$,使得

$$q_J = \lim_{t \to +\infty} \left(\inf_{u_0 \in \mathscr{A}_J} \frac{1}{t} \int_0^t \mathrm{Re}\, Tr F'(u(\tau)) \cdot \theta_J \mathrm{d}\tau < 0. \right.$$

由[T]有

$$d_H(\mathscr{A}_J) \leqslant J_0, d_F(\mathscr{A}_J) \leqslant 2J_0, \tag{14.68}$$

其中 $d_H(\mathscr{A}_J), d_F(\mathscr{A}_J)$ 为吸引子 A_J 的 Hausdorff 维数和分形维数，于是有

定理 14.14 在定理 14.12 的条件下，离散系统(14.6)，(14.8)，(14.9) 的整体吸引子 $\mathscr{A}_J$ 的 Hausdorff 维数和分形维数是有限的，即(14.68) 成立.

§15 扰动的三次一五次非线性 Schrödinger 方程的稳定性准则

研究如下具扰动三次一五次非线性 Schrödinger 方程

$$\begin{aligned} iAt &= (1 + i\varepsilon a)A_{xx} + i\varepsilon bA + (1 + i\varepsilon d_1)|A|^2 A \\ &\quad + (\alpha + i\varepsilon d_2)|A|^4 A, \end{aligned} \tag{15.1}$$

其中 $0 < \varepsilon \ll 1$，其他参数是实的，且是 $O(1)$.

(15.1) 的孤立子解为

$$A(x,t) = A(x)e^{-i\omega t}. \tag{15.2}$$

再寻求如下 ODE 的异宿和同宿解

$$\begin{aligned} &(1 + i\varepsilon a)A'' + (-\omega + i\varepsilon b)A + (1 + i\varepsilon d_1)|A|^2 A \\ &\quad + (\alpha + i\varepsilon d_2)|A|^4 A = 0. \end{aligned} \tag{15.3}$$

对于(15.3) 各种形式的解，包括波前(细节)，光亮孤立波，黑暗孤立波等已有许多研究，对于光亮孤立波是存在的，当(15.3) 的解对于 $|A| = 0$ 是同宿时. 当 $\varepsilon = 0, \omega > 0$ 时，这个波可表示为

$$A^2(x) = \frac{4\omega}{1 + \sqrt{1 - \beta\cosh(2\sqrt{\omega}x)}}, \beta = -\frac{16}{3}\alpha\omega, \tag{15.4}$$

这里 $\alpha < 0, 0 \leqslant \beta < 1$. 对 $\varepsilon > 0$ 解的解析表达式也存在. 这一节我们研究对一切 $\varepsilon \geqslant 0$ 光亮孤立波的存在性及稳定性.

我们有如下结果：

定理 15.1 设 $0 < \varepsilon < 1, 0 \leqslant \beta < 1, d_1 = d_1^*$.

$$d_1^* = \frac{i}{4}a - \Lambda_{24}b - \Lambda_{d_2}\left(d_2 - \frac{1}{3}\alpha a\right) + O(\varepsilon),$$

$$\Lambda_i = \int_{-\infty}^{\infty} A^i(x)\mathrm{d}x, A_{24} = \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}, \Lambda_{d_2} = -\frac{\delta\omega}{\beta}\left(\omega\Lambda_{24} - \frac{3}{4}\right),$$

$$a > 0, d_2 - \frac{1}{3}a\alpha < 0, b^* = -\frac{\partial \omega \Lambda_{d2}}{\partial \omega \Lambda_{24}}\left(d_2 - \frac{1}{3}\alpha a\right) < 0.$$

如 $0 > b^* > b$，则存在一个稳定的实特征值和一个不稳定的实特征值，它们均为 $O(\varepsilon)$. 如 $0 > b > b^*$，则存在二个稳定的实特征值和零不稳定特征值，它们均为 $O(\varepsilon)$. 更进一步，除了在零处重特征值外，别无其他特征值为 $O(\varepsilon)$.

定理 15.2 设定理 15.1 的假设满足，$d_1^* = d_1^*(a, b, d_2, \omega^*)$，$d_1^* = \frac{1}{4}a - \Lambda_{24}b - \Lambda_{d2}\left(d_2 - \frac{1}{3}\alpha a\right) + O(\varepsilon)$，$\Lambda_i = \int_{-\infty}^{\infty} A^i(x)\mathrm{d}x$，$\Lambda_{24} = \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}$，$\Lambda_{d2} = -\frac{8\omega}{\beta}\left(\omega\Lambda_{24} - \frac{3}{4}\right)$，对于任何 $N \geqslant 2$ 存在一次无穷序列 $\{\omega_k^N\}$，有 $\lim\limits_{|k| \to +\infty} \omega_k^N = \omega^*$，使得当 $\omega = \omega_k^N$ 存在 (15.3) 的 N 脉冲解，如 $b < b^*$，$b^* = -\frac{\partial \omega \Lambda_{d2}}{\partial \omega \Lambda_{24}}\left(d_2 - \frac{1}{3}\alpha a\right) < 0$，则 N 脉冲解是不稳定的，存在至少 N 个不稳定特征值. 对于固定 a_1, d_1, d_2 的稳定性图形如图 15.1.

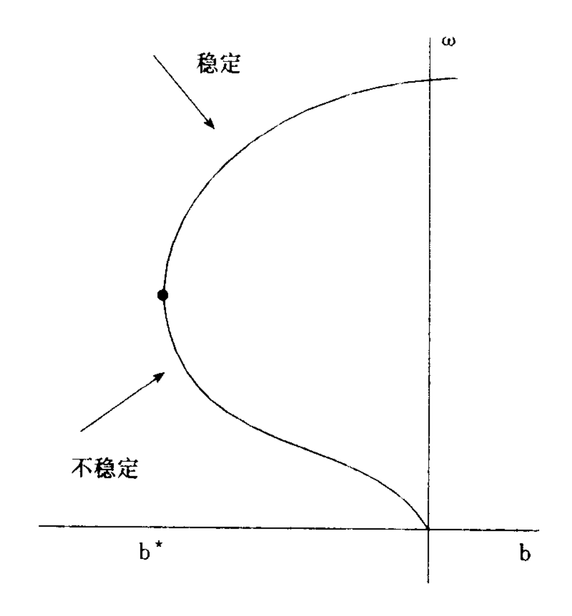


图 15.1

为了证明定理 15.1、定理 15.2，我们必须做许多准备工作，首

先分析 Evans 函数的结构.

作变换 $A \to Ae^{i\omega t}$,(15.1) 写成行波坐标 $Z = x - ct$ 可得

$$
\begin{aligned}
iA_t = & (1 + i\varepsilon a)A_{ZZ} + icA_Z + (-\omega + i\varepsilon b)A \\
& + (1 + i\varepsilon d_1)|A|^2A + (\alpha + i\varepsilon d_2)|A|^4A,
\end{aligned} \tag{15.5}
$$

其中 A 为变元 $(Z,t) \in R \times R^+$ 的复值函数,令 $A = A_1 + iA_2$,记 $A = (A_1, A_2)$,(15.4) 变成方程组

$$
\begin{aligned}
JA_t = & (I + \varepsilon aJ)A_{ZZ} + CJA_Z + (-\omega I_2 + \varepsilon bJ)A \\
& + (I_2 + \varepsilon d_1 J)|A|^2A + (\alpha I_2 + \varepsilon d_2 J)|A|^4A,
\end{aligned} \tag{15.6}
$$

这里 I_2 为 2×2 恒等矩阵,J 为反对称矩阵

$$
J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

上述方程组可写为

$$
JA_t = BA_{ZZ} + CJA_Z + F(A,\omega,\varepsilon), \tag{15.7}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
B = I_2 + \varepsilon aJ, F(A,\omega,\varepsilon) = & (-\omega I_2 + \varepsilon bJ)A \\
& + (I_2 + \varepsilon d_1 J)|A|^2A + (\alpha I_2 + \varepsilon d_2 J)|A|^4A.
\end{aligned}
$$

设 $\widetilde{A}$ 表示(15.6) 的光亮孤立子解,当 $c = 0$,已知它是存在的,当 $\varepsilon = 0$ 时,$\widetilde{A} = (R_0, 0)^T$,这里

$$
R_0^2(Z) = \frac{4\omega}{1 + \sqrt{1 - \beta}\cosh(2\sqrt{\omega}Z)}, \beta = -\frac{16}{3}\alpha\omega. \tag{15.8}
$$

对波线性化,可得特征方程

$$
BA'' + DF_A(\widetilde{A},\omega,\varepsilon)A = \lambda JA, \quad ' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}, \tag{15.9}
$$

即 $-JLA = \lambda A$,这里

$$
-JL = -J(B\partial_Z^2) + DF_A(\widetilde{A},\omega,\varepsilon). \tag{15.10}
$$

按惯例计算表明算子 $-JL$ 的本质谱为

$$
\begin{aligned}
\sigma_e(-JL) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \\
= -\varepsilon(a\eta^2 - b) \pm (\eta^2 + \omega)i, \eta \in R\}.
\end{aligned} \tag{15.11}
$$

因此,对 $\varepsilon > 0$,算子 $-JL$ 是扇形的($Q > 0$),本质谱位于复平面的

左半平面($b<0$).

假设 15.3 参数 a,b 使得 $a>0,b<0$. 令 $Y=(A,A')$,特征方程(15.9)可写为一阶方程组

$$Y'=M(\lambda,Z)Y, \tag{15.12}$$

这里 M 为 4×4 块矩阵:

$$M(\lambda,Z)=\begin{pmatrix}0 & I_2\\ B^{-1}(\lambda J-DF_A)(\tilde{A},\omega,\varepsilon) & 0\end{pmatrix}.$$

对 $\lambda\in\Omega=\mathbb{C}\setminus\sigma_e(L)$,存在复解析函数, $Y_i^s(\lambda,Z)$ 和 $Y_i^u(\lambda,Z)$, $i=1,2$,它为(15.11)的解满足

(1) $\lim\limits_{Z\to\infty}|Y_i^s(\lambda,Z)|=0, Y^s(\lambda,Z)=(Y_1^s\wedge Y_2^s)(\lambda,Z)\neq0$,

(2) $\lim\limits_{Z\to-\infty}|Y_i^u(\lambda,Z)|=0, Y^u(\lambda,Z)=(Y_1^u\wedge Y_2^u)(\lambda,Z)\neq0$,

Evans 函数定义为

$$E(\lambda)=(Y_1^u\wedge Y_2^u\wedge Y_1^s\wedge Y_2^s)(\lambda,Z). \tag{15.13}$$

由 Abel 公式知 $E(\lambda)$ 与 Z 无关. Evans 函数使得对 $\lambda\in\Omega$ 它等于零当且仅当 λ 为一个特征值,由于(15.1)方程的不变性,(15.9)的两个解当 $\lambda=0$ 时为 $A=\tilde{A}',A=J\tilde{A}$. 置

$$(1)\ Y_1^s(0,Z)=Y_1^u(0,Z)=\tilde{U}', \tag{15.14}$$

$$(2)\ Y_2^s(0,Z)=Y_2^u(0,Z)=\tilde{V}_J, \tag{15.15}$$

其中

$$\tilde{U}=(\tilde{A},\tilde{A}')^T,\tilde{V}_J=(J\tilde{A},J\tilde{A}')^T. \tag{15.16}$$

如下引理描述 Evans 函数的渐近性质.

引理 15.4 (15.13)描述的 $Y_i^u(0,Z)$ 和 $Y_i^s(0,Z)$,如 $\lambda\in R$,则 $E(\lambda)<0,\lambda\to\infty$.

证 无损于一般性,可设 $\varepsilon=0$,即此结果如对 $\varepsilon=0$ 是成立的,则它对 $0\leqslant\varepsilon\leqslant1$ 也是成立的. 设 $\lambda\in R^+$,令 $Y=(P,Q)^T$ 在(15.12)中,置 $S=\sqrt{\lambda}Z,Q=\sqrt{\lambda}\tilde{Q}$,令 $\lambda\to\infty$,则(15.12)变成自治方程组

$$\begin{pmatrix}P\\ \tilde{Q}\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}O & I_2\\ J & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P\\ \tilde{Q}\end{pmatrix},\qquad '=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}.$$

上述矩阵的特征值为 $\gamma(\pm 1, \pm i)$，$\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{2}$，因此存在二维不稳定子空间和二维稳定子空间，二维不稳定子空间由 $\{(\gamma, -\gamma, 1, 0)^T, (\gamma, \gamma, 0, 1)^T\}$ 所张成，二维稳定子空间由 $\{(\gamma, -\gamma, 0, 1)^T, (-\gamma, -\gamma, 0, 1)^T\}$ 所张成.

令 $e_i \wedge e_j = e_{ij}$，在 $\wedge^2(R^4)$ 不稳定子空间中可由向量

$$Y^u(+\infty) = (\gamma, -\gamma, 1, 0)^T \wedge (\gamma, \gamma, 0, 1)^T$$
$$= e_{12} - \gamma e_{13} + \gamma e_{14} - \gamma e_{23} - \gamma e_{24} + e_{34}$$

所表示，而稳定子空间可由向量

$$Y^s(+\infty) = (\gamma, -\gamma, -1, 0)^T \wedge (-\gamma, -\gamma, 0, 1)^T$$
$$= -e_{12} - \gamma e_{13} + \gamma e_{14} - \gamma e_{23} - \gamma e_{24} - e_{34}$$

表示，注意到

$$Y^u(\infty) \wedge Y^s(+\infty) = -2. \tag{15.17}$$

当 $\lambda = 0$ 时，对任何固定 Z，不稳定子空间和稳定子空间均可由向量 $(R'_0(Z), 0, R''_0(Z), 0)^T$ 和 $(0, R_0(Z), 0, R'_0(Z))^T$ 所张成，置 $Y^{(u)}(0) = \lim\limits_{Z\to-\infty} e^{-2\sqrt{\omega}Z} Y^u(0, Z)$，$Y^s(0) = \lim\limits_{Z\to\infty} e^{2\sqrt{\omega}Z} Y^s(0, Z)$.

$$\tag{15.18}$$

利用 R_0 的表示可知

$$Y^u(0) = \lim_{Z\to-\infty} e^{-2\sqrt{\omega}Z}(R'_0(Z), 0, R''_0(0), 0)^T \wedge (0, R_0(Z), 0, R'_0(Z))^T$$
$$= \mu(\sqrt{\omega}, 0, \omega, 0)^T \wedge (0, 1, 0, \sqrt{\omega})^T$$
$$= \mu(\sqrt{\omega} e_{12} + \omega e_{14} - \omega e_{23} + e^{\frac{3}{2}} e_{34}),$$

其中 $\mu = \dfrac{8}{(1-\beta)^{\frac{1}{2}}}\omega$，$\beta = -\dfrac{16}{3}\alpha\omega$.

类似的计算表明

$$Y^s(0) = \lim_{Z\to\infty} e^{2\sqrt{\omega}Z}(R'_0(Z), 0, R''_0(0), 0)^T \wedge (0, R_0(Z), 0, R^1_0(Z))^T$$
$$= \mu(-\sqrt{\omega} e_{12} + \omega e_{14} - \omega e_{23} - \omega^{\frac{3}{2}} e_{34}),$$

$$Y^u(0) \wedge Y^s(0) = -4\omega^2\mu^2.$$

推论 15.5 当 $\varepsilon = 0$ 时,Evans 函数满足 $E(0) = E''(0) = E'''(0) = 0, E^{(4)}(0) < 0$,进一步有 $E(\lambda) < 0, \lambda > 0$.

证 直接计算可得.

现考虑 $\varepsilon > 0$ 时,$E(\lambda)$ 导数的计算,$E(0) = E'(0) = 0$ 是对的,但 $E''(0) \neq 0$,(15.7) 与时间无关,满足 ODE

$$BA'' + CJA'' + F(A, \omega, \varepsilon) = 0, \quad ' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}, \tag{15.19}$$

能写成一阶方程组

$$U' = G(U, C, \omega, \varepsilon), \tag{15.20}$$

其中 $U = (U_1, U_2) \in R^4$,且

$$G(U, C, \omega, \varepsilon) = \begin{pmatrix} U_2 \\ B^{-1}C - F(U_1, \omega, \varepsilon) - CJ(U_2) \end{pmatrix}.$$

带光亮的孤立波对应于 $U = 0$ 的同宿解.它实际上是二维不稳定流形 $W^u(Z, C, \omega, \varepsilon)$ 和二维稳定流形 $W^s(Z, C, \omega, \varepsilon)$ 的相交,由于方程(15.1) 具有旋转对称性,轨线在 $W^u(z, c, \omega, \varepsilon) \cap W^s(z, c, \omega, \varepsilon)$ 不可区分,但我们可选取轨线使得 $\tilde{A}_2(0) = 0$ 可在二维流形中惟一决定一条轨线.令 $\tilde{U} = (\tilde{A}, \tilde{A}')$,因此 $\tilde{U} \subset W^u(z, c, \omega, \varepsilon) \cap W^s(z, c, \omega, \varepsilon)$ 为可识别的一个解,由(15.7) 直接可得

命题 15.6 非线性下的 Frechet 导数为

$$\partial_\omega F(A, \omega, \varepsilon) = - A. \tag{15.21}$$

因 G 光滑依赖于参数,流形也是,光亮孤立波为 $W^u(z, c, \omega, \varepsilon)$ 和 $W^s(z, c, \omega, \varepsilon)$ 不平凡的交.(15.20) 对 c, ω 作微分并取值于 $\tilde{U}$,得

$$(\partial_c W^r)' = DG_v(\tilde{A}, 0, \omega, \varepsilon)\partial_c W^r + (0, -B^{-1}J\tilde{A}')^T, \tag{15.22}$$

$$(\partial_w W^r)' = DG_u(\tilde{A}, 0, \omega, \varepsilon)\partial_w W^r + (0, -B^{-1}\tilde{A})^T. \tag{15.23}$$

在这种方程中 $r \in \{u, s\}$.由命题 15.6 的结果可得

$$DG_u(\tilde{A},0,\omega,\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ -B^{-1}DF_A(\tilde{A},\omega,\varepsilon) & 0 \end{bmatrix}.$$

注意到作为这些方程的推论,可知 $\partial_c(W^u - W^s)$ 和 $\partial_w(W^u - W^s)$ 为如下线性方程组的解

$$\delta U' = DG_u(\tilde{A},0,\omega,\varepsilon)\delta U. \qquad (15.24)$$

如置 $\tilde{V}_J = (J\tilde{A}, J\tilde{A}')$,则如下命题是对的.

命题 15.7 (15.24) 的四个解为 $\tilde{V}'$, $\tilde{U}_J$, $\partial_c(W^u - W^s)$, $\partial_w(W^u - W^s)$;更进一步,如

$D_2 = [\partial_c(W^u - W^s) \wedge \partial_w(W^u - W^s) \wedge \tilde{U}' \wedge \tilde{U}_J](Z,0,\omega,\varepsilon)$ 非零,则这些解是线性无关的.

证 易知这四个解也是线性方程组的解,当 $D_2 \neq 0$ 时,这些解的线性无关性是从 D_2 为 Wronskian 得到.

推论 15.8 由 Abel 公式,可知 D_2 与 ε 无关.

引理 15.9 Evans 函数满足 $E''(0) = 2D_2$,其中 D_2 为命题 15.7 所确定.

证 $E(\lambda)$ 对 λ 求导取值 $\lambda = 0$ 可得

$$E''(0) = 2(\partial_\lambda(Y_1^u - Y_1^s) \wedge \partial_\lambda(Y_2^u - Y_2^s) \wedge Y_1^s \wedge Y_2^s)(0),$$

$Y_i^u(0) = Y_i^s(0)$, $Y_1^s(0) = \tilde{V}'$, $Y_2(0) = \tilde{V}_J$. 微分(15.11)对 λ,取值 $\lambda = 0$ 得 $(\partial_\lambda Y_1^r)' = M(0,Z)\partial_\lambda Y_1^r - (0, -B^{-1}J\tilde{A}')^T$,

$$(\partial_\lambda Y_1^r)' = M(0,Z)\partial_\lambda Y_2^r - (0,B^{-1}\tilde{A}).$$

这里 $r \in \{u,s\}$. 在上述方程中,利用了 $J^2 = -I_2$. 因 $M(0) = DG_u(\tilde{A},0,\omega,\varepsilon)$,不难看到

$$\partial_\lambda(Y_1^u - Y_1^s) = -\partial_c(W^u - W^s) + \sum_{i=1}^{2} C_i Y_i^u,$$

$$\partial_\lambda(U_2^u - Y_2^s) = -\partial_w(W^u - W^s) + \sum_{i=1}^{2} d_i Y_i^u.$$

其中 c_i, d_i 为常数,将此式代入 $E''(0)$ 的表达式即得引理.

当 $D_2 = 0$ 时，$E''(0) = 0$，此时必须考察 $E'''(0)$.

定义三形式 $e_1^* \in \wedge^3(R^4) \cong R^4$,

$$e_1^* = -\partial_c(W^u - W^s) \wedge \tilde{U}'\tilde{U}_J, \tag{15.25}$$

可知 e_1^* 为共轭方程 $Z' = -M^T(0,Z)Z$ 的有界指数衰减解，进一步 e_1^* 为共轭方程 $(-JL)^*A = 0$ 的有界衰减解.

设 $D_2 = 0$，因 $\partial_W W^u = \partial_W W^s$，$e_1^* \neq 0$，它等价于存在

$$(-JL)A = J\dot{A}$$

的有界解，而不存在

$$(-JL)A = \dot{A}'$$

的解. 由此推之，$|\partial_w W^u| \to 0$ 指数快地趋于零，$|Z| \to \infty$. 以下设 $\boldsymbol{\Pi}: R^4 \to R^2$ 为第一、第二分量的投影算子.

引理 15.10 设 $E''(0), e_1^* \neq 0$. e_1^* 为(15.25)所定义，则

$$E'''(0) = 6\int_{-\infty}^{\infty} H(s) \wedge e_1^*(s)\mathrm{d}s,$$

其中 $H = (0, B^{-1}J\boldsymbol{\Pi}(\partial_w W^u))^T$.

证 见[17].

以下考虑导数的不同表示，为方便引入极坐标，即

$$A = (r\cos\theta, r\sin\theta),$$
$$U = T(r,\theta,s,\phi),$$

这里

$$T(r,\theta,s,\phi) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ rs\cos\theta - r\phi\sin\theta \\ rs\sin\theta + r\phi\cos\theta \end{pmatrix},$$

其中 $s = r'/r$，$\phi = \theta'$. 常规计算表明

$$DT(r,\theta,s,\phi) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 & 0 \\ s\cos\theta - \phi\sin\theta & -r(s\sin\theta + \phi\cos\theta) & r\cos\theta & -r\sin\theta \\ s\sin\theta - \phi\cos\theta & r(s\cos\theta - \phi\sin\theta) & r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}, \tag{15.26}$$

且 $|D\Gamma(r,\theta,s,\phi)| = r^3$. 因此变换是非奇的,除原点外.

在极坐标中,以 W_p^u 和 W_p^s 表示流形. 在这些坐标下,按常规计算可得

$$\begin{cases}\partial_c(W^u - W^s) = DT\partial_c(W_p^u - W_p^s),\\ \partial_w(W^u - W^s) = DT\partial_w(W_p^u - W_p^s),\\ \tilde{U}' = D\Gamma\partial_z W_p^u, \tilde{V}_J = D\Gamma\partial_\theta W_p^u.\end{cases} \tag{15.27}$$

当 $s = 0$ 时,流形能参数化为

$$\begin{aligned}W_p^u &= (r^u(\theta,\beta),\theta,0,\phi^u(\theta,\beta))^T,\\ W_p^s &= (r^s(\theta,\beta),\theta,0,\phi^s(\theta,\beta))^T,\end{aligned} \tag{15.28}$$

其中 $\beta = (C, W, \varepsilon)$. 波可表为

$$\tilde{A}(Z) = (R(Z)\cos\theta(Z), R(Z)\sin\theta(Z)).$$

由于波是偶的,可设

$$R'(\theta) = \theta'(0) = 0.$$

由于方程(15.1)的旋转对称性,有

$$\theta(0) = 0.$$

在这些假设下,当 $Z = 0$ 时,即当 $S' = R'/R = 0$ 时,

$$\begin{cases}\partial_c(W_p^u - W_p^s) = \partial_c((r^u - r^s),0,0,(\phi^u - \phi^s))^T,\\ \partial_w(W_p^u - W_p^s) = \partial_w((r^u - r^s),0,0,(\phi^u - \phi^s))^T,\\ \partial_z W_p^u = (0,0,S'(0),\Phi(0)), \partial_\theta W_p^u = (0,1,0,0)^T.\end{cases} \tag{15.29}$$

联系这些和(12.25)可证如下引理.

引理 15.11 Evans 函数满足

$$E''(0) = -\delta R^2(0)R''(0)\partial_c r^u(0,0,\omega,\varepsilon)\partial_w\phi^u(0,0,\omega,\varepsilon).$$

证 首先注意到由引理 15.9,得

$$\begin{aligned}E''(0) = 2(|DT|\partial_c(W_p^u - W_p^s) &\wedge \partial_w(W^u - W_p^s)\\ &\wedge \partial_z W_p^u \wedge \partial_\theta W_p^u)(0,0,\omega,\varepsilon).\end{aligned}$$

由(12.29)和对 $|DT|$ 的计算可得

$$E''(0) = -2R^3(0)S'(0)\begin{vmatrix}\partial_c(r^u - r^s) & \partial_w(r^u - r^s)\\ \partial_c(\phi^u - \phi^s) & \partial_w(\phi^u - \phi^s)\end{vmatrix}.$$

在极坐标下的定态方程由方程(15.18)给出，作为命题 15.4 的推论.

$$r^u(0,c,\omega,\varepsilon) = r^s(0,-c,\omega,\varepsilon),$$
$$\phi^u(0,c,\omega,\varepsilon) = -\phi^s(0,-c,\omega,\varepsilon).$$

于是推出

$$\partial_w(r^u - r^s)(0,0,\omega,\varepsilon) = \partial_c(\phi^u - \phi^s)(0,0,\omega,\varepsilon) = 0,$$

而 $\partial_c(r^u - r^s)(0,0,\omega,\varepsilon) = 2\partial_c r^u(0,0,\omega,\varepsilon)$,

$$\partial_w(\phi^u - \phi^s)(0,0,\omega,\varepsilon) = 2\partial_w\phi^u(0,0,\omega,\varepsilon).$$

因 $S'(0) = R''(0)/R(0)$，由此推得

$$E''(0) = -\delta R^2(0)R''(0)\partial_c r^u(0,0,\omega,\varepsilon)\partial_w\phi^u(0,0,\omega,E).$$

这就完成了证明.

$E''(0)$ 表达式已知，现必须有 $E''(0)$ 的表达式，由引理 15.10，我们必须更好地了解共轭解.

$$e_1^* = -\partial_c(W^u - W^s) \wedge \tilde{U}' \wedge \tilde{U}_j \in \wedge^3(R^4).$$

由(15.25)，上述量可写为

$$\begin{aligned} e_1^* &= -(DT\partial_c(W_p^u - W_p^s) \wedge (DT\partial_z W_p^u) \wedge (DT\partial_\theta W_p^u) \\ &= -DT^{(3)}(\partial_c(W_p^s - W_p^s) \wedge \partial_z W_p^u \wedge \partial_\theta W_p^u), \end{aligned}$$

其中 $DT^{(3)}$ 为 4×4 矩阵. 由 DT 它映照 $\Lambda^3(R^4)$ 为它自己，矩阵 $DT^{(3)}$ 形式上取 DT 的所有 3×3 子式，即有

$$DT^{(3)} = r^2\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & -(s\cos\theta + \phi\sin\theta) & -(s\sin\theta - \phi\cos\theta) \\ -\sin\theta & \cos\theta & s\sin\theta - \phi\cos\theta & -(s\cos\theta + \phi\sin\theta) \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

于是为了完成 e_1^* 的计算，必须决定

$$(e_1^*)_p = \partial_c(W_p^u - W_p^s) \wedge \partial_z W_p^u \wedge \partial_\theta W_p^u.$$

令

$$\begin{cases} \xi_1 = \partial_z W_p^u = (R',\theta',S',\Phi')^T, \\ \xi_2^- = \partial_c W_p^u, \xi_2^+ = \partial_c W_p^s, \\ \xi_3 = \partial_\theta W_p^u = (0,1,0,0). \end{cases} \tag{15.30}$$

设向量 $e_i, i=1,2,\cdots,4$,为 R^4 中的锥向量,定义

$$e_{ijk}=e_i\wedge e_j\wedge e_k.$$

向量 $\{e_{123},e_{124},e_{134},e_{234}\}$ 组成 $\Lambda^3(R^4)$ 中的基,因此 $(e_1^*)_p$ 可用这些向量表示,现定义

$$P_{ij}^{\pm}=\begin{vmatrix}(\xi_1)_i & (\xi_2^{\pm})_i\\ (\xi_1)_j & (\xi_2^{\pm})_j\end{vmatrix}. \tag{15.31}$$

置 $\tilde{P}_{ij}=P_{ij}^{-}-P_{ij}^{+}$. 由(15.30),标准计算表明

$$(e_1^*)_p=\tilde{P}_{13}e_{123}+\tilde{P}_{14}e_{124}-\tilde{P}_{34}e_{234}.$$

作为上面的讨论的推论有如下引理

引理 15.12 设 $M>0$ 给定, $\tilde{P}_{ij}=O(\varepsilon)$, $|Z|\leqslant M$,则

$$e_1^*=\begin{cases}-R^2(\tilde{P}_{13}e_{123}+(\tilde{P}_{14}+S\tilde{P}_{34})e_{124}-R\tilde{P}_{34}e_{234})+O(\varepsilon^2), & \\ & |Z|\leqslant M,\\ O(e^{-\mu|Z|}\varepsilon), & |Z|\geqslant M,\end{cases}$$

其中 $\mu>0$.

证 令 $\eta_1>0$ 使得 $R^2(Z)=O(e^{-\eta_1(Z)})$,即 $\eta_1=2\sqrt{\omega}+O(\varepsilon)$,因 $\Phi=O(\varepsilon)$,推出 $\theta=O(\varepsilon)Z$,易见 $|Z|\leqslant M$ 时

$$DT^{(3)}=R\begin{pmatrix}1&0&-S&0\\0&1&0&-S\\0&0&1&0\\0&0&0&R\end{pmatrix}+O(\varepsilon).$$

而 $\|DT^{(3)}\|=O(e^{-\eta_1|Z|})$, $|Z|\leqslant M$. 因此由关于函数 $\tilde{P}_{ij}$ 的假设,对 $|Z|\leqslant M$ 有

$$\begin{aligned}e_1^*&=DT^{(3)}(e_1^*)_p\\&=\tilde{P}_{13}e_{123}+(\tilde{P}_{14}+S\tilde{P}_{34})e_{124}-\tilde{R}_{34}e_{234}+O(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

因 $\tilde{P}_{ij}=O(\varepsilon)$, $|Z|\leqslant M$. 对 $|Z|\leqslant M$,必须 $\tilde{P}_{ij}=O(e^{\eta_2|Z|})\varepsilon$. 然后推出 $(e_1^*)_p=O(e^{\eta_2|Z|})\varepsilon$,于是,对 $|Z|\geqslant M$,我们看到

$$\begin{aligned}|e_1^*|\leqslant\|DT^{(3)}\|\,\|(e_1^*)_p\|&=O(e^{-\eta_1|Z|})O(e^{\eta_2|Z|})\varepsilon\\&=O(e^{(\eta_2-\eta_1)|Z|})\varepsilon.\end{aligned}$$

置 $\mu = \eta_1 - \eta_2$. 事实上由于 e_1^* 指数趋于零,保证 $\mu > 0$.

因 $B = I_2 + \varepsilon aJ$, 简单计算表明 $B^{-1}J = J + O(\varepsilon)$. 因此利用 $\theta = O(\varepsilon)$ 对 $|Z| \leqslant M$, 不难看到当 $\delta U_2 = 0$ 时

$$B^{-1}J\pi(\partial_w W^u) = \begin{cases} (O, \partial_w R_0)^T + O(\varepsilon), & |Z| \leqslant M, \\ O(e^{-\eta_3 |Z|}), & |Z| \geqslant M, \ \eta_3 > 0. \end{cases} \tag{15.32}$$

引理 15.13 设 $M > 0$ 给定, 且 $\tilde{P}_{ij} = O(\varepsilon)$, $|Z| \leqslant M$. 当 $E''(0) = 0$ 时, Evans 函数的三阶导数满足

$$E'''(0) = 6\int_{-\infty}^{\infty} R_0^2(s)\partial_w R_0(s)\tilde{P}_{13}(s)\mathrm{d}s + O(e^{-\eta_4 M})\varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

$\eta_4 > 0$.

证 $E'''(0)$ 为 $H \wedge e_1^*$ 所给定, 这里

$$H = (0, B^{-1}J\pi(\partial_w W^u))^T.$$

由(15.32)和引理 15.12, 可知对 $|Z| \leqslant M$,

$$H \wedge e_1{}^* = -R_0^2\partial_w R_0 \tilde{P}_{13} e_{4123} + O(\varepsilon^2) = R_0{}^2\partial_w R_0 \tilde{P}_{13} + O(\varepsilon^2).$$

而对 $|Z| \geqslant M$,

$$H \times e_1^* = O(e^{-\eta_4 M|Z|})\varepsilon.$$

在上面计算中, 我们利用了 $e_{4123} = e_4 \wedge e_{123} = -1$.

以下考虑渐近性.

$E''(0)$ 的表达式已经得到, 为了决定靠近 0 附近特征值的位置, 必须计算表达式 $\partial_c r^u$ 和 $\partial_w \phi^u$. 为决定 $E''(0)$, 必须决定 $\tilde{P}_{ij}$, 且表明这个量是

$O(\varepsilon)$, $|Z| \leqslant M$. 令

$$A(Z) = (r(Z)\cos\theta(Z), r(Z)\sin\theta(Z)),$$

孤立波表为 (R, θ, S, ϕ), 注意到

$$S = R'/R = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln R, \tag{15.33}$$

当 $\varepsilon = 0$ 时, 波的解析表达式为(15.7)所给出, 即

$$R_0^2 = \frac{4\omega}{1+\sqrt{1-\beta\cosh(2\sqrt{\omega}Z)}}, \beta = -\frac{16}{3}\alpha\omega, \theta_0(Z) = 0. \tag{15.34}$$

这个波能表以$(R_0,0,S_0,0)^T$. 定义

$$\Delta = 1+\varepsilon^2 a^2.$$

定态 ODE 为

$$\begin{cases} r' = rs, \theta' = \phi, \\ \Delta S' = -\Delta S^2 + \Delta\phi^2 - C(\varepsilon as - \phi) - (-\omega + \varepsilon^2 ab) - (H\varepsilon^2 ad_1)\gamma^2 \\ \qquad - (\alpha + \varepsilon^2 ad_2)\gamma^4, \\ \Delta\phi' = -2\Delta S\phi - C(S + \varepsilon a\phi) - \varepsilon[(b + a\omega) + (d_1 - a)\gamma^2 \\ \qquad + (d_2 - a\alpha)\gamma^4]. \end{cases} \tag{15.35}$$

显然 θ 的方程是多余的,通常被忽略掉,这里为了完备性仍留在这里,忽略 $O(\varepsilon^2)$ 项后,变分方程为

$$\begin{cases} \delta\gamma' = S\delta r + R\delta S, \delta\theta' = \delta\phi, \\ \delta S' = -2R(1+2\alpha R^2)\delta r - 2S\delta s + 2\Phi\delta\phi + \delta\omega - (\varepsilon as - \Phi)\delta c \\ \qquad - 2\varepsilon a[(b + a\omega) + (d_1 - a)R^2 + (d_2 - a\alpha)R^4]\delta\varepsilon, \\ \delta\phi' = -2\varepsilon R[(d_1 - a) + 2(d_2 - a\alpha)R^2]\delta r - 2\Phi\delta s - 2S\delta\phi \\ \qquad - \varepsilon a\delta\omega - (\varepsilon a\Phi + S)\delta c - [(b + a\omega) + (d_1 - a)R^2 \\ \qquad + (d_2 - a\alpha)R^4]\delta\varepsilon, \\ \delta\omega' = 0, \delta C' = 0, \delta\varepsilon' = 0. \end{cases} \tag{15.36}$$

由观察易得

命题 15.14 方程(15.36)在变换

$(Z,C,\omega,r,\theta,S,\phi) \to (-Z,-C,\omega,r,\theta,-S,-\phi)$ 下是不变的.

表达式 $\partial_w\phi^u(0)$ 将首先被决定. 令

$$\phi_\varepsilon(Z) = \delta\phi(\partial_\varepsilon W_p{}^u(Z,C,\omega)), \tag{15.37}$$

因

$$\delta C(\partial_\varepsilon W_p{}^u(Z,C,\omega)) = \delta\omega(\partial_\varepsilon W_p^u(Z,C,\omega)) = 0,$$

由(15.36),当 $\varepsilon = 0$ 时,得

$$\phi_\varepsilon^1 = -2S_0\phi_\varepsilon - [(b + a\omega) + (d_1 - a)R_0^2 + (d_2 - a\alpha)R_0^4]. \tag{15.38}$$

由定义知,ϕ_ε 当 $Z \to -\infty$ 时是一致有界的,因此由(15.33),(15.38)的解能写为

$$R_0^2(Z)\phi_\varepsilon(Z) = -\left[(b + a\omega)\int_{-\infty}^Z R_0^2(s)\mathrm{d}s + (d_1 - a)\cdot\int_{-\infty}^Z R_0^4(s)\mathrm{d}s + (d_2 - a\alpha)\int_{-\infty}^Z R_0^6(s)\mathrm{d}s\right]. \tag{15.39}$$

由定义知,函数 ϕ_ε 描述直至 $O(\varepsilon)$,$W_p^u(Z,C,\omega)$ 的 ϕ 分量位置,有

$$\phi^u(0) = \varepsilon\phi_\varepsilon(0) + O(\varepsilon^2). \tag{15.40}$$

由(15.39)和 $R(Z)$ 的表示可求出 $\phi_\varepsilon(0)$,再求 $\phi^u(0)$ 对 ω 的变分,ε 充分小.令

$$\Lambda_m = \int_{-\infty}^{\infty} R_0^m(s)\mathrm{d}s, \Lambda_2' = \int_{-\infty}^{\infty}(R_0')^2(s)\mathrm{d}s. \tag{15.41}$$

引理 15.15 函数 $\phi^u(0)$ 为

$$\phi^u(0) = \varepsilon\phi_\varepsilon(0) + O(\varepsilon^2)$$

所给定.这里

$$2R_0^2(0)\phi_\varepsilon(0) = \Lambda_2' a - \Lambda_2 b - \Lambda_4 d_1 - \Lambda_6 d_2.$$

证 因 R_0 为偶函数

$$\int_{-\infty}^0 R_0^m(s)\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} R_0^m(s)\mathrm{d}s, \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

因此,当(15.39)取值于 $Z = 0$ 时有

$$2R_0^2(0)\phi_\varepsilon(0) = (-\omega\Lambda_2 + \Lambda_4 + \alpha\Lambda_6)a - \Lambda_2 b - \Lambda_4 d_1 - \Lambda_6 d_2.$$

函数 R_0 满足

$$R_0'' - \omega R_0 + R_0^3 + \alpha\gamma_0{}^5 = 0.$$

上述方程乘以 R_0,再部分积分得

$$\Lambda_2' = -\omega\Lambda_2 + \Lambda_4 + \alpha\Lambda_6.$$

由此即得引理.以下需要一些常数进行计算.

命题 15.16 设 $\beta = -\frac{16}{3}\alpha\omega$,则 Λ_2 和 Λ_4 满足

(1) $\Lambda_2 = 4\sqrt{\omega}\,\frac{1}{\sqrt{\beta}}\tanh^{-1}(\sqrt{\beta})$,

(2) $\Lambda_4 = -16\omega\,\frac{1}{\beta}\left(\sqrt{\omega} - \frac{1}{4}\Lambda_2\right)$.

证 (1)、(2) 可从直接积分得到.

推论 15.17 函数 Λ_2 和 Λ_4 满足

(1) $\partial_w\Lambda_2 = \frac{2}{1-\beta}\omega^{-\frac{1}{2}}$,

(2) $\partial_w\Lambda_4 = 4\omega\partial_w\Lambda_2$.

利用

$$\operatorname{Tanh}^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

Taylor 级数,可得到如下的量

推论 15.18 当 $0 \leqslant \beta < 1$,有 Taylor 展开

(1) $\Lambda_2 = 4\omega^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta^n}{2n+1}$,

(2) $\Lambda_4 = 16\omega^{\frac{3}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta^n}{2n+3}$,

(3) $\Lambda_{24} = \frac{3}{4\omega}\left(1 - \frac{2^2}{3\cdot 5}\beta - \frac{2^2\cdot 3^2}{3\cdot 5^2\cdot 7}\beta^2 - \frac{2^2\cdot 3^3}{3\cdot 5^3\cdot 7}\beta^3 + O(\beta^4)\right)$,

(4) $\Lambda_{d_2} = \frac{8}{5}\omega\left(1 + \frac{3^2}{5\cdot 7}\beta + \frac{2^3}{5^2\cdot 7}\beta^2 + \frac{3\times 1879}{5^4\cdot 7^2\cdot 11}\beta^3 + O(\beta^4)\right)$,

(5) $\partial_w\Lambda_{d_2} = \frac{8}{5}\left(1 + 2\frac{3^2}{5\cdot 7}\beta + 3\frac{2^3}{5^2\cdot 7} + 4\frac{3\times 1879}{5^3\cdot 7^2\cdot 11}\beta^3 + O(\beta^4)\right)$,

(6) $\partial_\omega\Lambda_{24} = -\frac{3}{4\omega^2}\left(1 - 2\frac{2^2}{3\cdot 5}\beta + \frac{2^2\cdot 3^2}{3\cdot 5^2\cdot 7}\beta^2 - 4\frac{2^2\cdot 2^3}{3\cdot 5^3\cdot 7}\beta^3 + O(\beta^4)\right)$,

(7) $\frac{\partial_\omega\Lambda_{d_2}}{\partial_\omega\Lambda_{24}} = -\frac{32}{15}\omega^2\left(1 + \frac{2\cdot 11}{3\cdot 7}\beta + \frac{73}{3^2\cdot 7}\beta^2\,\frac{2^2\cdot 59\cdot 2017}{3^3\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 11}\beta^3 + O(\beta^4)\right)$.

命题 15.19 关系

(1) $\Lambda_6 = \frac{3}{2\alpha}\left(\omega\Lambda_2 - \frac{3}{4}\Lambda_4\right)$,

(2) $\Lambda'_2 = \frac{1}{2}\omega\Lambda - \frac{1}{8}\Lambda_4$

成立.

证 由引理 15.15 的证明,函数 R_0 满足 ODE,

$$R''_0 - \omega R_0 + R_0^3 + \alpha R_0^5 = 0,$$

乘 R_0 分部积分,得

$$-\Lambda'_2 - \omega\Lambda_2 + \Lambda_4 + \alpha\Lambda_6 = 0,$$

乘 R'_0 积分,得

$$\Lambda'_2 - \omega\Lambda_2 + \frac{1}{2}\Lambda_4 + \frac{1}{3}\alpha\Lambda_6 = 0.$$

上述两方程相减可得

$$\omega\Lambda_2 - \frac{3}{4}\Lambda_4 - \frac{2}{3}\alpha\Lambda_6 = 0,$$

由此即得(2).

命题 15.20 置 $\beta = -\frac{16}{3}\alpha\omega$,当 $0 \leqslant \beta < 1$ 时,

$$\partial_\omega\Lambda_{24} < 0, \partial_\omega\Lambda_{d_2} > 0.$$

因此

$$\frac{\partial_\omega\Lambda_{d2}}{\partial_\omega\Lambda_{24}} < 0.$$

证 由 Λ_{24} 的定义和推论 15.17,有

$$\partial_\omega\Lambda_{24} = \frac{(\Lambda_4 - 4\omega\Lambda_2)\partial_w\Lambda_2}{\Lambda_4^2}.$$

利用推论 15.18 中的 Taylor 展开,可得

$$\Lambda_4 - 4\omega\Lambda_2 = -16\omega^{\frac{3}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta^n}{(2n+1)(2n+3)}.$$

它显然是负的,因推论 15.17 说当 $0 \leqslant \beta < 0$ 时,$\partial_\omega\Lambda_2 > 0$,$\partial_\omega\Lambda_{24} < 0$ 是显然的.

因

$$\partial_\omega \beta = \frac{\beta}{\omega}, \quad \partial_\omega \Lambda_{d_2} = -\frac{8\omega}{\beta}\partial_\omega(\omega\Lambda_{24}),$$

在推论 15.18 中作 Tayloy 展开得

$$\partial_\omega(\omega\Lambda_{24}) = C\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - b_n)\beta^n,$$

其中

$$C = \left(4\omega\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+3}\beta^n\right)^2\right)^{-1} > 0,$$

$$a_n = \sum_{j=0}^{n}\frac{j}{2j+1}\frac{1}{2(n-j)+3},$$

$$b_n = \sum_{j=0}^{n}\frac{j}{2j+3}\frac{1}{2(n-j)+1}.$$

按证明命题的断言　$\partial_\omega\Lambda_{d_2} > 0$,只需证明

$$a_n - b_n < 0.$$

事实上,因

$$a_n - b_n = 4\sum_{j=0}^{n}\frac{n-2j}{f(j,n)},$$

其中

$$f(j,n) = (2j+1)(2(n-j)+1)(2j+3)(2(n-j)+3),$$

可用积分估计

$$a_n - b_n < 4\int_0^n xg(x,n)\mathrm{d}x,$$

其中

$$g(x,n) = \frac{n-2x}{f(x,n)}.$$

令　$y = x - \frac{1}{2}n$,则

$$g(y,n) = -2\frac{y}{f(y,n)},$$

$$f(y,n) = \frac{1}{2}(4y^2 - (n+1)^2)(4y^2 - (n+3)^2).$$

因此 $g(y,n)$ 为奇函数，$yg(y,n)<0$，于是

$$\int_0^n xg(x,n)\mathrm{d}x = \int_{-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}\left(y+\frac{1}{2}n\right)g(y,n)\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} yg(y,n)\mathrm{d}y < 0.$$

因此 $a_n - b_n < 0$，命题得证.

引理 15.21 具亮度孤立波解存在的必要条件是

$$\Lambda'_2 a - \Lambda_2 b - \Lambda_4 d_1 - \Lambda_6 d_2 = 0.$$

证 (15.39) 中令 $Z\to\infty$，$R_0(Z)\to 0$，可得

$$0 = (-\omega\Lambda_2 + \Lambda_4 + \alpha\Lambda_6)a - \Lambda_2 b - \Lambda_4 d_1 - \Lambda_6 d_2$$
$$= \Lambda'_2 a - \Lambda_2 b - \Lambda_4 d_1 - \Lambda_6 d_2.$$

附注 15.22 从引理 15.21 和 Λ_2,Λ_4 的表达式中可看出波存在的必要条件，推出

$$\phi_\varepsilon(0) = 0,$$

注意到 $\beta = -\frac{16}{3}\alpha\omega$，推出 Λ_6 可写为

$$\Lambda_6 = -\frac{8\omega}{\beta}\left(\omega\Lambda_2 - \frac{3}{4}\Lambda_4\right).$$

由此定义

$$\Lambda_{24} = \frac{\Lambda_2}{\Lambda_4}, \Lambda_{d2} = -\frac{8\omega}{\beta}\left(\omega\Lambda_{24} - \frac{3}{4}\right). \tag{15.42}$$

它是命题 15.19 的推论，$\Lambda_{d_2} = \Lambda_6/\Lambda_4$.

推论 15.23 为使波存在，参数 d_1 必须等于 d_1^* 直到 $O(\varepsilon)$.

$$d_1^* = \frac{1}{4}a - \Lambda_{24}b - \Lambda_{d2}\left(d_2 - \frac{1}{3}\alpha a\right).$$

证 由引理 15.21，波存在必须

$$d_1 = \frac{\Lambda'_1}{\Lambda_4}a - \frac{\Lambda_2}{\Lambda_4}b - \frac{\Lambda_6}{\Lambda_4}d_2,$$

因当 $d = d_1^*$ 时，$\phi_\varepsilon(0) = 0$，由隐函数定理可得

$$\partial_\omega\phi_\varepsilon(0) + \partial_{d_1}\phi_\varepsilon(0)\partial_\omega d_1^* = 0. \tag{15.43}$$

量$\partial_{d_1}\phi_\epsilon(0)$，$\partial_\omega d_1^*$ 易知，故必须计算 $\partial_\omega\phi_\epsilon(0)$.

引理 15.24 当 $d_1 = d_1^*$ 时,

$$\partial_\omega\phi_\epsilon(0) = -\frac{\Lambda_4}{2R_0^2(0)}\left(\partial_\omega\Lambda_{24}b + \partial_\omega\Lambda_2\left(d_2 - \frac{1}{3}\alpha a\right)\right).$$

证 由引理 15.15 可得

$$\partial_{d_1}\phi_\epsilon(0) = -\frac{\Lambda_4}{2R_0^2(0)}.$$

在推论 15.23 中对 d_1^* 微分并利用(15.43) 可得引理.

联系以上结果可得如下推论.

推论 15.25 设 $d = d_1^*$，置

$$b^* = -\frac{\partial_\omega\Lambda_{d_2}}{\partial_\omega\Lambda_{24}}\left(d_2 - \frac{1}{3}\alpha a\right).$$

对 $\epsilon > 0$ 充分小，如 $b > b^*$，则 $\partial_\omega\phi^u(0) > 0$；否则

$$\partial_\omega\phi^u(0) < 0.$$

更进一步，对 $0 \leqslant \beta < 1$，有

$$\frac{\partial_\omega\Lambda_{d_2}}{\partial_\omega\Lambda_{24}} < 0.$$

证 因$\dfrac{\Lambda_4}{R_0^2(0)} > 0$，$\partial_\omega\Lambda_{24} < 0$. 由引理 15.24 和命题 15.20 即得推论.

现 $\partial_\omega\phi^u(0)$ 已知，必须计算 $\partial_c r^u(0)$ 和 $\tilde{P}_{ij}$，如同(15.30)，置

$$\xi_1 = \partial_z W_p^u,\ \xi_2^- = \partial_c W_p^u,\ \xi^+ = W_p^u,$$

$P_{x_ix_j} = \delta x_i\Lambda\delta x_j$，如同(15.31) 置

$$P_{r3}^+ = P_{rs}(\xi_1, \xi_2^\pm),\ P_{r\varphi}^\pm = P_{r\varphi}(\xi_1, \xi_2^\pm),\ P_{s\varphi}^\pm = P_{s\varphi}(\xi_1, \xi_2^\pm).$$

为计算 $E'''(0)$，要求 $P_{rs}^- - P_{rs}^+$ 是已知的.

引理 15.26 置

$$\phi_c^\pm = \delta_\phi(\xi_2^\pm),$$

则当 $\epsilon = 0$ 时，$\phi_c^\pm = -\dfrac{1}{2}$.

证 易从变分方程(15.36)当 $\varepsilon = 0$ 时有

$$(\phi_c^{\pm})' = -2S_0\phi_c^{\pm} - S_0.$$

这个方程易于求解,有

$$R_0^2(Z)\phi_c^{\pm}(Z) = -\int_0^Z R_0^2(s)S_0(s)\mathrm{d}s = -\frac{1}{2}\int_{\pm\infty}^Z \partial_s(R_0^2(s))\mathrm{d}s,$$

由此即得结论.

引理 15.27 当 $\varepsilon = 0$ 时,

$$P_{r\varphi}^{\pm} = -\frac{1}{2}R_0{}',P_{s\varphi}^{\pm} = -\frac{1}{2}S_0{}'.$$

证 因 $\phi' = 0(\varepsilon = 0)$, 简单观察得

$$P_{r\varphi}^{\pm} = R_0'\phi_c^{\pm},P_{s\varphi}^{\pm} = S_0'\phi_c^{\pm}.$$

易从上面引理得到结论.

推论 15.28 对 $|Z| \leqslant M$,

$$|P_{r\varphi}^{+} - P_{r\varphi}^{-}| = O(\varepsilon), |P_{s\phi}^{+} - P_{s\varphi}^{-}| = O(\varepsilon).$$

由定义 $\bar{P}_{14} = P_{r\varphi}^{+} - P_{r\varphi}^{-}, \bar{P}_{34} = P_{s\varphi}^{+} - P_{s\varphi}^{-}$. 现计算 $P_{rs}^{\pm}$. 首先注意到

$$P_{r\varepsilon}(\xi_1,\xi_2^{\pm}) = P_{r\omega}(\xi_1,\xi_2^{\pm}) = 0,$$
$$P_{rc}(\xi_1,\xi_2) = RS.$$

因

$$P'_{rs} = -sP_{rs} + 2\Phi P_{r\varphi} + P_{r\omega} - (\varepsilon a - \Phi)P_{rc}$$
$$- 2\varepsilon a[(b + a\omega) + (d_1 - a)R^2 + (d_2 - a\alpha)R^4]P_{r\varepsilon}, \tag{15.44}$$

由此可得

$$(P_{rs}^{\pm})' = -sP_{rs}^{\pm} + 2\Phi P_{r\varphi}^{\pm} - (\varepsilon as - \Phi)RS.$$

这个方程的解为

$$R(Z)P_{rs}^{\pm}(Z) = -\varepsilon C_1\int_{\pm\infty}^Z R^2(s)S^2(s)\mathrm{d}s + \int_{\pm\infty}^Z R(Z)\Phi(s)$$
$$\cdot (R(s)S(s) + 2P_{r\varphi}^{\pm}(s))\mathrm{d}s. \tag{15.45}$$

由引理 15.28 和 $R' = RS$,对有界的 Z 有

$$R(Z)S(Z) + 2P_{r\varphi}^{\pm}(Z) = O(\varepsilon).$$

因 $\Phi = O(\varepsilon)$. 由此推出(15.45)的第二个积分为 $O(\varepsilon^2)$.

引理 15.29 设 $M > 0$ 为给定,则有

$$R_0(Z)P_{rs}^-(Z) = -\varepsilon a\int_{-\infty}^{Z}(R_0')^2(s)\mathrm{d}s + O(\varepsilon^2), Z \in (-\infty, M),$$

$$R_0(Z)P_{rs}^+(Z) = \varepsilon a\int_{-\infty}^{\infty}(R_0')^2(s)\mathrm{d}s + O(\varepsilon), Z \in (-M, \infty).$$

证 结论由(15.45),R.S的渐近展开和 $R' = RS$ 得到.

引理 15.30 设 $M > 0$ 给定. 则对 $|Z| \leqslant M$ 有

$$R_0(Z)\tilde{P}_{rs}(Z) = -\Lambda_2' a\varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

其中

$$\tilde{P}_{rs} = P_{rs}^- - P_{rs}^+.$$

推论 15.31 $\partial_c r^u(0)$ 具有渐近展开

$$\partial_c r^u(0) = Na\varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

这里 $N < 0, N = \dfrac{\Lambda_2'}{2R_0''(0)}$.

证 由引理 15.29 的结果以及

$$P_{rs}^-(0) = -S'(0)\partial_c r^u(0), \quad S'(0) = \frac{R''(0)}{R(0)}$$

得到.

推论 15.32 设 $E''(0) = 0$,则

$$E'''(0) = -(\tilde{N}a + O(e^{-\eta_4 M}))\varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

其中 $\tilde{N} > 0, \tilde{N} = 3\Lambda_2'\partial_\omega\Lambda_2$.

证 将 $\tilde{P}_{rs}$ 的表达式代入 $E'''(0)$ 得

$$\begin{aligned}E'''(0) &= -6\varepsilon a\Lambda_2'\int_{-\infty}^{\infty}R_0(s)\partial_\omega R_0(s)\mathrm{d}s + O(e^{-\eta_4 M})\varepsilon + O(\varepsilon^2)\\ &= -(3\Lambda_2'\partial_\omega\Lambda_2 a + O(e^{-\eta_4 M}))\varepsilon + O(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

常数 $\tilde{N} > 0$ 是从推论 15.17 得到.

由引理 15.11、引理 15.24 和推论 15.31 有

$$E''(0) = c_1 a\left(b - c_2\left(d_2 - \frac{1}{3}\alpha a\right)\right)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$

其中

$$c_1 = 2\Lambda_2'\Lambda_2\partial_\omega\Lambda_{24} < 0, \quad c_2 = -\frac{\partial_\omega\Lambda_{d_2}}{\partial_\omega\Lambda_{24}} > 0.$$

进一步,当 $E'''(0) = 0$ 时,由推论 15.32

$$E'''(0) = -\varepsilon_3 a\varepsilon + O(\varepsilon^2), \qquad \varepsilon_3 > 0.$$

定理 15.1 的证明实质上已完成,因 $E^{(4)} < 0$(推论 15.5) 和 $E(0) = E'(0) = 0$. 当 $E''(0) > 0$ 时,则在靠近 $\lambda = 0$ 处有 $E(\lambda)$ 的二个实零点,其一是正的,另一是负的. 因 $E''(0) < 0(E''(0) = 0)$,能推出当 $E''(0)$ 改变符号,正零点运动通过原点. 因此 $E''(0) < 0$ 存在二个小的实负零点. 特征值为 $O(\varepsilon)$ 直接从 $E''(0) = O(\varepsilon^2)$ 和 $E'''(0) = O(\varepsilon)$ 推出.

为了利用定理 15.2 的结果推出多重脉冲轨道的存在性,必须证明 $\partial_\omega\phi^u(0) \neq 0$. 这个条件正是推论 15.26 的推论. 对 $b < b^*$ 多重脉冲解不稳定来自[4] 中原来的脉冲是不稳的($b < b^*$).

§16 广义 Ginzburg-Landau 方程平面波的非线性不稳定性

考虑如下广义 Ginzburg - Landau 方程

$$W_t = \alpha_1 W_{xx} + (\lambda(|W|) + i\omega(|W|))W + \alpha_2|W|^2 W + \alpha_3|W|^2 W_x + \alpha_4 W^2\overline{W}_x, x \in R, t > 0, \quad (16.1)$$

具周期初值条件

$$\begin{cases} W(x,0) = W_0(x), x \in R, \\ W(x-D,t) = W(x+D,t), D > 0, x \in R, t > 0, \end{cases} \quad (16.2)$$

其中 $W(x,t)$ 为复值函数,$\alpha_j = a_j + ib_j$,

$$\begin{cases} \lambda(r) = c_1 + c_2 r^2 + c_3 r^4, \\ \omega(r) = d_1 r^2 + d_2 r^4, \end{cases} \quad (16.3)$$

其中 $c_j, d_j \in R$,为方便计,设 $\alpha_1 = 1$,GL 方程(16.1) 的平衡态解

为如下的平面波

$$W_1(x,t) = r_0 e^{-i\theta_0 x}, \tag{16.4}$$

其中

$$\begin{cases} \lambda(r_0) = \theta_0^2 - (b_3 - b_4)\gamma_0^2\theta_0, \\ \omega(r_0) = (a_3 - a_4)\gamma_0^2\theta_0. \end{cases} \tag{16.5}$$

T. Kapitula 曾证明

$$\frac{2^{\frac{3}{4}} + \max\left\{1, \left(\frac{2}{\Gamma_3}\right)^{\frac{3}{4}}\right\}}{\Gamma_3} \cdot | r_0(B_- r_0^2 - 2\theta_0) | < 1$$

和初始能量充分小时,这里波是非线性稳定的,其中

$$B_- = b_3 - b_4, \Gamma_3 = r_0\lambda'(r_0) + 2B_- r_0^2\theta_0 < 0.$$

这一节,我们将证明在方程系数的有关条件下,平面波是非线性不稳定的. 主要定理有

定理 16.1 设 $\Gamma_3 > 0$ 和 $\inf\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \in \sigma_+(\mathscr{L})\} > 0$,则方程(16.1)的平面波解是非线性不稳定的,其中算子 $\mathscr{L}$ 将在下面表示.

令

$$W(x,t) = \gamma(x,t)e^{-i\theta(x,t)}, \tag{16.6}$$

则方程(16.1)可写为

$$\begin{cases} r_t = r_{xx} + r\lambda(r) - r\theta_x^2 + A_+ r^2 r_x + B_- r^3\theta_x, \\ \theta_t = \theta_{xx} - \omega(r) + \dfrac{2r_x}{r}\theta_x - B_+ rr_x + A_- r^2\theta_x, \end{cases} \tag{16.7}$$

其中 $A_\pm = a_3 \pm a_4, B_\pm = b_3 \pm b_4$.

为了证明定理 16.1,我们先对其线性化方程作谱分析,然后证明非线性不稳性. 令

$$\begin{cases} r = r_0 + \rho, \\ \theta = \theta_0 + \phi, \end{cases} \tag{16.8}$$

则(16.7)变为

$$
\begin{cases}
\rho_t = \rho_{xx} + (r_0+\rho)\Big[\lambda(r_0) + \lambda'(r_0)\rho + \dfrac{\lambda''(r_0)}{2}\rho^2 + \dfrac{\lambda'''(r_0)}{6}\rho^3 \\
\qquad + \dfrac{\lambda^{(4)}(r_0)}{24}\rho^4\Big] - (r_0+\rho)(\theta_0^2 + 2\theta_0\phi_x + \phi_x^2) + A_+(r_0{}^2 \\
\qquad + 2r_0\rho + \rho^2)\rho_x + B_-(r_0^3 + 3r_0^2\rho + 3r_0\varphi^2 + \rho^3)(\theta_0 + \phi_x), \\
\phi_t = \phi_{xx} - \Big[\omega(r_0) + \omega'(r_0)\rho + \dfrac{\omega'''(r_0)}{2}\rho^2 + \dfrac{\omega'''(r_0)}{6}\rho^3 \\
\qquad + \dfrac{\omega^{(4)}(r_0)}{24}\rho^4\Big] + \dfrac{2\rho_x}{r_0+\rho}(\theta_0 + \phi_x) - B_+(r_0+\rho)\rho_x \\
\qquad + A_-(r_0^2 + 2r_0\rho + \rho^2)(\theta_0 + \phi_x).
\end{cases}
\tag{16.9}
$$

注意到(16.5)有

$$
\begin{cases}
\rho_t = \rho_{xx} + [r_0\lambda'(r_0) + \lambda(r_0) - \theta_0^2 + 3B_- r_0^2\theta_0\rho + A_+ r_0^2\rho_x \\
\qquad + (B_- r_0^3 - 2r_0\theta_0)\phi_x + (3B_- r_0^2 - 2\theta_0)\rho\phi_x + 2A_+ r_0\rho\rho_x \\
\qquad - r_0\phi_x^2 + \Big[3B_- r_0\theta_0 + \lambda'(r_0) + \dfrac{r_0}{2}\lambda''(r_0)\Big]\rho^2 + \Big[\dfrac{\lambda''(r_0)}{2} \\
\qquad + \dfrac{r_0\lambda'''(r_0)}{6} + B_-\theta_0\Big]\rho^3 - \rho\phi_x^2 + A_+\rho^2\rho_x + 3B_- r_0\rho^2\phi_x \\
\qquad + \Big[\dfrac{\lambda'''(r_0)}{6} + \dfrac{r_0\lambda^{(4)}(r_0)}{24}\Big]\rho^4 + B_-\rho^3\phi_x + \dfrac{\lambda^{(4)}(r_0)}{24}\rho^5, \\
\phi_t = \phi_{xx} + [2A_- r_0\theta_0 - \omega'(r_0)]\rho - \left(B_+ r_0 - \dfrac{2\theta_0}{r_0}\right)\rho_x \\
+ A_- r_0{}^2\phi_x - B_+\rho\rho_x + \Big[A_-\theta_0 - \dfrac{\omega''(r_0)}{2}\Big]\rho^2 + 2A_- r_0\rho\phi_x \\
+ A_-\rho^2\phi_x - \dfrac{\omega'''(r_0)}{6}\rho^3 - \dfrac{\omega^{(4)}(r_0)}{24}\rho^4 + \dfrac{2\theta_0\rho_x + 2\rho_x\phi_x}{r_0+\rho}.
\end{cases}
\tag{16.10}
$$

由(16.10)可得如下线性化方程

$$
U_t = U_{xx} + NU_x + MU, \tag{16.11}
$$

其中 $U = \begin{pmatrix} \rho \\ \phi \end{pmatrix}$,

$$N = \begin{bmatrix} A_+ r_0^2 & B_- r_0^3 - 2r_0\theta_0 \\ \dfrac{2\theta_0}{r_0} - B_+ r_0 & A_- r_0^2 \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} r_0 r'(\gamma_0) + \lambda(r_0) - \theta_0^3 + 3B_- r_0^2\theta_0 & 0 \\ 2A_- r_0\theta_0 - \omega'(r_0) & 0 \end{bmatrix}.$$

令

$$\mathscr{L} \equiv I_2\partial_x{}^2 + N\partial_x + M,$$

$\mathscr{L}$的定义域为

$$D(\mathscr{L}) = \{y \in L^2(-D,D) \times L^2(-D,D) \mid g(-D) = g(D),$$
$$\mathscr{L}(g) \in L^2(-D,D) \times L^2(-D,D)\},$$

则算子 $\mathscr{L}$在任何 L^p 空间上($1 \leqslant p \leqslant \infty$)有界于以下曲线

$$C_s = \{r : |-k^2 I_2 + iNk + (M - rI_2)| = 0, k \in R\}. \tag{16.12}$$

对 $r \in C_s$ 有

$$r(k) = -k^2 + \frac{\Gamma_3}{2} + ia_3 r_0^2 k + \left(\frac{\Gamma_3^2}{4} + \Gamma_1 k^2 + i\Gamma_2 k\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{16.13}$$

其中

$$\begin{cases} \Gamma_1 = 4\theta_0^2 - 4b_3 r_0^2\theta_0 + (B_+ B_- - a_4^2) r_0^4, \\ \Gamma_2 = 2r_0\theta_0\omega'(r_0) + a_4\Gamma_3 r_0^2 + 2A_- B_- r_0^4\theta_0 \\ \qquad - 4A_- r_0^2\theta_0^2 - B_- r_0^3\omega'(r_0), \\ \Gamma_3 = r_0\lambda'(r_0) + 2B_- r_0^2\theta_0. \end{cases} \tag{16.14}$$

因此

$$\mathrm{Re}r(k) = -k^2 + \frac{\Gamma_3}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\Lambda + \Omega)^{\frac{1}{2}}, \tag{16.15}$$

其中

$$
\begin{cases}
\Lambda = \dfrac{\Gamma_3^2}{9} + \Gamma_1 k^2, \\
\Omega = (\Lambda^2 + \Gamma_2^2 k^2)^{\frac{1}{2}}.
\end{cases}
\tag{16.16}
$$

从 $\mathrm{Re}r(k)$ 的表达式(2.15) 易得

引理 16.2 设 $\Gamma_3 > 0$ 且 k 充分小,则 $\mathrm{Re}\gamma(k) > 0$. 由此可知,GL 方程的平衡解是线性不稳定的.

现考虑非线性不稳定性.

令

$$
Q(U) = \begin{pmatrix} h_1(\rho, \rho_x, \phi_x) \\ h_2(\rho_1, \rho_x, \phi_x) \end{pmatrix},
$$

其中

$$
\begin{cases}
h_1(\rho, \rho_x, \phi_x) = (3B_- r_0^2 - 2\theta_0)\rho\phi_x + 2A_+ r_0\rho\rho_x \\
- r_0\phi_x^2 + [3B_- r_0\theta_0 + \lambda'(r_0) + \dfrac{r_0}{2}\lambda''(r_0)]\rho^2 + \left[\dfrac{\lambda''(r_0)}{2}\right. \\
\left. + \dfrac{r_0\lambda'''(r_0)}{6} + B_- \theta_0\right]\rho^3 - \rho\phi_x^2 + A_+ \rho^2\rho_x + 3B_- r_0\rho^2\phi_x \\
+ \left[\dfrac{\lambda'''(r_0)}{6} + \dfrac{r_0\lambda^{(4)}(r_0)}{24}\right]\rho^4 + B_- \rho^3\phi_x + \dfrac{\lambda^{(4)}(r_0)}{24}\rho^5, \\
h_2(\rho, \rho_x, \phi_x) = - B_+ \rho\rho_x + \left[A_- \theta_0 - \dfrac{\omega''(r_0)}{2}\right]\rho^2 + 2A_- r_0\rho\phi_x \\
+ A_- \rho^2\phi_x - \dfrac{\omega'''(r_0)}{6}\rho^3 - \dfrac{\omega^{(4)}(r_0)}{24}\rho^4 + \dfrac{2\theta_0\rho_x + 2\rho_x\phi_x}{r_0 + \rho},
\end{cases}
$$

则方程(16.10) 可写成

$$
U_t = \mathscr{L}U + Q(U). \tag{16.17}
$$

显然如果方程(16.17) 的零解是不稳定的,则(16.17) 的平衡解 $\begin{pmatrix} r_0 \\ \theta_0 x \end{pmatrix}$ 也是不稳定的,为此我们仅需证明方程(16.17) 零解的不稳定性,我们用文献[18] 中的定理 9.13 来证明. 为此来证明几个引理.

引理 16.3 算子 $\mathscr{L}: D(\mathscr{L}) \subset L^2(-D,D) \times L^2(-D,D) \rightarrow$

$L^2(-D,D)\times L^2(-D,D)$ 是扇形的，$\mathscr{L}$ 的图模等价于 $D(\mathscr{L})$ 的模.

证 因 Laplace 算子是扇形的，算子 $\mathscr{L}$ 是 Laplace 算子的低阶扰动，由 $\mathscr{L}$ 算子的定义可知 $\mathscr{L}$ 的图模等价于 $D(\mathscr{L})$ 的模.

由引理 16.2 可得

引理 16.4 设 $\Gamma_3>0$，则存在正数 ω_0 使得

$$\sigma_+(\mathscr{L})=\sigma(\mathscr{L})\cap\{x\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}\lambda>0\}\neq\Phi. \tag{16.18}$$

引理 16.5 设 O 为 $D(\mathscr{L})$ 中原点的邻域，则 $Q:O\to L^2(-D,D)\times L^2(-D,D)$ 为 C^1 函数，具有局部 Lipschitz 连续导数，且满足

$$Q(0)=0,Q'(0)=0. \tag{16.19}$$

其中 $Q'(0)$ 表示 $Q(U)$ 在原点的 Fréchet 导数.

证 由 $h_1(\rho,\rho_x,\phi_x)$ 和 $h_2(\rho,\rho_x,\phi_x)$ 的定义，$Q(0)=0$，令 D_1,D_2 分别表示对于 ρ,ϕ 的 Fréchet 导数，则有

$$\begin{aligned}
D_1h_1=&(3B_-r_0^2-2Q_0)\phi_x+2A_+\left(r_0\rho_x+r_0\rho\frac{\partial}{\partial x}+\rho\rho_x+\frac{1}{2}\rho^2\frac{\partial}{\partial x}\right)\\
&+2\left[3B_-r_0(\theta_0+\phi_x)+\lambda'(r_0)+\frac{r_0}{2}\lambda''(r_0)+3B_-r_0\rho\phi_x\right]\rho\\
&3\left[\frac{\lambda''(r_0)}{2}+\frac{r_0\lambda''(r_0)}{6}+B_-\theta_0\right]\rho^2+4\left[\frac{\lambda'''(r_0)}{6}\right.\\
&\left.+\frac{r_0\lambda^{(4)}(r_0)}{24}\right]\rho^3+5\frac{\lambda^{(4)}(r_0)}{24}\rho^4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2h_1=&[(3B_-r_0^2-2\theta_0)-2\phi_x+3B_-r_0\rho+B_-\rho^2]\rho\frac{\partial}{\partial x}\\
&-2r_0\phi_x\frac{\partial}{\partial x},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1h_2=&[-B_+\rho_x-2A_-r_0\phi_x]+\rho\left[-B_t\frac{\partial}{\partial x}+2A_-\theta_0-\omega''(r_0)\right.\\
&\left.+2A_-\phi_x\right]-\frac{\omega''(r_0)}{2}\rho^2-\frac{\omega^{(4)}(r_0)}{6}\rho^3\\
&+\frac{2\theta_0+2\phi_x}{r_0+\rho}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{2\theta_0\rho_x+2\rho_x\phi_x}{(r_0+\rho)^2},
\end{aligned}$$

$$D_2 h = \left(2A_- r_0\rho + A_-\rho^2 + \frac{2\rho_x}{r_0+\rho}\right)\frac{\partial}{\partial x}.$$

因此

$$Q'(U)\bigg|_{U=0} = \begin{pmatrix} D_1 h_1 & D_2 h_1 \\ D_1 h_2 & D_2 h_2 \end{pmatrix}\bigg|_{U=0} = 0,$$

且 $Q: O \to L^2(-D,D) \times L^2(-D,D)$ 为 C^1 函数,令

$$\varphi_1 = (3B_- r_0^2 - 2\theta_0)\phi_x + 2\Big[3B_- r_0(\theta_0 + \phi_x) + \lambda'(r_0) + \frac{r_0}{2}\lambda''(r_0) + 3B_- r_0\rho\phi_x\Big]\rho + 2A_+(r_0\rho_x + \rho\rho_x) + 3\Big[\frac{\lambda''(r_0)}{2} + \frac{r_0\lambda'''(r_0)}{6} + B_-\theta_0\Big]\rho^2 + 4\Big[\frac{\lambda'''(r_0)}{6} + \frac{r_0\lambda^{(4)}(r_0)}{24}\Big]\rho^3 + 5\frac{r^{(4)}(r_0)}{24}\rho^4,$$

$$\Phi_1 = 2A_+\left(r_0\rho + \frac{1}{2}\rho^2\right),$$

$$\Phi_2 = -2r_0\phi_x + [(3B_- r_0{}^2 - 2\theta_0) - 2\phi_x + 3B_- r_0\rho + B_-\rho^2]\rho,$$

$$\Psi_2 = -2A_- r_0\phi_x + [2A_-\theta_0 - \omega''(r_0) + 2A_-\phi_x]\rho - B_+\rho_x - \frac{\omega'''(r_0)}{2}\rho^2 - \frac{\omega^{(4)}(r_0)}{6}\rho^3 - \frac{2\theta_0\rho_x + 2\rho_x\phi_x}{(r_0+\rho)^2},$$

$$\Phi_3 = -B_+\rho + \frac{2\theta_0 + 2\phi_x}{r_0+\rho},$$

$$\Phi_4 = 2A_- r_0\rho + A_-\rho^2 + \frac{2\rho_x}{r_0+\rho}.$$

令 $R_1(U) = \begin{pmatrix} \Psi_1 & O \\ \Psi_2 & O \end{pmatrix}$, $R_2(U) = \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_3 & \Phi_4 \end{pmatrix}$,则有

$$Q'(U) = R_1(U) + R_2(U)\frac{\partial}{\partial x}.$$

现证 $Q(U)$ 具有局部 Lip 连续导数,对任何 $U, V \in O$,

$$U = \begin{pmatrix}\rho_1 \\ \phi_1\end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix}\rho_2 \\ \phi_2\end{pmatrix}, \forall H = \begin{pmatrix} f \\ g\end{pmatrix} \in O,$$

有

$$\|[Q'(U) - Q'(V)]H\| \leqslant \|[R_1(U) - R_1(V)]H\|$$

$$
+ \| [R_2(U) - R_2(V)]H_x \| \leqslant \| \Psi_1(U)f - \Psi_1(V)f \|
+ \| \Psi_2(U)f - \Psi_2(V)f \| + \| \Phi_1(U)f_x - \Phi_1(V)f_2 \|
+ \| \Phi_2(U)g_x - \Phi_2(V)g_x \| + \| \Phi_3(U)f_x - \Phi_3(V)f_x \|
+ \| \Phi_4(U)g_x - \Phi_4(V)g_x \| .
$$

注意到 $H'(-D,D) \hookrightarrow L^\infty(-D,D)$,我们有

$$
\begin{aligned}
&\| \Psi_1(U)f - \Psi_1(V)f \| \leqslant [| 3B_- r_0^2 - 2\theta_0 | \| \phi_{1x} - \phi_{2x} \| \\
&+ 2 | 3B_- r_0\theta_0 + \lambda'(r_0) + \frac{r_0}{2}\lambda''(r_0) | \| \rho_1 - \rho_2 \| + 6 | \beta_- r_0\theta_0 | \\
&(\| \phi_{1x} \| \| \rho_1 - \rho_2 \|_\infty + \| \rho_2 \|_\infty \| \phi_{1x} - \phi_{2x} \|) + 3 | B_- r_0 | \\
&\cdot (\| \rho_1 \|_\infty^2 \| \phi_{1x} - \phi_{2x} \| + \| \phi_{2x} \| (\| \rho_1 \|_\infty + \| \rho_2 \|_\infty) \| \rho_1 \\
&- \rho_2 \|_\infty) + 2 | A_+ r_0 | \| \rho_{1x} - \rho_{2x} \| + 2 | A_+ | (\| \rho_{1x} \| \| \rho_1 \\
&- \rho_2 \|_\infty + \| \rho_2 \|_\infty \| \rho_{1x} - \rho_{2x} \|) + 3 \left| \frac{\lambda''(0)}{2} + \frac{r_0\lambda'''(r_0)}{6} + B_- \theta_0 \right| \\
&\cdot (\| \rho_1 \|_\infty + \| \rho_2 \|_\infty) \| \rho_1 - \rho_2 \| + 4 \left| \frac{\lambda'''(r_0)}{6} + \frac{r_0\lambda^{(4)}(r_0)}{24} \right| (\| \rho_1 \|_\infty^2 \\
&+ \| \rho_1 \|_\infty \| \rho_2 \|_\infty + \| \rho_2 \|_\infty^2) \| \rho_1 - \rho_2 \| + 5 \left| \frac{\lambda^{(4)}(r_0)}{24} \right| (\| \rho_1 \|_\infty^3 \\
&+ \| \rho_1 \|_\infty^2 \| \rho_2 \|_\infty + \| \rho_1 \|_\infty \| \rho_2 \|_\infty^2 + \| \rho_2 \|_\infty^3) \| \rho_1 - \rho_2 \| \| f \| \\
&\leqslant C(\| U \|_{H^1}, \| V \|_{H^1}) \| U - V \|_{H^1} \| f \| .
\end{aligned}
$$

类似地有

$$
\begin{aligned}
&\| \Psi_2(U)f - \Psi_2(V)f \| \leqslant C(\| U \|_{H^1}, \| V \|_{H^1}) \| U - V \|_{H^1} \| f \| , \\
&\| \Phi_1(U)f_x - \Phi_1(V)f_x \| \leqslant C(\| U \|_{H^1}, \| V \|_{H^1}) \| U - V \|_{H^1} \| fx \| , \\
&\| \Phi_2(U)g_x - \Phi_2(V)g_x \| \leqslant C(\| U \|_{H^1}, \| V \|_{H^1}) \| U - V \|_{H^1} \| g_x \| , \\
&\| \Phi_3(U)f_x - \Phi_3(V)f_x \| \leqslant C(\| U \|_{H^1}, \| V \|_{H^1}) \| U - V \|_{H^1} \| f_x \| , \\
&\| \Phi_4(U)g_x - \Phi_4(V)g_x \| \leqslant C(\| U \|_{H^1}, \| V \|_{H^1}) \| U - V \|_{H^1} \| g_x \| .
\end{aligned}
$$

因此存在常数 $\tilde{C}$ 使得

$$
\| Q'(U) - Q'(V) \| \leqslant \tilde{C}(\| U \|_{H^1}, \| V \|_{H^1}) \| U - V \|_{H^1} .
$$

这就完成了引理的证明.

利用引理 16.3—16.5 和文献[18]中的定理 9.1.3,当 $\Gamma_3 > 0$

和 $\operatorname{Inf}\{\operatorname{Re}\lambda : a \in \sigma_4(\mathscr{Y})\} > 0$ 时，方程(16.17)的零解是不稳定的，因此定理 16.1 得证.

参 考 文 献

[1] Guo Boling, Gao Hongjun, Finite dimensional behavior for a generalized Ginzburg-Landau equation, Prog. Nat. Sci., 1995, 659—610.

[2] R. Temam. Infinite Dimensional Dynamical systems in mechanics and Physics, 1988.

[3] J. Duan and P. Holmes, Fronts, Domain walls and pulses for a generalized Ginburg-Landau equation, Proc. Edinburgh math. Soc. 38, 1994, 77—79.

[4] A. Doelman, R. A. Gardner, C. K. R. T. Jones, Instability of quasi periodic solution of the solutions of The Ginzbarg-Landau equation, Proc. Rog. Soc. Edinburgh, 125A, 1995, 501—517.

[5] T. Kapitule, On the nonlinear stability of plane waves for the Ginzburg-Landau equation, Comm. Pure. Appl. Math. 47, 1994, 831—841.

[6] 高洪俊，郭柏灵，一维广义 Ginzburg-Landau 方程的有线维惯性形式，中国科学，25 (12)，1995，1233—1247.

[7] Gao Hongjun, Exponential attractors for a generalized Ginzburg-Landau equation, Appl. Math. (Chinese), Vol. 16, No. 9, 1995, 877—882.

[8] P. Constantin, A Construction of inertial manifolds Contemporary Math. Vol. 99, 1989, 27—62.

[9] J. Duan, E. S. Titi, P. holmes, Regularity, approximation and asymptotic dynamics for a generalized Ginzburg-Landau equation, Nonlinearity, 6, 1993, 915—933.

[10] Gao Hongjun and Guo Boling, On the Nunber of determining nodes for the generalized Ginzburg-Landau equation, J. Part. Diff, Eqs., 10, 1997, 97—106.

[11] Guo Boling, Lu Bainian, Spatiatem polar Complexity of the cubic Ginzburg-Landau equation, Comm. In Nonlinear Sci. Number, Simal., 1:4, 1996, 12—17.

[12] Guo Boling, Jing Zhujan, Lu Bainian, Slow tine-periodic Solutions of cubicquintic Ginzbary-Landau equation(Ⅰ), Equilibria problem, Prog. Nat. Sci., Vol. 8, No. 4, 1998, 403—415.

[13] Guo Boling, Jing Zhujun, Lubainian, Slow tine-periodic Solutions of cubicquintic Ginzbary-Landau equation(Ⅱ), Equilibria problem, Prog. Nat. Sci., Vo8., No. 5, 1998, 539—547.

[14] Guo Boling, Lu Bainian, Stability of travelling wave solutions of the derivative Ginzburg-Landau, equations, to appear.

[15] I. Kukavica, An upper bound for the winding number for solutions of the [17]

Ginzburg-Landau equations, Idiana Uni. Math. J., Vol. 41, No. 3, 825—836.

[16] Guo Boling, Chang Qianshun, Attractors and dimensions for discretizations of a generalized Ginzburg-Landau equation. J. DDE., 9(4), 1996, 365—383.

[17] T. Kapitula, Stability criterion for bright solitary waves of the perturbed cubicqinitic Shrodinger equation, Phys. D. 116, 1998, 95—120.

[18] Guo Boling, Jiang Murong, Time-Periodic Solutions to the Ginzburg-Landau BBM equations, J. Part. Diff. Eqs., 14, 2001, 97—104.

[19] Guo Boling, Yun Rong, Almost periodic solution of generalized Ginzburg-Landau equation, Prog. Natural. Sci., Vol. 11, No 7, 2001, 503—515.

[20] Yongsheng Li, Boling Guo, Global existence of solution to derivative 2D Ginzbarg-Landau equation, J. Math. Anal. Appl., 249, 412—432.

[21] B. Guo and B. Wang, Finite dimensional behavior for the derivative Ginzburg-Landau equation in two spatial dimensions, Phy. D., 89, 1995, 83—90.

[22] H. and J. Duan, On the initial value problem for the generalized 2D Ginzburg-Landau equation, J. Math. Anal. Appl., 216, 1997, 536—548.

[23] Guo Bolig, Wang Bixang, Gevrey regularity and approximate inertial manifolds for the derivative Ginzburg-Landau equations, Discrete and Continuous Dynamical system 2 (40), 1996, 455—466.

[24] Guo Boling, Wang Bixiang, Approximation to the global attactor for the Landau-Lifshitz equation of the ferromagnetic chain, Beijing Math. 1, 1995, 164—175.

[25] Guo Boling, Jiang Murong, attractors for the Ginzburg-Landau-BBM equations in an unbounded domain, Acta. Math. Sci., 20(1), 2000, 122—130.

[26] Boling Guo, Bixiang Wang, Exponetial attractors for the generalized Ginzburg-Landau equation, Acta Math. Sinica, English Serious, Vol. 16, No. 3, 2000, 515—526.

[27] Henry D., Geometric theory of semilinear parabolic equations, Springer-Verlag, New York(1981).

第三章　高维 Ginzburg-Landau 方程的整体解及其渐近性质

§1　高维 Ginzburg-Landau 方程的整体解

GL 方程

$$\partial_t u = Ru + (1+i\nu)\Delta u - (1+i\mu)|u|^{2\sigma}u, \tag{1.1}$$

对应的 NLS 方程为

$$\partial_t u = i\nu\Delta u - i\mu|u|^{2\sigma}u. \tag{1.2}$$

在零解附近线性化方程(1.1)得

$$\partial_t \tilde{u} = R\tilde{u} + (1+i\nu)\Delta\tilde{u}. \tag{1.3}$$

小扰动解具　$\tilde{u}(x,t) = \tilde{a}(t)\exp(i\xi x)$，其中 $\xi \in 2\pi z^d((2\pi z)^d)$，$\tilde{a}(t)$满足方程

$$\partial_t \tilde{a} = R\tilde{a} - (1+i\nu)|\xi|^2\tilde{a}. \tag{1.4}$$

由此可知小扰动关于零解：

当$|\xi|^2 < R$ 时，线性不稳定，

当$|\xi|^2 > R$ 时，线性渐近稳定，

当$|\xi|^2 = R$ 时，线性中性稳定.

(1.1)最简单的非平凡空间周期解为旋转波解，具有形式

$$u(x,t) = a\exp[i(\xi\cdot x - wt)], \tag{1.5}$$

其中 $a\in C$，$w\in \mathbb{R}$，$\xi\in 2\pi Z^d$ 满足

$$w = \mu R + (\nu-\mu)|\xi|^2, |a|^{2\sigma} = R - |\xi|^2. \tag{1.6}$$

对应于 $\xi=0$，最一般的是空间齐次解，即 Stoke 解. 对于每个波矢量 ξ 使得$|\xi|^2 < R$，(1.5)，(1.6)定义具有圆模的旋转波解. 这些解在许多物理应用问题中具有重要作用. 原因之一是，对于 CGL 方程的初值问题的存在性人们更关心在空间$L^p(\mathbb{T}^d)$中比起在空

间 $L^p(\mathbb{R}^d)$中，由于旋转波(1.5)的简单形式，它的线性稳定性更易于精确地分析．对于 CGL 方程(1.1)关于旋转波解(1.5)的简单线性化，反而导致具有变系数的方程．如果我们引入如下形式扰动解：

$$u(x,t)=a\exp[i(\xi\cdot x-\omega t)][1+\varepsilon\tilde{u}(x,t)], \tag{1.7}$$

则可得到线性化方程

$$\begin{aligned}\partial_t\tilde{u}=&2(1+i\nu)i\xi\cdot\Delta\tilde{u}+(1+i\nu)\Delta\tilde{u}\\&-(1+i\mu)\sigma|a|^{2\sigma}(\tilde{u}+\tilde{u}^*),\end{aligned} \tag{1.8}$$

其中$\tilde{u}^*$表示$\tilde{u}$的复数共轭，这时方程(1.8)分为实部和虚部，均为常系数方程，可用 F 氏分析．

我们分析(1.8)齐次解的线性稳定性．(1.8)简化为

$$\partial_t\tilde{u}=(1+i\nu)\Delta\tilde{u}-(1+i\mu)\sigma R(\tilde{u}+\tilde{u}^*). \tag{1.9}$$

当(1.9)写为$\tilde{u}$的实部$\tilde{u}_R$和虚部$\tilde{u}_I$线性方程时，可得：

$$\partial_t\begin{pmatrix}\tilde{u}_R\\\tilde{u}_I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta-2\sigma R&-\nu\Delta\\\nu\Delta-2\mu\sigma R&\Delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{u}_R\\\tilde{u}_I\end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

可以证明，波矢量 $\tilde{\xi}$的 F 氏模当

$$(1+\nu^2)|\tilde{\xi}|^4+2\sigma R(1+\mu\nu)|\tilde{\xi}|^2>0 \tag{1.11}$$

时，具有指数衰减．易知当 $1+\mu\nu\geqslant0$ 时，对于某些 σ,R 成立．

更为一般的旋转波解为调和分析解，具有形式

$$u(x,t)=a(t)\exp(i\xi\cdot x), \tag{1.12}$$

其中复值振幅 $a=a(t)$满足

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=[R-(1+i\nu)|\xi|^2]a-(1+i\mu)|a|^{2\sigma}a. \tag{1.13}$$

用 a^*乘方程(1.13)，分开实部和虚部可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|a|^2=(R-|\xi|^2)|a|^2-|a|^{2\sigma+2}, \tag{1.14}$$

$$\frac{1}{2i}\left(a^*\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}-a\frac{\mathrm{d}a^*}{\mathrm{d}t}\right)=-\nu|\xi|^2|a|^2-\mu|a|^{2\sigma+2}. \tag{1.15}$$

容易看到，当 $R-|\xi|^2<0$ 时，这些解是指数衰减于零的，此时这些解是平凡解稳定流形的部分．当 $R-|\xi|^2=0$ 时，这时解代数地衰减于零，这反映了零解的 margin 稳定性．当 $R-|\xi|^2>0$ 时，则

对于矢量 ξ,这些解是指数吸引于旋转波解.此时这些解位于零解的不稳定流形和旋转波解的稳定流形的交集上.

具行波的旋转波解为

$$u(x,t)=\exp(-i\alpha t)v(x-ct), \tag{1.16}$$

其中 $\alpha\in\mathbb{R}$ 为相频率,$c\in\mathbb{R}^d$ 为波速,$v=v(z)$ 为复值函数,$z=x-ct\in\mathbb{R}^d$ 满足

$$(R+i\alpha)v+(1+i\nu)\Delta_Z v-c\cdot\nabla_Z v-(1+i\mu)|v|^{2\sigma}v=0. \tag{1.17}$$

当 $c=0$ 时,此类行波解也称为驻波解,当 $\omega=\alpha+\boldsymbol{\xi}\cdot c$ 成立时.旋转波(1.5)为(1.17)的解.

行波解的稳定性是不容易得到的,例如,为研究它们的线性稳定性,引入扰动形式

$$u(x,t)=\exp(-i\alpha t)[v(x-ct)+\varepsilon\tilde{v}(x-ct,t)], \tag{1.18}$$

代入 CGL 方程(1.1),保留 ε 的一阶项得

$$\partial_t\tilde{v}=(R+i\alpha)\tilde{v}+(1+i\nu)\Delta_Z\tilde{v}-c\cdot\nabla_Z\tilde{v}-(1+i\mu)|v|^{2\sigma}\tilde{v}$$
$$-\sigma(1+i\mu)|v|^{2\sigma-2}v(v^*\tilde{v}+v\tilde{v}^*). \tag{1.19}$$

右端的算子不依赖于 z,因此线性稳定性分析归结为算子半群的研究,这是不容易的,因为算子一般具有复杂依赖于 z 的系数.

现考虑 GL 方程特殊情况 $\mu=\nu$,引入复值场 $v=v(x,t)$ 为

$$u(x,t)=\exp(-iRt)v(x,t), \tag{1.20}$$

其中 $v(x,t)$ 满足

$$\partial_t v=-(1+i\mu)\frac{\delta G}{\delta v^*}, \tag{1.21}$$

这里

$$\frac{\delta G}{\delta v^*}=-\Delta v+|v|^{2\sigma}v-Rv. \tag{1.22}$$

引入 Ginzburg-Landau 泛函 G

$$G=\int_{\mathbb{R}^d}\left(|\Delta v|^2+\frac{1}{\sigma+1}|v|^{2\sigma+2}-R|v|^2\right)\mathrm{d}x. \tag{1.23}$$

通过流(1.21)计算 G 的导数得

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}=\int_{\mathbb{T}^d}\left(\frac{\delta G}{\delta v}\partial_t v+\frac{\partial G}{\partial v^*}\partial_t v^*\right)\mathrm{d}x$$

$$=-2\int_{\mathbb{T}^d}\left|\frac{\delta G}{\delta v}\right|^2\mathrm{d}x. \tag{1.24}$$

这表明 G 为单调递减函数. 除非$\frac{\delta G}{\delta v^*}=0$,这是流(1.21)的定常点,也是 GL 流的驻定波,符合一种特殊情况——圆的驻定调和波.

$$v(x)=b\exp(i\xi\cdot x),\ |b|^{2\sigma}=R-|\xi|^2>0, \tag{1.25}$$

其中 $b\in C,\xi\in 2\pi z^d$,当 $d=1$ 时,定常点满足 ODE:

$$-\partial_{xx}v+|v|^{2\sigma}v-Rv=0. \tag{1.26}$$

用相平面分析可得它的存在性. 更进一步,这些解能用椭圆函数的明显表达式表出($\sigma=1,2$),当 $\sigma>2$ 且为整数时,可用超椭圆函数表出.

一般说来,(1.24)表明 G 可形式上看作流的整体 Lyapunov 函数,事实上,待证明它的充分正则性时可严格建立它. 任何定常解 v 的稳定性能由泛函 G 的 Hessian 算子 $\mathscr{H}(v)$在点 v 的谱决定,即

$$\mathscr{H}(v)=\begin{pmatrix}\frac{\delta^2 G}{\delta v^*\delta v} & \frac{\delta^2 G}{\delta v^*\delta v^*}\\ \frac{\delta^2 G}{\delta v\delta v} & \frac{\delta^2 G}{\delta v\delta v^*}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\Delta+(\sigma+1)|v|^{2\sigma}-R & \sigma|v|^{2\sigma-2}v^2\\ \sigma|v|^{2\sigma-2}v^{*2} & -\Delta+(\sigma+1)|v|^{2\sigma}-R\end{pmatrix}. \tag{1.27}$$

Hessian 为具实二次型的自共轭线性算子,它为 G 在 v 上的二次变分. 零在 $\mathscr{H}(v)$的谱中永远是至少为 1 的乘子. 因$(iv,-iv^*)^T$ 永远是零向量,$\mathscr{H}(v)$的谱的一般分析是困难的,因它具有非常数系数.

当 v 为定态调和波(1.25)时,Hessian 算子(1.27)具酉相似于常系数自共轭算子

$$\mathcal{H}(v)=\begin{pmatrix} -\Delta-2i\xi\cdot\nabla+\sigma|b|^{2\sigma} & \sigma|b|^{2\sigma} \\ \sigma|b|^{2\sigma} & -\Delta+2i\xi\cdot\nabla+\sigma|b|^{2\sigma} \end{pmatrix}, \tag{1.28}$$

它的谱可通过 F 氏分析. 圆定常调和波(1.25)的不稳定流形的维数为非零$\xi\in 2\pi z^d$ 的数目,使得

$$|\xi|^4+2\sigma|b|^{2\sigma}|\xi|^2-4(\xi\cdot\xi)^2<0, \tag{1.29}$$

于此设没有ξ使得方程(1.29)左端为零,特别,圆定常调和波(1.25)是否稳定取决于$(\sigma+2)|\xi|^2<\sigma R$. 当 $d=1,\sigma=1$,(1.26)的每个定常点的不稳定流形能通过 Hessian(1.27)由可积 NLS 方程的技巧进行分析.

现考虑 GL 方程的整体弱解.

为方便计,令 $r=\sigma+1$,考虑广义 GL 方程

$$\partial_t u=Ru+(1+i\nu)\Delta u-(1+i\mu)|u|^{2(r-1)}u, \tag{1.30}$$

具初始条件

$$u(0,x)=u_0(x). \tag{1.31}$$

设 $R>0,r>1(\sigma>0),\nu,\mu$ 为实数,无损于一般性,让

$$\int_{\mathbb{T}^d}\mathrm{d}x=1, \tag{1.32}$$

利用记号

$$\langle f\rangle=\int_{\mathbb{T}^d}f\mathrm{d}x, \tag{1.33}$$

其中(1.33)表示 f 在环面上的平均值.

以 $C([0,\infty),w-L^2(\mathbb{T}^d))$表示从$[0,\infty)$到 $w-L^2(\mathbb{T}^d)$的连续函数空间,它意味着 $v\in C([0,\infty),w-L^2(\mathbb{T}^d))$. 即对任意$\psi\in L^2(\mathbb{T}^d)$,函数 $t\to(\psi^*v(t))\in C[0,\infty))$.

定理 1.1 给定 $u_0(x)\in L^2(\mathbb{T}^d)$,则存在函数

$$u(x,t)\in C([0,\infty),w-L^2(\mathbb{T}^d))\cap L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty),H^1(\mathbb{T}^d))\cap L^{2r}_{\mathrm{loc}}([0,\infty),L^{2r}(\mathbb{T}^d)), \tag{1.34}$$

满足初始条件(1.31)和 GL 方程(1.1)的弱形式

$$0=\langle\psi^*u(t_2)\rangle-\langle\psi^*u(t_1)\rangle-k\int_{t_1}^{t_2}\langle\psi^*u\rangle\mathrm{d}t'$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\langle(1+i\nu)\nabla\psi^*\nabla u\rangle \mathrm{d}t'+\int_{t_1}^{t_2}\langle(1+i\mu)\psi^* \cdot |u|^{2(r-1)}u\rangle \mathrm{d}t'. \tag{1.35}$$

盼 $\forall[t_1,t_2]\subset[0,+\infty)$，$\forall$ 试验函数 $\psi\in C^\infty(\mathbb{T}^d)$，进一步，它满足能量不等式

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2+\int_0^t\|\nabla u\|_{L^2}^2\mathrm{d}t'+\int_0^t\|u\|_{L^{2r}}^{2r}\mathrm{d}t' \leqslant \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2}^2+k\int_0^t\|u\|_{L^2}^2\mathrm{d}t', \forall t\in[0,\infty). \tag{1.36}$$

附注 1.2 上述弱解在两个方面强于依分布意义的弱解．首先，u 为 GL 方程依分布意义下的弱解，它形式上可由(1.30)乘以试验函数 $w=w(t,x)\in C_c^\infty([0,\infty)\times\mathbb{T}^d)$在$[0,\infty)\times\mathbb{T}^d$上积分，分部积分后，将所有导数转移到实验函数得到．如 u 满足(1.35)，则它满足 GL 方程的分布形式，其中取试验函数 $w=\phi(t)\psi^*(x)$，$\phi\in C_c^\infty([0,\infty))$，$\psi\in C^\infty(\mathbb{T}^d)$．事实上，在(1.35)中让 $t_1=0$，乘以$\partial_t\phi(t_2)$对 t_2 在$[0,\infty)$积分，分部积分后置空间导数于 ψ^*，因试验函数的线性组合在 $C_c^\infty([0,\infty)\times\mathbb{T}^d)$中是稠密的，由此推出由(1.35)得到的 u 为 GL 方程依分布意义下的弱解．其次，对于定理 1.1 中的弱解还要求满足能量不等式(1.36)．

附注 1.3 证明的技巧来自 Leray 证明 Navier-Stokes 方程的方法，对于许多其他方程也采用了这种方法．因此，我们给予较详细的证明．粗略地说，这种想法是构造逼近方程(1.35)的近似解序列，然后证明这种序列是相对紧的，它充分强地允许我们对任何收敛子序列对近似方程取极限为(1.35)．它既照顾到较易建立弱拓扑下的紧性和强拓扑下的收敛性，惟一性不能靠紧性原理解决，它通常要求附加解的正则性结果．

证 分为四步证明．

第一步，构造一系列近似解，使它满足弱解形式和能量不等式．例如，用 Fourier-Galerkin 方法．令 P_ε 表示 L^2 正交投影，它由 $|\xi|\leqslant\frac{1}{\varepsilon}$的波矢量的一切 F 氏模所张．

令 $u_{0\varepsilon}=P_\varepsilon u_0$, $u_\varepsilon=u_\varepsilon(t)$ 为初下 ODE 初值问题

$$\begin{cases}\partial_t u_\varepsilon = Ru_\varepsilon + (1+i\nu)\Delta u_\varepsilon - (1+i\mu)P_\varepsilon(|u_\varepsilon|^{2(r-1)}u_\varepsilon),\\ u_\varepsilon(0)=u_{0\varepsilon}\in P_\varepsilon L^2(\mathbb{T}^d)\subset C^\infty(\mathbb{T}^d)\end{cases} \tag{1.37}$$

的惟一解,正则化初值 $u_{0\varepsilon}(x)$ 依 $L^2(\mathbb{T}^d)$ 模强收敛于 $u_0(x)(\varepsilon\to 0)$ 且满足 $\|u_{0\varepsilon}\|_{L^2}\leqslant\|u_0\|_{L^2}$.

更进一步,这些解满足弱形式(1.35)的正则化形式

$$\begin{aligned}0=&\langle\psi^* u_\varepsilon(t_2)\rangle-\langle\psi^* u_\varepsilon(t_1)\rangle-R\int_{t_1}^{t_2}\langle\psi^*\ u_\varepsilon\rangle\mathrm{d}t'\\&+\int_{t_1}^{t_2}\langle(1+i\nu)\nabla\psi^*\ \nabla u_\varepsilon\rangle\mathrm{d}t'\\&+\int_{t_1}^{t_2}\langle(1+i\mu)\psi_\varepsilon^*\ |u_\varepsilon|^{2(r-1)}u_\varepsilon\rangle\mathrm{d}t',\end{aligned} \tag{1.38}$$

$\forall[t_1,t_2]\subset[0,\infty)$, $\psi\in C^\infty(\mathbb{T}^d)$,其中 $\psi_\varepsilon\equiv P_\varepsilon\psi$ 依 C^∞ 模收敛于 ψ, $\varepsilon\to 0$. 这些解满足能量不等式(1.36) 的正则化形式,有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|u_\varepsilon(t)\|_{L^2}^2+\int_0^t\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2}^2\mathrm{d}t'+\int_0^t\|u_\varepsilon\|_{L^{2r}}^{2r}\mathrm{d}t'\\&\quad=\frac{1}{2}\|u_{0\varepsilon}\|_{L^2}^2+R\int_0^t\|u_\varepsilon\|_{L^2}^2\mathrm{d}t',\end{aligned} \tag{1.39}$$

$\forall t\in[0,\infty)$. 第一步来自标准的 ODE 的 Picard 局部存在性理论应用于(1.37)在有限维空间 $P_\varepsilon L^2(\mathbb{T}^d)$ 上成立,由(1.39)可知近似解在 L^2 上整体一致有界. 因而保证方程组(1.37)的解是整体的.

第二步,证明序列 u_ε 在空间

$$\begin{aligned}&C([0,\infty),w-L^2(\mathbb{T}^d))\wedge w-L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty),H^1(\mathbb{T}^d))\wedge\\&\qquad w-L^{2r}_{\mathrm{loc}}([0,\infty),L^{2r}(\mathbb{T}^d))\end{aligned} \tag{1.40}$$

中是一个相对紧集(具有紧闭包).

附注 1.4 这里符号 $\wedge$ 表示所含映照依弱拓扑下的交集. 它意味着序列在交集上是收敛的,当且仅当在组成的每个空间上是收敛的,这些空间收敛的意义分别如下:

$v_n \to v$ 依 $w - L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty), H^1(\ ^d))$ 收敛，即当 $\forall\, T>0, \forall\, \psi \in L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty), H^1(\ ^d))$ 有

$$\int_0^T \langle \psi^* v_n + \nabla \psi^* \cdot \nabla v_n \rangle \mathrm{d}t \to \int_0^T \langle \psi^* v + \nabla \psi^* \cdot \nabla v \rangle \mathrm{d}t. \tag{1.41}$$

类似地，$v_n \to v$ 依 $w - L^{2r}_{\mathrm{loc}}([0,\infty), L^{2r}(\ ^d))$ 收敛，即对 $\forall\, T > 0, \forall\, \psi \in L^{(2r)^*}_{\mathrm{loc}}([0,\infty), L^{(2r)^*}(\ ^d))$ 有

$$\int_0^T \langle \psi^* v_n \rangle \mathrm{d}t \to \int_0^T \langle \psi^* v \rangle \mathrm{d}t, \tag{1.42}$$

其中 $(2r)^* = 2r/(2r-1)$. 最后 $v_n \to v$ 依 $C([0,\infty), w - L^2(\ ^d))$ 收敛，即对 $\forall\, \psi \in L^2(\ ^d)$ 有

$$\langle \psi^* v_n(t) \rangle \to \langle \psi^* v(t) \rangle, \tag{1.43}$$

$\forall\,[0,\infty)$ 中紧子集上一致成立.

第二步的证明. 方程(1.39)连同 $\| u_{0\varepsilon} \|_{L^2} \leqslant \| u_0 \|_{L^2}$ 推出

$$\frac{1}{2} \| u_\varepsilon(t) \|_{L^2}^2 \leqslant \frac{1}{2} \| u_0 \|_{L^2}^2 + R \int_0^t \| u_\varepsilon \|_{L^2}^2 \mathrm{d}t', \tag{1.44}$$

由 Gronwall 引理得

$$\| u_\varepsilon(t) \|_{L^2}^2 \leqslant \| u_0 \|_{L^2}^2 e^{2Rt}, \tag{1.45}$$

将它代入(1.39) 右端可得关于 ε 一致的界：

$$\frac{1}{2} \| u_\varepsilon(t) \|_{L^2}^2 + \int_0^t \| \nabla u_\varepsilon \|_{L^2}^2 \mathrm{d}t' + \int_0^t \| u_\varepsilon \|_{L^{2r}}^{2r} \mathrm{d}t' \leqslant \frac{1}{2} \| u_0 \|_{L^2}^2 e^{2Rt}. \tag{1.46}$$

这个界建立了序列 $\{u_\varepsilon\}$ 被包含在 $w - L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty), H^1(\ ^d))$ 和 $w - L^{2r}_{\mathrm{loc}}([0,\infty), L^{2r}(\ ^d))$ 的紧集中，因模的有界集依弱 * 拓扑是相对紧的，它对于这些自反空间的弱拓扑也是紧的. 因此一致界(1.45)也表明 $\{u_\varepsilon(t)\}$ 在 $w - L^2(\ ^d)$ ($\forall\, t \geqslant 0$) 也是相对紧的.

为了完成第二步的证明，必须证明 $\{u_\varepsilon\}$ 在 $C([0,\infty), w - L^2(\ ^d))$ 也是相对紧的，紧性要求高于已有的有界性，因为这里要求对 t 强拓扑. 我们应用 Arzela-Ascoli 定理，它断言 $\{u_\varepsilon\}$ 在 $C([0,$

$\infty), w-L^2(\mathbb{R}^d))$是相对紧的,当且仅当

(ⅰ)$\{u_\varepsilon(t)\}$依 $w-L^2(\mathbb{R}^d)(\forall t\geqslant 0)$是相对紧的,

(ⅱ)$\{u_\varepsilon\}$在 $C([0,\infty), w-L^2(\mathbb{R}^d))$是等度连续的.

如我们所指出的,条件(ⅰ)已满足,为了建立(ⅱ),我们必须证明对任何 $\psi\in L^2(\mathbb{R}^d)$有

(ⅱ′)$\{\langle\psi^* u_\varepsilon\rangle\}$在 $C([0,\infty))$中等度连续.

这从 CGL 方程的正则化弱形式(1.38)对 $\psi\in C^\infty$建立(ⅱ′),再利用稠性原理拓展对一切 $\psi\in L^2(\mathbb{R}^d)$均成立.

第三步,证明序列$\{u_\varepsilon\}$在 $L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^d))$和 $L^{2r-1}_{\mathrm{loc}}([0,\infty), L^{2r-1}(\mathbb{R}^d))$中相对紧,考虑它们的通常强拓扑.

附注 1.5 这一步是必要的.因第二步仅断言$\{u_\varepsilon\}$子序列弱收敛的存在性,例如其极限为 u,由此仅推得

$$\int_0^T \|u\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t \leqslant \liminf_{\varepsilon\to 0}\int_0^T \|u_\varepsilon\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t. \tag{1.47}$$

无论如何,从(1.39)推出(1.36)需要

$$\int_0^T \|u\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T \|u_\varepsilon\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t, \tag{1.48}$$

这就要求 L^2 强收敛.类似地,从(1.38)推出(1.35)要求依 L^{2r-1} 模强收敛.

第三步的证明关键在于利用第二步的结果以及下述的嵌入引理.这实质上是属于 Leray 的.

引理 1.6 映射 $C([0,\infty), w-L^2(\mathbb{R}^d))\wedge w-L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty), H^1(\mathbb{R}^d)) \hookrightarrow L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^d))$是连续的.

这个引理要证明的,即若在 $C([0,\infty), w-L^2(\mathbb{R}^d))$和 $w-L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty), H^1(\mathbb{R}^d))$同时收敛于零,推出在 $L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^d))$中也收敛于零.证明的关键在于利用 Rellich 定理,即 $H^1\hookrightarrow L^2$是紧的.

由此引理,从第二步推出第三步.事实上,第二步说明$\{u_\varepsilon\}$在 $C([0,\infty), w-L^2(\mathbb{R}^d))$和 $w-L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty), H^1(\mathbb{R}^d))$中是相对紧的,且由于紧集的连续映照也是紧的,因此$\{u_\varepsilon\}$在 $L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty),$

$L^2(\mathbb{R}^d)$)中也是相对紧的. 进而$\{u_\varepsilon\}$的任何子序列在 $C([0,\infty), w-L^2(\mathbb{R}^d)), w-L^2_{loc}([0,\infty), H^1(\mathbb{R}^d))$中是收敛的,因而在 $L^2_{loc}([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^d))$中强收敛. 至于在 L^{2r-1}中的强收敛,也从 L^2 强收敛中直接推得,我们考虑两种情况:

(i) $r\leqslant\frac{3}{2}$(故 $2r-1\leqslant 2$),则映射

$$L^2_{loc}([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^d))\hookrightarrow L^{2r-1}_{loc}([0,\infty), L^{2r-1}(\mathbb{R}^d)) \quad (1.49)$$

是连续的. 因此,由 $L^2([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^d))$的强收敛推出在 $L^{2r-1}_{loc}([0,\infty), L^{2r-1}(\mathbb{R}^d))$中的强收敛.

(ii) $r>\frac{3}{2}$(故 $2r-1>2$),则由在 $L^2_{loc}([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^d))$的强收敛和在 $L^2_{loc}([0,\infty), L^{2r}(\mathbb{R}^d))$的弱收敛,利用标准的插值原理推得要求的结果.

第四步,取极限,即在定理 1.1 中的弱解. u 为$\{u_\varepsilon\}$收敛子序列的极限. 这个事实即要验证子序列在各种函数空间的收敛极限满足弱形式(1.35)和能量不等式(1.36).

证 第二步保证存在$\{u_\varepsilon\}$的一个子序列,仍记为$\{u_\varepsilon\}$在下述空间:$C([0,\infty), w-L^2(\mathbb{R}^d)), w-L^2_{loc}([0,\infty), H^1(\mathbb{R}^d))$和 $w-L^{2r}_{loc}([0,\infty), L^{2r}(\mathbb{R}^d))$同时收敛于极限 u,因此有

$$u\in C([0,\infty), w-L^2(\mathbb{R}^d))\cap L^2_{loc}([0,\infty), H^1(\mathbb{R}^d))\cap L^{2r}_{loc}([0,\infty), L^{2r}(\mathbb{R}^d)).$$

由第三步推出 u_ε 依 $L^2_{loc}([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^d))$和 $L^{2r-1}_{loc}([0,\infty), L^{2r-1}(\mathbb{R}^d))$收敛于 u,因此余下来要证明的是:极限 u 满足 CGL 方程的弱形式(1.35)和能量关系(1.36). 我们从(1.38)和(1.39)出发.

首先考虑 GL 方程正则化弱形式(1.38),对 $\forall$ 试验函数 $\psi\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$和区间$[t_1,t_2]\subset[0,\infty)$有

$$0=\langle\psi^* u_\varepsilon(t_2)\rangle-\langle\psi^* u_\varepsilon(t_1)\rangle-R\int_{t_1}^{t_2}\langle\psi^* u_\varepsilon\rangle dt'$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\langle(1+i\nu)\nabla\psi^*\cdot\Delta u_\varepsilon\rangle dt'+\int_{t_1}^{t_2}\langle(1+i\mu)\psi_\varepsilon^*$$

$$\cdot|u_\varepsilon|^{2(r-1)}u_\varepsilon\rangle dt', \tag{1.50}$$

u_ε 依 $C([0,\infty),w-L^2(\mathbb{R}^d))$ 收敛于 u 意味着 $\langle\psi^* u_\varepsilon(t)\rangle$ 一致收敛于 $\langle\psi^* u(t)\rangle$, $\forall t\in[t_1,t_2]$,有

$$\langle\psi^* u_\varepsilon(t_1)\rangle\to\langle\psi^* u(t_1)\rangle,\langle\psi^* u_\varepsilon(t_2)\rangle\to\langle\psi^* u(t_2)\rangle, \tag{1.51}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\langle\psi^* u_\varepsilon\rangle dt'\to\int_{t_1}^{t_2}\langle\psi^* u\rangle dt'. \tag{1.52}$$

由 u_ε 依 $w-L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty),H^1(\mathbb{R}^d))$ 的收敛性及(1.52)有

$$\int_{t_1}^{t_2}\langle(1+i\nu)\nabla\psi^*\cdot\nabla u_\varepsilon\rangle dt'\to\int_{t_1}^{t_2}\langle(1+i\nu)\nabla\psi^*\nabla u\rangle dt'. \tag{1.53}$$

为了证明(1.50)中的非线性项可通过取极限,我们将用到这样的事实:如 $\{v_n\}$ 为在 Banach 空间 X 中的弱收敛序列, $\{f_n\}$ 为在其对偶空间 X^* 的强收敛序列,则序列 $\{f_n(v_n)\}$ 在 C 中收敛. 这里,由 u_ε 在 $L^{2r-1}_{\mathrm{loc}}([0,\infty),L^{2r-1}(\mathbb{R}^d))$ 中的强收敛推出 $|u_\varepsilon|^{2(r-1)}u_\varepsilon$ 在 $L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty),L^1(\mathbb{R}^d))$ 中的弱收敛,因此,Banach 空间为 $L^1([t_1,t_2]\times\mathbb{R}^d)$,再由 ψ_ε 在 $\mathbb{R}^d$ 一致收敛于 ψ 推出它的 $L^\infty([t_1,t_2]\times\mathbb{R}^d)$ 中强收敛, L^∞ 为 L^1 的对偶,故有

$$\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t_2}\langle(1+i\mu)\psi_\varepsilon^*|u_\varepsilon|^{2(r-1)}u_\varepsilon\rangle dt'\\&\to\int_{t_1}^{t_2}\langle(1+i\mu)\psi^*|u|^{2(r-1)}u\rangle dt'.\end{aligned} \tag{1.54}$$

联系(1.52)—(1.54),我们在(1.50)中的第一项取极限推出 u 满足 CGL 方程的弱形式(1.38).

为证能量关系(1.36),考虑它的正则化形式(1.39)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|u_\varepsilon(t)\|_{L^2}^2+\int_0^t\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2}^2dt'+\int_0^t\|u_\varepsilon\|_{L^{2r}}^{2r}dt'\\&=\frac{1}{2}\|u_{0\varepsilon}\|_{L^2}^2+R\int_0^t\|u_\varepsilon\|_{L^2}^2dt'.\end{aligned} \tag{1.55}$$

考察上式右端，初值依 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中强收敛，推出

$$\| u_{0\varepsilon} \|_{L^2}^2 \to \| u_0 \|_{L^2}^2. \tag{1.56}$$

由 u_ε 在 $L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^d))$ 中强收敛推出

$$\int_0^t \| u_\varepsilon \|_{L^2}^2 \mathrm{d}t' \to \int_0^t \| u \|_{L^2}^2 \mathrm{d}t', \tag{1.57}$$

因此，(1.55)右端当 $\varepsilon \to 0$ 时收敛，现转向(1.55)左边，由 u_ε 在 $C([0,\infty), w - L^2(\mathbb{R}^d))$ 的收敛性连同一个序列弱极限的模小于等于它的模的下界，有

$$\| u(t) \|_{L^2}^2 \leqslant \liminf_{\varepsilon \to 0} \| u_\varepsilon \|_{L^2}^2. \tag{1.58}$$

类似地，依 $w - L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty), H^1(\mathbb{R}^d))$ 和 $w - L^{2r}_{\mathrm{loc}}([0,\infty), L^{2r}(\mathbb{R}^d))$ 推出

$$\int_0^t \| u \|_{H^1}^2 \mathrm{d}t' \leqslant \liminf_{\varepsilon \to 0} \int_0^t \| u_\varepsilon \|_{H^1}^2 \mathrm{d}t', \tag{1.59}$$

$$\int_0^t \| u \|_{L^{2r}}^{2r} \mathrm{d}t' \leqslant \liminf_{\varepsilon \to 0} \int_0^t \| u_\varepsilon \|_{L^{2r}}^{2r} \mathrm{d}t'. \tag{1.60}$$

连同(1.57)和(1.59)有

$$\int_0^t \| \nabla u \|_{L^2}^2 \mathrm{d}t' \leqslant \liminf_{\varepsilon \to 0} \int_0^t \| \nabla u_\varepsilon \|_{L^2}^2 \mathrm{d}t'. \tag{1.61}$$

联系(1.58)，(1.60)和(1.61)，我们得到(1.55)的下界. 因此能量不等式(1.36)成立，定理 1.1 证毕.

附注 1.7 在定理 1.1 中的能量不等式(1.36)能稍微加强一些. 事实上，由第一步，(1.37)所确定的近似解满足能量关系：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \| u_\varepsilon(t_2) \|_{L^2}^2 + \int_{t_1}^{t_2} \| \nabla u_\varepsilon \|_{L^2}^2 \mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \| u_\varepsilon \|_{L^{2r}}^{2r} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \| u_\varepsilon(t_1) \|_{L^2}^2 + R \int_{t_1}^{t_2} \| u_\varepsilon \|_{L^2}^2 \mathrm{d}t,
\end{aligned} \tag{1.62}$$

$\forall t \in [t_1, t_2] \subset [0,\infty)$，由 u_ε 依 $L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^d))$ 收敛于 u 推出 $\| u_\varepsilon \|_{L^2}$ 依 $L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty))$ 收敛于 $\| u \|_{L^2}$，再利用对角线选取方法，可使 u_ε 的子序列

$$\| u_\varepsilon(t) \|_{L^2} \to \| u(t) \|_{L^2}, \ \forall\, a.e.\, t \in [0,\infty), \tag{1.63}$$

对此点集证为 E，当 $t_1\in E$，从(1.62)可证 u 满足

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2+\int_{t_1}^{t_2}\|\nabla u\|_{L^2}^2\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\|u\|_{L^{2r}}^{2r}\mathrm{d}t$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\|u(t_1)\|_{L^2}^2+R\int_{t_1}^{t_2}\|u\|_{L^2}^2\mathrm{d}t.$$

附注 1.8 置换 ^{d} 为 ^{d}，$C^{\infty}(\ \ ^{d})$ 置换为具紧支集试验函数 $C_c^{\infty}(\ \ ^{d})$，则定理 1.1 在 ^{d} 中仍成立. 此时在证明第二步和第四步中仅稍为不同于周期情况，在第一步中 Fourier－Galerkin 方法在全空间失效，此时可换为光滑化近似方法. 能构造初值问题.

$$\begin{cases}\partial_t u_\varepsilon=Ru_\varepsilon+(1+i\nu)\Delta u_\varepsilon-(1+i\mu)j_\varepsilon*(|j_\varepsilon*u_\varepsilon|^{2(r-1)}j_\varepsilon*u_\varepsilon),\\ u_\varepsilon(0,x)=u_{0\varepsilon}(x)=j_\varepsilon*u_0(x),\end{cases}\tag{1.64}$$

其中正则化是通过光滑、非负 Mollifier j_ε 作卷积来完成的，最后在第三步能用修正的无界区域的 Rellich 定理来代替.

现考虑局部古典解.

考虑 $u=u(t)$ 在 Banach 空间 X 满足抽象初值问题：

$$\partial_t u=Lu+N(u),$$
$$u(0)=u_0(x)\in X,\tag{1.65}$$

其中线性算子 L 为在 X 上强连续半群 $S(t)$ 的无穷小生成元 ($N=0$，该线性问题是适定的). 扰动项 N 通常为 X 上的非线性映照，上述初值问题的适定性能通过(1.65)的如下积分形式利用压缩映照原理得到：

$$u(t)=S(t)u_0+\int_0^t S(t-t')N(u(t'))\mathrm{d}t'.\tag{1.66}$$

为了利用压缩映照原理，我们设扰动项 N 为局部 Lipschitz 的. N：$X\to X$ 特别有

(ⅰ) $\|N(u)\|_X\leqslant C_{bd}(\|u\|_X),\ \forall u\in X$，

(ⅱ) $\|N(u_1)-N(u_2)\|_X\leqslant C_{\mathrm{Lip}}(\|u_1\|_X,\|u_2\|_X)\|u_1-u_2\|_X$，其中 $C_{bd}(\cdot)$ 和 $C_{\mathrm{Lip}}(\cdot)$ 为其变元的非减函数. 注意到 N，L 选取 $N(0)=0$，则从条件(ⅱ)可推出条件(ⅰ)，对于给定的这样的扰动项 N，我们能证明以下基本结果.

定理 1.9(基本局部存在性)　对任何 $p>0$,存在 $T(\rho)>0$ 使得对任何初值 $u_0(x)\in X$ 且 $\|u_0\|_X\leqslant\rho$,存在惟一函数 $u(x,t)\in C([0,T],X)$满足积分方程(1.66),而且从 $X\to C([0,T],X)$的映照 $u_0\to u$ 为局部 Lip 函数.

这样的解 u 称为问题(1.65)中等程度的解,它是证明古典解的出发点.

附注 1.10　如 $u\in C([0,T],X)$为(1.65)的中等解,则由直接计算表明,这是(1.65)如下意义的弱解:

$$\langle\psi|u(t_2)\rangle_X-\langle\psi|u(t_1)\rangle_X$$
$$=\int_{t_1}^{t_2}\langle L^*\psi|u(t)\rangle_X\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\langle\psi|N(u(t))\rangle_X\mathrm{d}t,\qquad(1.67)$$

其中 $0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant T$,$\psi\in D(L^*)$,$\langle\cdot|\cdot\rangle_X$ 表示通常 X 和它的对偶空间 X^* 之间的双线性对偶,L^* 为通常的 L 的对偶,具有 $D(L^*)$在 X^*中稠.

现应用这个一般理论到具有空间周期的复 Ginzburg－Landau 方程的初值问题,此时选取

$$Lu=(1+i\nu)\Delta u+Ru,N(u)=-(1+i\mu)|u|^{2\sigma}u,\qquad(1.68)$$

半群 $S(t)$作用于 u 上能写成一个卷积,$S(t)u=G_t*u$.

$G_t=G_t(x)(t>0)$为 Green 函数.

$$G_t(x)=\sum_{n\in Z^d}g_t(x+n),$$

$$g_t(x)=\frac{1}{[4\pi(1+i\nu)t]^{\frac{d}{2}}}\exp\left[-\frac{|x|^2}{4(1+i\nu)t}+Rt\right].\qquad(1.69)$$

积分方程(1.66)能写成 Green 函数形式

$$u(t)=G_t*u_0+\int_0^t G_{t-t'}*N(u(t'))\mathrm{d}t'.\qquad(1.70)$$

为了应用局部存在性定理,我们仅需确定空间 X,并验证条件(ⅰ)(ⅱ)成立.

对 $t>0$,Green 函数(1.69)满足 L^1 估计

$$\|G_t\|_{L^1}\leqslant\sum_{n\in Z^d}\int_{T^d}|g_t(x+n)|\mathrm{d}x$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} | g_t(x) \mathrm{d}x$$

$$= (1+\nu^2)^{\frac{d}{4}} e^{Rt}. \tag{1.71}$$

由此推出 $S(t)$在 $L^p(\mathbb{R}^d)$中有界,$1 \leqslant p \leqslant \infty$,并有

$$\| S(t)u \|_{L^p} = \| G_t * u \|_{L^p} \leqslant \| G_t \|_{L^1} \| u \|_{L^p}$$

$$\leqslant (1+\nu^2)^{\frac{d}{4}} e^{Rt} \| u \|_{L^p}. \tag{1.72}$$

更进一步可证 $S(t)$在 $C(\mathbb{R}^d)$和 $L^p(\mathbb{R}^d)(1 \leqslant P < \infty)$上为强连续半群.

附注 1.11 有界算子 $S(t)$: $S(0) = I, S(t)u = G_t * u$, $t>0$,形成 $L^\infty(\mathbb{R}^d)$上的一个半群,它对 $t>0$ 为强连续,但在 $t=0$ 上仅为弱 * 连续(一个序列$\{v_n\}$称之为弱 * 依 $L^\infty(\mathbb{T}^d)$收敛于 v,如果它乘以任何属于 $L^1(\mathbb{R}^d)$函数积分成立).

我们首先取 $X = C(\mathbb{R}^d)$,扰动项 N 由(1.68)给定,可清楚知道它是局部 Lip 连续的:$C(\mathbb{R}^d) \to C(\mathbb{R}^d)$. 由局部存在定理推出存在 CGL 方程在时间区间$[0,T]$上惟一的中等解 $u = u(t)$,这仅依赖于 $\| u_0 \|_{L^\infty}$,这个解是(1.70)的如下迭代序列$\{u^{(n)}\}$的极限,

$$\begin{cases} u^{(0)}(t) = G_t * u_0, \\ u^{(n+1)}(t) = G_t * u_0 + \int_0^t G_{t-t'} * N(u^{(n)}(t'))\mathrm{d}t', \end{cases} \tag{1.73}$$

收敛性是在 $C([0,T), C(\mathbb{T}^d))$中,某个 T 充分小.

为了抬高中等解为古典解,必须附加正则性的证明. 例如对于空间属于 L^2,对于时间属于 C^1,于是出现在方程中的导数是古典的,这样做是用如下的标准的穿靴原理. 我们用 $G_t(t>0)$的正则性作逐次迭代(1.73)的梯度依 L^∞模的估计,证明序列$\{u^{(n)}\}$依 $C([0,T), C^1(\mathbb{T}^d))$收敛. 可依如下进行:取积分方程(1.73)的梯度.

$$\nabla u^{(n+1)}(t) = \nabla G_t * u_0 + \int_0^t \nabla G_{t-t'} * N(u^{(n)}(t'))\mathrm{d}t' \tag{1.74}$$

作估计

$$\| \nabla u^{(n+1)}(t) \|_{L^\infty} \leqslant \| \nabla G_t \|_{L^1} \| u_0 \|_{L^\infty}$$

$$+ \int_0^t \| \nabla G_{t-t'} \|_{L^1} \| N(u^{(n)}(t')) \|_{L^\infty} dt', \tag{1.75}$$

则由 L^1 估计

$$\| \nabla G_t \|_{L^1} \leqslant \sum_{n \in Z^d} \int_{\ d} | \nabla g_t(x+n) | dt$$

$$= \int_{\ d} | \nabla g_t(x) | dx = C_d(1+\nu^2)^{\frac{d}{4}} \frac{e^{Rt}}{\sqrt{t}}, \tag{1.76}$$

其中 $C_d > 0$ 为仅依赖维数 d 的常数，于是

$$\| \nabla u^{(n+1)}(t) \|_{L^\infty} \leqslant C_d(1+\nu^2)^{\frac{d}{4}} \frac{e^{Rt}}{\sqrt{t}} \| u_0 \|_{L^\infty}$$

$$+ C_d(1+\nu^2)^{\frac{d}{4}} \int_0^t \frac{e^{R(t-t')}}{\sqrt{t-t'}} \| N(u^{(n)}(t')) \|_{L^\infty} dt', \tag{1.77}$$

这就证明了 $\nabla u^{(n)}$ 在 $C([0,T], C(\ ^d))$ 中. 由 N 的 Lip 连续性，类似估计可证明这个序列的 $C([0,T], C(\ ^d))$ 中是 Canchy 序列，因此 $u \in C([0,T], C^1(\ ^d))$. 如果 $u_0 \in C^1(\ ^d)$，则可写出 ∇u 的积分方程，其中不带有 G_t 的导数. 例如

$$\nabla u(t) = G_t * \nabla u_0 + \int_0^t G_{t-t'} * [DN(u(t')) \nabla u(t')] dt', \tag{1.78}$$

其中 $DN(u)$ 表示 $N(u)$ 对 u 的导数，当 $N(u)$ 由(1.68)所给定时，则有

$$DN(u)w = -(1+i\mu)((\sigma+1)|u|^{2\sigma} w + \sigma |u|^{2\sigma-2} u^2 w^*), \tag{1.79}$$

其中 w 为任意函数. 类似于(1.77)的估计，此时在 $t=0$ 上不再具有奇性. 因此 $u \in C([0,T], C^1(\ ^d))$. 重复上述正则性原理，从(1.78)出发可证 $u \in C([0,T], C^2(\ ^d))$. 由于通过 CGL 方程可知对时间一阶导数的存在性可由它的二阶空间导数推得，因此 $u \in C^1([0,T], C(\ ^d))$. 故只要是 CGL 方程的一个中等解，必是它的古典解. 综上可得如下结果.

定理1.12（C^0 初值的局部古典解） 对任何 $\rho > 0$，存在

$T(\rho)>0$使得对初值 $u_0\in C(\mathbb{R}^d)$,且 $\|u_0\|_\infty\leqslant\rho$,则存在惟一的

$$u\in C([0,T],C(\mathbb{R}^d))\cap C([0,T],\\ C^2(\mathbb{R}^d))\cap C^1([0,T],C(\mathbb{R}^d)) \tag{1.80}$$

满足 GL 初值问题. 附之,映照 $u^0\to u$ 是局部 Lip 函数:$C(\mathbb{R}^d)\to C([0,T],C(\mathbb{R}^d))$. 如果初值 $u_0\in C^2(\mathbb{R}^d)$,则有

$$u\in C([0,T],C^2(\mathbb{R}^d))\cap C^1([0,T],C(\mathbb{R}^d)).$$

一般说来,不能期望得到 $C([0,T],C^3(\mathbb{R}^d))$的解,因为在微分(1.79)中出现 u 的零点将导致无界奇性. 无论如何,在某些情况下能得到附加的正则性. 例如,当 σ 为正整数,非线性项为 u, $\overline{u}$ 的多项式,我们能对(1.79)自由微分,而不导致任何奇性,再连续使用穿靴法,我们可得到对于任意 $t\in(0,T]$,解具有更高的空间导数,由此反复作用,可得到解 $u\in C([0,T],C^\infty(\mathbb{R}^d))$. 另外,由于方程联系着时间导数和空间导数,因此解也存在一切时间导数,这样可得到GL 方程(1.1)的 C^∞ 光滑解,只要它是一个中等解. 更详细地,有如下结果.

定理 1.13(局部光滑解) 设 $\sigma>0$ 为整数,则对任何$\rho>0$,存在 $T(\rho)>0$,使得对任何初值 $u_0\in C(\mathbb{R}^d)$且 $\|u_0\|_{L^\infty}\leqslant\rho$,存在 CGL 方程初值问题的惟一解.

$$u\in C([0,T],C(\mathbb{R}^d))\cap C^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^e). \tag{1.81}$$

附注 1.14 当 r 不是一个正整数时,我们仍能用穿靴法得到(1.79)的可微性不出现 u 的零点引起的无界奇性. 有关 u,u^* 出现于$|u|^{2\sigma}u$ 的第$(n+1)$次导数的最低阶为 $2\sigma-n$,因此当 $\sigma\geqslant\frac{n}{2}$ 可以控制,此时穿靴原理能用到 n 阶导数,解 $u\in C([0,T],C^{n+2}(\mathbb{R}^d))$. 这就导致以下定理.

定理 1.15(局部 C^k 解) 设 $\sigma\geqslant\frac{n}{2}$,$n$ 为某个正整数,则对任何 $\rho>0$,存在 $T(\rho)>0$,使得对任何初值 $u_0\in C(\mathbb{R}^d)$且 $\|u_0\|_{L^\infty}\leqslant\rho$,存在 CGL 方程初值问题的惟一解

$$u\in C([0,T],C(\mathbb{R}^d))\cap C([0,T],C^{n+2}(\mathbb{R}^d))\\ \cap C^1([0,T],C^3(\mathbb{R}^d)). \tag{1.82}$$

再者,如 $u_0\in C^{n+2}(\mathbb{T}^d)$,则有

$$u\in C([0,T],C^{n+2}(\mathbb{T}^d))\cap C^1([0,T],C^n(\mathbb{T}^d)).$$

附注 1.16 当然,我们继续交换二次空间导数为一次时间导数,如 $n=2k$ 为偶数,则有 $u\in C^{k+1}([0,T],C(\mathbb{T}^d))$,而 $n=2k+1$ 为奇数,则有 $u\in C^{k+1}([0,T],C^1(\mathbb{T}^d))$.

附注 1.17 上述结果考虑初始 $u_0\in L^\infty(\mathbb{T}^d)$,此时半群 $S(t)$作用在 $L^\infty(\mathbb{T}^d)$上,一般在 $t=0$ 上不具有强连续性,只有弱 * 连续,此时上述定理关于 u 的L^∞形式,例如定理 1.12 的 L^∞ 形式能置换(1.79)为

$$u\in C([0,T],w^*-L^\infty(\mathbb{T}^d))\cap C([0,T],\\ C^2(\mathbb{T}^d))\cap C^1([0,T],C(\mathbb{T}^d)), \tag{1.83}$$

其中 $w^*-L^\infty(\mathbb{T}^d)$表示 $L^\infty(\mathbb{T}^d)$具有弱 * 拓扑.

以上基本存在定理能更精细化,使得初值在更广泛的一类空间得到正时间的古典解.(1.66)的中等解形式为

$$u(t)=S(t)u_0+\int_0^t S(t-t')N(u(t'))\mathrm{d}t'. \tag{1.84}$$

对这个式子,显然可考虑三个空间,初值在某个空间 X,解在更好的空间 Y,$t\in[0,T]$,一般非线性映照将 Y 映照为第三个空间Z.

适当选取 X、Y、Z,半群在 X 上是强连续的,映照 X 和Z 回到好的空间 Y,在 $t=0$ 处有奇性.在靠近 $t=0$,具有非负常数 α,β,使得

$$\|S(t)w\|_Y\leqslant Ct^{-\alpha}\|w\|_X,\ \forall\, w\in X, \tag{1.85}$$

$$\|S(t)w\|_Y\leqslant Ct^{-\beta}\|w\|_Z,\ \forall\, w\in Z. \tag{1.86}$$

再设 N 为局部 Lip 的,$N:Y\to Z$.无损于一般性,设 $N(0)=0$,N 的 Lip 条件可写为

$$\|N(u_1)-N(u_2)\|_Z\\ \leqslant C(\|u_1\|_Y^{2\sigma}+\|u_2\|_Y^{2\sigma})\|u_1-u_2\|_Y, \tag{1.87}$$

对某个 $\sigma>0$,并和 GL 方程非线性项(1.68)的 σ 相同.

定理 1.18(扩展的局部存在性) 设给定估计(1.85),(1.86)

和(1.87),其中指数 α,β 和 σ 满足

$$0\leqslant\beta<1, \tag{1.88}$$

$$0\leqslant(2\sigma+1)\alpha<1, \tag{1.89}$$

$$\beta+2\sigma\alpha<1, \tag{1.90}$$

则对任何 $\rho>0$,存在 $T(\rho)>0$,使得对任何初值 $u_0\in X$,且 $\|u_0\|_X\leqslant P$,存在方程(1.84)的惟一中等解

$$u\in C([0,T],X)\cap C([0,T],Y), \tag{1.91}$$

附之,映照 $u_0\rightarrow u$ 是一个局部 Lip 函数:$X\rightarrow C([0,T],X)$.

证 为了指出如何应用压缩映照原理,我们首先估计不动点方程(1.84)在 Y 中的模:

$$\|u(t)\|_Y\leqslant Ct^{-\alpha}\|u_0\|_X+C\int_0^t(t-t')^{-\beta}\|u(t)\|_Y^{2\sigma+1}\mathrm{d}t', \tag{1.92}$$

或

$$\begin{aligned}t^\alpha\|u(t)\|_Y&\leqslant C\|u_0\|_X+Ct^\alpha\int_0^t(t-t')^{-\beta}t'^{-(2\sigma+1)\alpha}\\&\quad\cdot(t'^\alpha\|u(t')\|_Y)^{2\sigma+1}\mathrm{d}t'\\&\leqslant C\|u_0\|_X+C\sup_{t'\in[0,t]}(t'^\alpha\|u(t')\|_Y)^{2\sigma+1}t^\alpha\\&\quad\cdot\int_0^t(t-t')^{-\beta}t'^{-(2\sigma+1)\alpha}\mathrm{d}t',\end{aligned} \tag{1.93}$$

由此可证明在空间 $E([0,T])$的可压缩性,空间正是 $C([0,T],Y)$依模

$$\|w\|_E=\sup_{t\in[0,T]}t^\alpha\|w(t)\|_Y \tag{1.94}$$

的完备化.事实上,由(1.88)—(1.90)可知

$$t^\alpha\int_0^t(t-t')^{-\beta}t'^{-(2\sigma+1)\alpha}\mathrm{d}t'\rightarrow0,\ t\rightarrow0. \tag{1.95}$$

因此,存在某个 $T>0$,使得不动点方程(1.84)右端在 E 的模适当大的球内将自身映照为自身.借助于 Lip 条件(1.87),我们能在相同假设(1.95)下用类似的方法证明它是压缩的.则由压缩映照原理可知,存在不动点问题(1.84)的惟一解

$$u \in E([0,T]) \subset C([0,T],Y).$$

最后,我们能证 $u \in C([0,T],Y)$,为此,我们需验证 u 在 $t=0$上的连续性.首先从(1.84)两端减去$u_0(x)$,直接估计在X中的模,利用连续嵌入:$Z \hookrightarrow X$ 得到

$$\| u(t) - u_0 \|_X \leqslant \| S(t)u_0 - u_0 \|_X + C\int_0^t t'^{-(2\sigma+1)\alpha} t^\alpha (t'^\alpha \| u(t') \|_Y)^{2\sigma+1} dt'$$

$$\leqslant \| S(t)u_0 - u_0 \|_X + C \| u \|_E^{2\sigma+1} \int_0^t t'^{-(2\sigma+1)\alpha} dt'. \quad (1.96)$$

右端第一项由于线性半群的强连续性,趋于零.第二项$(2\sigma+1)\alpha<1$,因此也趋于零,该条件被包含在(1.95)中.

附注 1.19 严格地说,我们已证明小空间 $E([0,T])$的存在性,如(1.91)所断言的.

现我们应用定理 1.18 于 GL 方程.如前,N,L 为(1.68),线性半群为(1.69)所定义.我们首先考虑初始 $u_0 \in L^p(\mathbb{T}^d) = X$.我们也取 $Z = L^p(\mathbb{T}^d)$,$Y = L^r(\mathbb{T}^d)$,其中 r 待定,利用 Hölder 和 Young 不等式以及

$$r \geqslant (2\sigma+1)p, \quad (1.97)$$

可直接验证 Lip 条件(1.8)成立.为了计算(1.85)中的指数 α,β,我们对光滑算子作 $L^p - L^r$ 估计,

$$\| G_t * w \|_{L^r} \leqslant \| G_t \|_{L^q} \| w \|_{L^p}$$

$$\leqslant \| G_t \|_{L^1}^{\frac{1}{q}} \| G_t \|_{L^\infty}^{1-\frac{1}{q}} \| w \|_{L^p}, \quad (1.98)$$

其中

$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}. \quad (1.99)$$

利用(1.71)的 L^1 估计,可得 L^∞估计

$$\| G_t \|_{L^\infty} \leqslant \frac{(1+\nu^2)^{\frac{d}{4}} e^{Rt}}{[4\pi(1+\nu^2)t]^{\frac{d}{2}}} \{ a + b[(1+\nu^2)t]^{\frac{d}{2}} \}, \quad (1.100)$$

其中 a、$b>0$,对于小的 t 有

$$\| G_t \|_{L^1} = O(t^0), \| G_t \|_{L^\infty} = O(t^{-\frac{d}{2}}), \tag{1.101}$$

由此并利用(1.98)和(1.99)得到

$$\| S(t) w \|_{L^r} \leqslant C t^{-\frac{d}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \| w \|_{L^p}, \tag{1.102}$$

即 $\alpha = \beta = \frac{d}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})$. 定理 1.18 首先对应于 $r = (2\sigma + 1)p$ 情况,则可断言存在 $T > 0$ 和惟一局部解

$$u \in C([0, T], L^p(\mathbb{R}^d)) \cap C([0, T], L^r(\mathbb{R}^d))$$

满足条件 $(2\sigma + 1)\alpha < 1$, 即 $\sigma d < p$.

因 $u(t) \in L^r(\mathbb{R}^d)(\forall t > 0)$, 我们能再应用此原理证明

$$u \in C([0, T], L^{r_m}(\mathbb{R}^d)), r_m = (2\sigma + 1)^m p, \tag{1.103}$$

$\forall m \in N$. 最后, 对某 $r_m > \left(\sigma + \frac{1}{2}\right)d$, 能取 $X = Z = L^{r_m}(\mathbb{R}^d)$, $Y = C(\mathbb{R}^d)$, 得到 $u \in C([0, T], C(\mathbb{R}^d))$. 作为定理 1.12 的应用有

定理 1.20(局部古典解对于 L^p 初值) 如 p 满足

$$1 \leqslant p < \infty, \sigma d < p, \tag{1.104}$$

则对任何 $\rho > 0$, 存在 $T(\rho) > 0$, 使得对任何 $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^d)$, 且 $\| u_0 \|_{L^p} \leqslant \rho$, 存在 CGL 方程初值问题惟一解,

$$\begin{aligned} u \in & C([0, T], L^p(\mathbb{R}^d)) \cap C([0, T], \\ & C^2(\mathbb{R}^d)) \cap C^1([0, T], C(\mathbb{R}^d)), \end{aligned} \tag{1.105}$$

附之, 映照 $u_0 \to u$ 为 Lip 函数: $L^p(\mathbb{R}^d) \to ([0, T], L^p(\mathbb{R}^d))$.

附注 1.21 对于 $p \geqslant 2$, 上述古典解的惟一性可拓展为定理 1.1 弱解的惟一性. 换言之, 只要 CGL 方程的弱解为古典的, 则它是惟一的. 对于亚临界情况($\sigma d < 2$), 定理 1.20 断言 L^p 初值的解的存在性($p < 2$), 这种解不属于定理 1.1 中的弱解. 事实上, 我们以后能证明, 对于临界 $\sigma = d = 1$, 运用相同的技巧, 可建立初值问题的解在分布意义下 $H^q(\mathbb{R})\left(-\frac{1}{2} < q < 0\right)$的存在性.

附注 1.22 当 $p = 2\sigma + 2$, 此时若 $d < 2 + \frac{2}{\sigma}$, 存在局部古典

解.这条件和非线性 Schrödinger 方程

$$i\partial_t u = -\nu\Delta u + \mu |u|^{2\sigma}u$$

的 H^1 解局部存在惟一性条件一致.

以下我们更一般证明局部解的存在性在 H^q 初值条件下. Sobolev 空间 $H^q(\mathbb{T}^d)$能对一切 $q\in R$ 定义.令 $\hat{w}(\xi)$表示函数 $w\in L^2(\mathbb{T}^d)$的 F 氏系数,

$$w(x)=\sum_{\xi\in 2\pi Z^d}\hat{w}(\xi)e^{i\xi\cdot x},\hat{w}(\xi)=\int_{T^d}e^{-i\xi\cdot x}w(x)\mathrm{d}x, \tag{1.106}$$

函数 w 的 H^q 模为

$$\| w\|_{H_q}=\Big(\sum_{\xi\in 2\pi Z^d}(1+|\xi|^2)^q|\hat{w}(\xi)|\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.107}$$

我们仅关心 $q<0$ 的情况,因为 $q>\frac{d}{2}-\frac{1}{\sigma},q>0$,我们能找到$p>\sigma d$使得 Sobolev 嵌入 $H^q\hookrightarrow L_p$ 成立.即$\frac{1}{p}>\frac{1}{2}-\frac{q}{d}$,因此,此时的古典解由定理 1.18 所保证.

设 $u_0\in H^q(\mathbb{T}^d)\equiv X,q<0$,取二个空间 $Y=L^r(\mathbb{T}^d),Z=L^p(\mathbb{T}^d),\beta=\frac{d}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right),r\geqslant(2\sigma+1)p$,可作 $S(t)$的 $H^q\to L^r$ 估计,由(1.102),对 $r\geqslant 2$ 有

$$\| S(2t)w\|_{L^r}\leqslant Ct^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})}\| S(t)w\|_{L^2}, \tag{1.108}$$

$S(t)w=G_t*w$ 同 F 氏变换得到最佳估计

$$\begin{aligned}\| G_t*w\|_{L^2}^2&=\sum_{\xi\in 2\pi Z^d}|g(\xi)\hat{w}(\xi)|^2\\&\leqslant\sup_{\xi\in 2\pi Z^d}\{(1+|\xi|^2)^{-q}|g(\xi)|^2\}\sum_{\xi\in 2\pi Z^d}(1+|\xi|^2)^q|\hat{w}(\xi)|^2,\end{aligned} \tag{1.109}$$

其中 $\hat{w}(\xi)$表示 w 的 F 氏变换,G_t 的 F 氏系数为

$$\hat{g}(\xi)=e^{Rt}e^{-(1+i\nu)|\xi|^2t}. \tag{1.110}$$

在(1.109)中的 sup,可由对$|\xi|^2$ 的简单最优估计得到

$$\| G_t*w\|_{L^2}^2\leqslant\left(\frac{-q}{2et}\right)^{-q}e^{2(R+1)t}\| w\|_{H^q}^2, \tag{1.111}$$

对充分小的 t,有

$$\| S(t)w \|_{L^r} \leqslant C t^{-\frac{d}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})+\frac{q}{2}} \| w \|_{H^q}. \tag{1.112}$$

取 Lip 条件,$r=(2\sigma+1)p$,则定理 3.5 的条件 $\beta+2\sigma\alpha<1$ 满足当且仅当

$$q>\frac{d}{2}-\frac{1}{\sigma}. \tag{1.113}$$

我们还要检验定理的其他两个条件,条件(1.89)要求给予 r 的上界,如

$$r<\frac{2(2\sigma+1)d}{(2\sigma+1)(d-2q)-4}, \tag{1.114}$$

类似地,(1.88)要求给予 r 的一个下界

$$r>\sigma d. \tag{1.115}$$

现首先给出(1.113),r 的上下界同时满足,为了技术上的理由,附设 r 的两个下界,在得到(1.112)中,需设 $r\geqslant 2$,我们要求 $p\geqslant 1$,即 $r\geqslant 2\sigma+1$,这些联系(1.114)为

$$q>-\frac{2}{2\sigma+1} \tag{1.116}$$

和

$$q>\frac{d}{2}-\frac{d+2}{2\sigma+1}. \tag{1.117}$$

最后由定理 1.18 推出对某个 $T>0$,有一个惟一中等解 $u\in C([0,T],Y)$,进一步,因 $u(t)\in L^r(\mathbb{R}^d)$,$\forall t\in[0,T]$. 进一步的光滑性由应用定理 1.20 直接推得. 我们有如下定理:

定理 1.23(局部古典解对于 H^q 初值) 设 q 满足(1.116)(1.117)且

$$q>\frac{d}{2}-\frac{1}{\sigma}, \tag{1.118}$$

则对任何 $\rho>0$,存在 $T(\rho)>0$,使得对任何初值 $u_0\in H^q(\mathbb{R}^d)$且 $\| u_0 \|_{H^q}\leqslant\rho$,存在 CGL 方程初值问题惟一解

$$u\in C([0,T],H^q(\mathbb{R}^d))\cap C([0,T],\\ C^2(\mathbb{R}^d))\cap C^1([0,T],C(\mathbb{R}^d)). \tag{1.119}$$

附注 1.24 我们相信条件(1.116)和(1.117)是技术性的，可用更好的方法加以改进. 例如可用 Besov 空间. 当(1.118)等式成立也然. 注意到当 $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$，$\sigma d \geqslant 1$，$\sigma$ 为整数、条件(1.118)可控，我们可证局部解的存在性.

附注 1.25 只要作小的改动，我们能把这些结果推广到 R^d.

现考虑解的解析性.

函数 $w \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$ 称之为 Gevrey S 类($S>0$)，是指存在常数 $\rho>0$，$M<\infty$ 使得对任何 $x \in \mathbb{T}^d$ 和 $\alpha \in \mathbb{N}^d$，有

$$|\partial^\alpha w(x)| \leqslant M\left(\frac{\alpha!}{\rho^{|\alpha|}}\right)^s, \tag{1.120}$$

这里我们利用多重指标符号

$$|\alpha| \equiv \sum_{j=1}^{2\sigma+1} \alpha_j, \alpha! \equiv \prod_{j=1}^{2\sigma+1} \alpha_j!, \partial^\alpha \equiv \prod_{j=1}^{d} \partial_{x_j}^{\alpha_j}. \tag{1.121}$$

所有 Gevrey S 类的函数集合形成一个向量空间，以 $G^s(\mathbb{T}^d)$ 表示. 它对乘法和微分是闭的、且二个 Gevrey S 类函数的复合仍是 Gevrey S 类的.

这是古典的，$G^1(\mathbb{T}^d)$ 为实解析函数空间 $C^w(\mathbb{T}^d)$. 对 $0<s<1$，$G^s(\mathbb{T}^d)$ 类为次解析函数. 而 $1<s<\infty$，它含有解析函数. 事实上，对于 $0<S_1<S_2<\infty$ 有

$$G^{S_1}(\mathbb{T}^d) \subset G^{S_2}(\mathbb{T}^d) \subset C^\infty(\mathbb{T}^d). \tag{1.122}$$

但 $G^s(\mathbb{T}^d)$ 的并集不属于 $C^\infty(\mathbb{T}^d)$，因为它是拟解析函数，不属于 Gevrey 类.

以下为了更方便刻画 Gevrey 类的特征，我们引入分指数 Sobolev 空间 $H^r(\mathbb{T}^d)$($r \in R$，$r \geqslant 0$).

引理 1.26 给定 $s>0$，$r \geqslant 0$，则 $w \in G^s(\mathbb{T}^d)$，当且仅当存在 $\rho, M \in [0,\infty)$(可能依赖于 r，s 和 w)使得对任何 $n \in \mathbb{N}$ 有

$$\|\nabla^n w\|_{H^r} = \Big(\sum_{\xi \in 2\pi \mathbb{Z}^d} (1+|\xi|^2)^r |\xi|^{2n} |\hat{w}(\xi)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant M\left(\frac{n!}{\rho n}\right)^s. \tag{1.123}$$

引理的证明直接利用 Sobolev 嵌入定理即可.

令 $A=\sqrt{-\Delta}$,它是非负,自共轭的.它的任意次幂可由谱理论定义.对 $S\in[0,\infty)$ 和参数 τ,定义赋范空间

$$D(e^{\tau A^{\frac{1}{s}}}:H^r(\mathbb{T}^d))=\{w\in H^r(\mathbb{T}^d):\|e^{\tau A^{\frac{1}{s}}}w\|_{H^r}<\infty\},$$

这个空间的函数,其傅氏系数具有快于 $\exp^{(-\tau|\xi|^{\frac{1}{s}})}$ 衰减.我们有定理

定理 1.27 对任何 $s>0,r\geqslant 0$ 有

$$G^s(\mathbb{T}^d)=\bigcup_{\tau>0}D(e^{\tau A^{\frac{1}{s}}}:H^r(\mathbb{T}^2)). \tag{1.124}$$

证 令 $w\in D(e^{\tau A^{\frac{1}{s}}}:H^r(\mathbb{T}^d)),\tau>0,\rho=\frac{\tau}{s}$,则

$$\begin{aligned}\|\nabla^n w\|_{H^r}^2&=\left(\frac{n!}{\rho^n}\right)^{2s}\sum_\xi(1+|\xi|^2)^r\left(\frac{\rho^n|\xi|^{\frac{n}{s}}}{n!}\right)^{2s}|\hat{w}(\xi)|^2\\&\leqslant\left(\frac{n!}{\rho^n}\right)^{2s}\sum_\xi(1+|\xi|^2)^r e^{2s\rho|\xi|^{\frac{1}{s}}}|\hat{w}(\xi)|^2\\&=\left(\frac{n!}{\rho^n}\right)^{2s}\|e^{\tau A^{\frac{1}{s}}}w\|_{H^r}^2.\end{aligned} \tag{1.125}$$

置 $M=\|e^{\tau A^{\frac{1}{s}}}w\|_{H^r}$,即得(1.123),$\forall\, w\in G^s(\mathbb{T}^d)$.

另一方面,$w\in G^s(\mathbb{T}^d)$,对任何 $\tau>0$ 有

$$\begin{aligned}\|e^{\tau A^{\frac{1}{s}}}w\|_{H^r}^2&\equiv\sum_\xi(1+|\xi|^2)^r e^{2\tau|\xi|^{\frac{1}{s}}}|\hat{w}(\xi)|^2\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\partial\tau)^m}{m!}\sum_\xi(1+|\xi|^2)^r|\xi|^{\frac{m}{s}}|\hat{w}(\xi)|^2.\end{aligned} \tag{1.126}$$

令 ρ 和 M 使得(1.123)成立,插值(1.123)对 $n=0$ 和任何整数 n,$\frac{m}{s}\leqslant 2n$,则(1.126)当中的和有界于

$$\sum_\xi(1+|\xi|^2)^r|\xi|^{\frac{m}{s}}|\hat{w}(\xi)|^2\leqslant M^2\frac{(n!)^{\frac{m}{n}}}{\rho^m}. \tag{1.127}$$

如选取 $n=n_m=\left[\frac{m}{(2s)}\right]+1$,则此界是最佳的.其中[·]表示最大小于它的整数函数.由(1.126)可得

$$\| e^{\tau A^{\frac{1}{s}}} w \|_{H^r}^2 \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2\tau)^m}{m!} M^2 \frac{(n_m!)^{\frac{m}{n_m}}}{\rho^m}$$

$$\leqslant M^2 \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{2\tau}{\rho}\right)^m \frac{(n_m!)^{\frac{m}{n_m}}}{m!}, \tag{1.128}$$

则 Stirling 公式

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e}{n} (n!)^{\frac{1}{n}} = 1 \tag{1.129}$$

在(1.128)中最后级数的第 m 项的 m 次根有

$$\lim_{m\to\infty} \frac{2\tau}{\rho} \frac{(n_m!)^{\frac{1}{n_m}}}{(m!)^{\frac{1}{m}}} = \frac{2\tau}{\rho} \lim_{m\to\infty} \frac{n_m}{m} = \frac{2\tau}{\rho} \cdot \frac{1}{2s} = \frac{\tau}{s\rho}. \tag{1.130}$$

因此由 Hadamard 法则,在(1.128)中对任何 $\tau < s\rho$,级数收敛. 故 $w \in D(e^{\tau A^{\frac{1}{s}}}; H^r(\mathbb{T}^d))$.

定理 1.28 设 $s \geqslant 1, \tau \geqslant 0$ 和 $r > \frac{d}{2}$,则 $D(e^{\tau A^{\frac{1}{s}}}: H^r(\mathbb{T}^d))$为 Banach 代数. 它意味着对乘法是封闭的,则存在有限常数 $C(r,d)$ 使得对任何两个函数 v 和 $w \in D(e^{\tau A^{\frac{1}{s}}}: H^r(\mathbb{T}^d))$满足不等式

$$\| e^{\tau A^{\frac{1}{s}}} (vw) \|_{H^r} \leqslant C(r,d) \| e^{\tau A^{\frac{1}{s}}} v \|_{H^r} \| e^{\tau A^{\frac{1}{s}}} w \|_{H^r}. \tag{1.131}$$

证明可由 $H^r(\mathbb{T}^d)$为 Banach 代数$\left(r > \frac{d}{2}\right)$的通常办法得到.

以下证明 CGL 方程的解为 Gevrey1 类,即为实解析的. 为此利用模 $\| w \|_t \equiv \| e^{tA} w \|_{L^2}$, $\| u \|_{L^2}$ 可由下一节讨论得到. 充分得到半模 $\| A^r u \|_t$ 的界. 直接计算得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| A^r u(t) \|_t^2 &= \mathrm{Re}\left(\int A^{r+1} e^{tA} u A^r e^{tA} u^* \, dx\right) \\
&\quad + \mathrm{Re}\left(\int A^r e^{tA} \partial_t u \, A^r e^{tA} u^* \, dx\right) \\
&= \| A^{r+\frac{1}{2}} u \|_t^2 + R \| A^r u \|_t^2 - \| A^{r+1} u \|_t^2 \\
&\quad - \mathrm{Re}\left[(1 + i\mu)\int A^r e^{tA} (|u|^{2\sigma} u) A^r e^{tA} u^* \, dx\right].
\end{aligned} \tag{1.132}$$

右端第一项易于估计

$$\| A^{\frac{1}{2}} v \|_{L^2}^2 = (v, Av)_{L^2} \leqslant \| v \|_{L^2} \| Av \|_{L^2}$$
$$\leqslant \frac{1}{4} \| v \|_{L^2}^2 + \| Av \|_{L^2}^2, \tag{1.133}$$
其中 $v = A^r e^{tA} u$，用 Cauchy-Schwarz 不等式于(1.132)最后积分项得
$$\| A^r (u^{\sigma+1}(u^*)^{\sigma}) \|_t \| A^r u^* \|_t \leqslant C \| A^r u \|_t^{2\sigma+2}, \tag{1.134}$$
这里我们用到了 $D(e^{tA}: H^r(\mathbb{T}^d))$ 为一代数. 最后得
$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| A^r u(t) \|_t^2 \leqslant \left(R + \frac{1}{4}\right) \| A^r u(t) \|_t^2$$
$$+ C \| A^r u(t) \|_t^{2\sigma+2}. \tag{1.135}$$
这个微分不等式易于积分，表明 $\| A^r u(t) \|_t$ 在某区间 $t \in [0, T]$ 上保持有限. 给定 σ 为整数，可证局部解存在 $u(t) \in H^r(\mathbb{T}^d)$，$\forall r, t > 0$.

定理 1.29 设 σ 为正整数，则对任意 $t > 0$，只要局部古典解存在，则此解一定对 x 是解析的.

现考虑整体古典解.

为了证明整体解的存在性，必须作一系列的先验估计. 由直接计算得
$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int |u|^2 \mathrm{d}x = R \int |u|^2 \mathrm{d}x - \int |u|^{2\sigma+2} \mathrm{d}x - \int |\nabla u|^2 \mathrm{d}x$$
$$\leqslant R \int |u|^2 \mathrm{d}x - \left(\int |u|^2 \mathrm{d}x\right)^{\sigma+1}. \tag{1.136}$$
在附录中，已证对 $\sigma > 0$，由微分不等式(1.136)推出
$$\| u(t) \|_{L^2} < \left(\frac{R}{1 - e^{-2\sigma R t}}\right)^{\frac{1}{2\sigma}}. \tag{1.137}$$

这个估计与初值 u_0 无关，当 $t \to \infty$ 时，$\| u(t) \|_{L^2} \to R^{\frac{1}{2\sigma}}$，因此 $\| u(t) \|_{L^2}$ 对初值和时间是一致有界的. 当 $\sigma d < 2$ 时，定理 1.20 推出 CGL 方程对任何初值 $u_0(x) \in L^2(\mathbb{T}^d)$ 具有整体古典解. 但当 $\sigma d > 2$ 时，则必须控制 $\| u(t) \|_{L^2}$.

直接计算 L^p 模得
$$\frac{1}{P}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int |u|^p \mathrm{d}x = R \int |u|^p \mathrm{d}x - \int |u|^{2\sigma+p} \mathrm{d}x$$

$$+\mathrm{Re}\left(\int |u|^{p-2}u^{*}\Delta u\mathrm{d}x\right)-\nu\mathrm{Im}\left(\int |u|^{p-2}u^{*}\Delta u\mathrm{d}x\right),$$
(1.138)

当 $p\geqslant 2$,且 ν 满足

$$|\nu|\leqslant\frac{2\sqrt{p-1}}{p-2} \tag{1.139}$$

时,易证(1.138)右端最后二项为非正的.于是忽略这二项,并由 Hölder 不等式可得

$$\frac{1}{P}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int |u|^{p}\mathrm{d}x\leqslant R\int |u|^{p}\mathrm{d}x-\left(\int |u|^{p}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p+2\sigma}{p}}, \tag{1.140}$$

附录再次给出一致上界

$$\| u(t)\|_{L^{p}}<\left(\frac{R}{1-e^{-2\sigma Rt}}\right)^{\frac{1}{2\sigma}}. \tag{1.141}$$

整体古典解的存在性,在亚临界情况($\sigma d<2$),取 $p=2$ 由定理 1.20 所保证,在临界情况($\sigma d=2$),仍满足 $\sigma d<p$ 且(1.139)同时成立,选取 p 接近于 2. 在超临界时($\sigma d>2$),我们能选取 p 充分接近于 σd,使(1.139)成立,对于可能的 ν,我们于是有

定理 1.30 对 $\sigma>0$,广义 CGL 方程具有 C^2 初值,如果 $\sigma d\leqslant 2$,或 $\sigma d>2$ 且 ν 满足

$$|\nu|<\frac{2\sqrt{\sigma d-1}}{\sigma d-2}, \tag{1.142}$$

则存在惟一的整体古典解.

对于超临界情况,仅当满足(1.142)时,存在整体古典解.

附注 1.31 当整体古典解存在,估计(1.141)表明吸引子被限制在 L^p(p 满足(1.139))半径为 $R^{\frac{1}{2\sigma}}$ 的闭球内.进一步,估计(1.142)与初值无关,这意味着在任意短的时间内,一切解进入有限半径的某个球内.

进一步估计 H^1 模,设

$$1\leqslant p<\begin{cases}\infty, & d=1 \text{ 或 } 2,\\ \dfrac{2d}{d-2}, & d\geqslant 3.\end{cases} \tag{1.143}$$

让 $\sigma d<p, d<2+\frac{2}{\sigma}, \sigma\geqslant\frac{1}{2}$，由定理 1.15 保证解的光滑性，可取梯度.直接计算得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int|\nabla u|^2\mathrm{d}x=R\int|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\int|\Delta u|^2\mathrm{d}x$$
$$+\mathrm{Re}\left(\int|u|^{2\sigma}u^*\Delta u\mathrm{d}x\right)+\mu\mathrm{Im}\left(\int|u|^{2\sigma}u^*\Delta u\mathrm{d}x\right). \tag{1.144}$$

上式右端最后二项类似于(1.138)右端的二项，作类似处理可证当

$$|\mu|\leqslant\frac{\sqrt{2\sigma+1}}{\sigma} \tag{1.145}$$

时为非正.此时忽略这些项，利用 Cauchy 不等式可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int|\nabla u|^2\mathrm{d}x\leqslant R\int|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\frac{\left(\int|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2}{\int|u|^2\mathrm{d}x}, \tag{1.146}$$

由于(1.137)，$\|u\|_{L^2}$有界，再利用附录可得

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2<\Phi(\sigma,Rt)\left(\frac{R}{1-e^{-2\sigma Rt}}\right)^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}, \tag{1.147}$$

其中 Φ 可用超几何函数 F 表示

$$\Phi(\sigma,Rt)=\frac{2(1+\sigma)}{F\left(1,1,2+\frac{1}{\sigma};1-e^{-2\sigma Rt}\right)}. \tag{1.148}$$

函数 $\Phi(\sigma,Rt)$ 为 t 的单调减少函数，且有 $\Phi(\sigma,0)=2(1+\sigma)$，$\Phi(\sigma,\infty)=2$.因而(1.147)给出了 $\|\nabla u\|_{L^2}$一致的界便类似于方程(1.138)的 L^p 估计.

定理 1.32 设 $\sigma\geqslant\frac{1}{2}, d<2+\frac{2}{\sigma}$，则具有 C^2 初值的广义 GL 方程具有惟一的整体古典解，如果如下条件满足：

$$-\frac{1+\mu\nu}{|\mu-\nu|}\leqslant\frac{\sqrt{2\sigma+1}}{\sigma}, \tag{1.149}$$

其中 σ,μ,ν 满足表 1.1.

表 1.1 GL 方程整体解存在性的限制

	$\sigma=1$	$\sigma=2$	$\sigma\geqslant 3$
$d=1$	没限制	没限制	$\lvert\nu\rvert<\frac{2\sqrt{\sigma-1}}{\sigma-2}$ 或 $-\frac{1+\mu\nu}{\lvert\mu-\nu\rvert}\leqslant\frac{\sqrt{2\sigma+1}}{\sigma}$
$d=2$	没限制	$\lvert\nu\rvert<\sqrt{3}$ 或 $-\frac{1+\mu\nu}{\lvert\mu-\nu\rvert}\leqslant\frac{\sqrt{5}}{2}$	$-\frac{1+\mu\nu}{\lvert\mu-\nu\rvert}\leqslant\frac{\sqrt{2\sigma+1}}{\sigma}$
$d=3$	$\lvert\nu\rvert<\sqrt{8}$ 或 $-\frac{1+\mu\nu}{\lvert\mu-\nu\rvert}<\sqrt{3}$	$\lvert\nu\rvert<\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\lvert\nu\rvert<\frac{2\sqrt{3\sigma-1}}{3\sigma-2}$
$d\geqslant 4$	$\lvert\nu\rvert<\frac{2\sqrt{d-1}}{d-2}$	$\lvert\nu\rvert<\frac{\sqrt{2d-1}}{d-1}$	$\lvert\nu\rvert<\frac{2\sqrt{\sigma d-1}}{\sigma d-2}$

超临界 $d=3,\sigma=1$ 的图(见图 1.1). 与图 $2<\sigma d<2+2\sigma$ 类似. $1+\mu\nu\geqslant 0$ 时为调制稳定性.

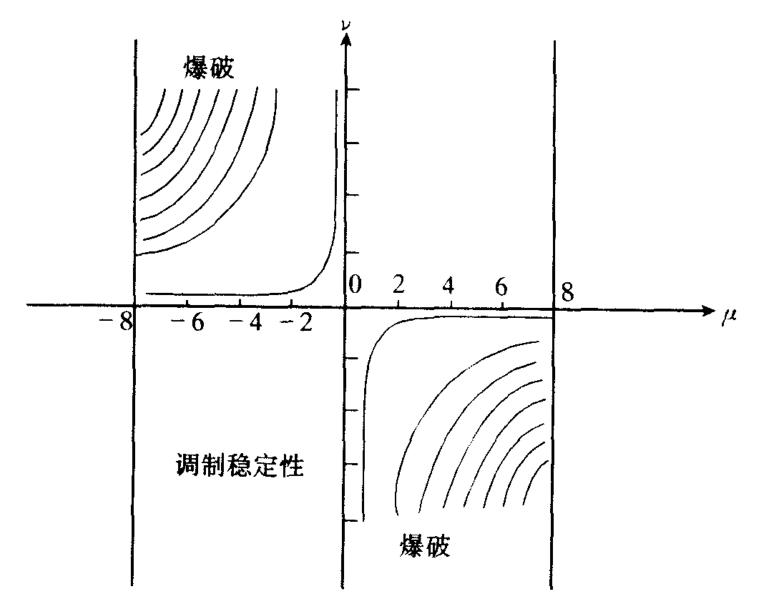


图 1.1 超临界 CGL 参数平面, $d=3,\sigma=1$

为了证明定理 1.32, 利用如下估计.

引理 1.33 对 $p\geqslant 2$, $u\in H^2(\mathbb{R}^d)\cap L^{2p-2}(\mathbb{R}^d)$, 如下不等

式成立

$$\left(\mathrm{Re}\left(\int |u|^{p-2}u^* \Delta u \mathrm{d}x\right)\right) \leqslant -\frac{2\sqrt{p-1}}{p}\left|\int |u|^{p-2}u^* \Delta u \mathrm{d}x\right|, \tag{1.150}$$

$$\left|\mathrm{Im}\left(\int |u|^{p-2}u^* \Delta u \mathrm{d}x\right)\right| \leqslant \frac{p-2}{p}\left|\int |u|^{p-2}u^* \Delta u \mathrm{d}x\right|. \tag{1.151}$$

证 通过分部积分可得

$$2\int |u|^{p-2}u^* \Delta u \mathrm{d}x = -p\int |u|^{p-2}|\nabla u|^2 \mathrm{d}x - (p-2)\int |u|^{p-4}(u^*)^2 \Delta u \cdot \nabla u \mathrm{d}x. \tag{1.152}$$

对于 $u \neq$ 常数,上式右端第一项为负的,而第二项其模因子不大于 $\frac{(p-2)}{p}$,又

$$\int |u|^{p-2}u^* \Delta u \mathrm{d}x = -\left|\int |u|^{p-2}u^* \Delta u \mathrm{d}x\right| \exp^{(i\theta)}, \tag{1.153}$$

对某 $\theta, |\theta| < \frac{F}{2}$ 使得 $|\sin\theta| \leqslant \frac{p-2}{p}$ 或 $\cos\theta \geqslant \frac{2\sqrt{p-2}}{p}$. 通过 θ 的三角界(trigonometric bounds),得到界(1.150)和(1.151).

定理 1.32 的证明. 计算

$$F = \int \left(|\nabla u|^2 + \frac{\beta^2}{\sigma+1}|u|^{2\sigma+2}\right) \mathrm{d}x, \tag{1.154}$$

对 t 求导数,可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = {} & R\int (|\nabla \dot{u}|^2 + \beta^2 |u|^{2\sigma+2}) \mathrm{d}x \\ & - \int (|\Delta u|^2 + \beta^2 |u|^{4\sigma+2}) \mathrm{d}x + (1+\beta^2) \\ & \cdot \mathrm{Re}\left(\int |u|^{2\sigma}u^* \Delta u \mathrm{d}x\right) + (\mu - \beta^2 \nu)\mathrm{Im}\left(\int |u|^{2\sigma}u^* \Delta u \mathrm{d}x\right).\end{aligned}$$

由于

$$-\int (|\Delta u|^2 + \beta^2 |u|^{4\sigma+2}) \mathrm{d}x \leqslant -2\beta\left|\int |u|^{2\sigma}u^* \Delta u \mathrm{d}x\right|, \tag{1.155}$$

可得微分等式(利用引理 1.33)

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=R\int(|\nabla u|^2+\beta^2|u|^{2\sigma+2})\mathrm{d}x-(1-k)$$

$$\cdot\int(|\Delta u|^2+\beta^2|u|^{4\sigma+2})\mathrm{d}x$$

$$-\left[2k\beta+(1+\beta^2)\frac{\sqrt{2\sigma+1}}{\sigma+1}\right.$$

$$\left.-|\mu-\beta_\nu^2|\frac{\sigma}{\sigma+1}\right]\left|\int|u|^{2\sigma}u^*\Delta u\mathrm{d}x\right|, \tag{1.156}$$

$0<k<1$,选取 β 使得上式右端最后一项系数为负. 当 $\mu\nu\geqslant0$ 时是对的,当 $\mu\nu<0$ 时,无损于一般性,设 $\mu>0,\nu<0$. 取 $k=1$,则条件

$$2\beta+(1+\beta^2)\frac{\sqrt{2\sigma+1}}{\sigma+1}-(\mu-\beta_\nu^2)\frac{\sigma}{\sigma+1}\geqslant0 \tag{1.157}$$

取最优 β,得到双典参数区域(1.149),则可得到 F 随 t 指数增长和整体古典解的存在性.

附注 1.34 对于(1.149)作为严格不等式的 μ,ν,我们能取 $k<1$,由以下方式得到 H^1 和 $L^{2\sigma+2}$模的估计,

$$F^2\leqslant\left(1+\frac{\beta^2}{(\sigma+1)^2}\right)\left(\int|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2+\left(\beta^2+\frac{\beta^4}{(\sigma+1)^2}\right)$$

$$\cdot\left(\int|u|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\left(1+\frac{\beta^2}{(\sigma+1)^2}\right)\int|u|^2\mathrm{d}x\int(|\Delta u|^2$$

$$+\beta^2|u|^{4\sigma+2})\mathrm{d}x. \tag{1.158}$$

在第二步中,我们已用了分部积分和 Cauchy - Schwarz 不等式于第一项和第二项,选取 β 使得(1.157)为严格不等式,则 F 满足微分不等式

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\leqslant(\sigma+1)RF-(1-k)\frac{(\sigma+1)^2}{(\sigma+1)^2+\beta^2}\frac{F^2}{\int|u|^2\mathrm{d}x}. \tag{1.159}$$

(1.137)提供 $\|u\|_{L^2}$的界,利用附录中的微分不等式,积分得

$$F<\frac{(\sigma+1)^2+\beta^2}{(1-k)(\sigma+1)}\left(\frac{R}{1-e^{-2\sigma Rt}}\right)^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}, \tag{1.160}$$

其界随 R 增长($t\to\infty$),如同(1.147)中的界.

现考虑整体 Sobolev 界.

记

$$|\nabla^n u|^2 \equiv \nabla^n u^* \cdot \nabla^n u, \tag{1.161}$$

直接计算

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla^n u\|_{L^2}^2 = R\|\nabla^n u\|_{L^2}^2 - \|\nabla^{n+1}u\|_{L^2}^2$$

$$-\mathrm{Re}[(1+i\mu)\int \nabla^n(|u|^{2\sigma}u)\cdot\nabla^n u^*\,\mathrm{d}x), \tag{1.162}$$

右端第二项可由 Sobolev 不等式估计

$$\|\nabla^n u\|_{L^2} \leqslant \|\nabla^{n+1}u\|_{L^2}^{\frac{n}{n+1}}\|u\|_{L^2}^{\frac{1}{n+1}}, \tag{1.163}$$

$$\left|\int \nabla^n(|u|^{2\sigma}u)\cdot\nabla^n u^*\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \delta\|\nabla^{n+1}u\|_{L^2}^2$$

$$+C(\delta)\cdot\|\nabla^n u\|_{L^2}^2\|u\|_{L^p}^{2\sigma p/p-\sigma d}, \tag{1.164}$$

(1.164)将在引理 1.38 中证明.选取 $\delta>0$, $p>\sigma d$,特别,$\delta=|1+i\mu|^{-1}$,我们能从方程(1.162)得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla^n u\|_{L^2}^2 \leqslant (2R+C\|u\|_{L^p}^{2\sigma p/p-\sigma d})\cdot\|\nabla^n u\|_{L^2}^2$$

$$-\frac{\|\nabla^n u\|^{\frac{2(n+1)}{n}}}{\|u\|_{2}^{2/n}}. \tag{1.165}$$

利用(1.137)中 $\|u\|_{L^2}$ 的估计可控制上式右端最后一项.当 $p>\sigma d$,则可得到整体 H^n 解(任意 n).

定理 1.35 对一切正整数 d、σ 和 n,任意 $p>\sigma d$,当 μ, ν 位于参数平面内使得具 L^p 初值的 CGL 方程具 L^p 一致有界,则这些解是整体的和光滑的($t>0$),它们的 H^n 模对一切初值一致有界,当 $t\to\infty$ 时,满足微分不等式(1.165).

附注 1.36 定理 1.35 表明 GL 方程具有紧的、整体吸引子. $d=1,2$,CGL 方程具有惯性流形,对于 $d\geqslant 3$ 仍为公开问题.

为证(1.164),需要辅助引理.

引理 1.37 对一切正整数 d,σ 和 n,如下不等式成立,

$$\left|\int \nabla^n(|u|^{2\sigma}u)\cdot\nabla^n u^*\,\mathrm{d}x\right| \leqslant C(n,q)\,\|\nabla^n u\|_{L^{2q}}^2\,\|u\|_{L^{2\sigma r}}^{2\sigma}, \tag{1.166}$$

其中

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1,\quad 1\leqslant q、r\leqslant\infty. \tag{1.167}$$

证 将绝对值移入积分内,对 $\nabla^n(|u|^{2\sigma}u)$ 用 Leibniz 展开,再用三角不等式得

$$\left|\int \nabla^n(|u|^{2\sigma}u)\cdot\nabla^n u^*\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \sum_{\substack{\alpha\in N^{2\sigma+1}\\ |\alpha|=n}}\frac{n!}{\alpha!}\int|\nabla^n u|\prod_{j=1}^{2\sigma+1}|\nabla_j^{\alpha}u|\,\mathrm{d}x. \tag{1.168}$$

对于给定的多重指标 α,$|\alpha|=n$,定义 θ_j,q_j 为

$$\theta_j=\frac{\alpha_j}{n},\ \frac{1}{q_j}=\theta_j\frac{1}{2q}+(1-\theta_j)\frac{1}{2\sigma\tau}. \tag{1.169}$$

它们满足

$$\sum_{j=0}^{2\sigma+1}\theta_j=\frac{|\alpha|}{n}=1,\ \frac{1}{2q}+\sum_{j=1}^{2\sigma+1}\frac{1}{q_j}=\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1. \tag{1.170}$$

则(1.168)右端相应项可用 Gagliardo - Nirenberg 插值不等式和 Hölder 不等式估计

$$\begin{aligned}\int|\nabla^n u|\prod_{j=1}^{2\sigma+1}|\nabla^{\alpha_j}u|\,\mathrm{d}x &\leqslant \|\nabla^n u\|_{L^{2q}}\prod_{j=1}^{2\sigma+1}\|\nabla^{\alpha_j}u\|_{L^{q_j}}\\ &\leqslant \|\nabla^n u\|_{L^{2q}}\prod_{j=1}^{2\sigma+1}C_j\|\nabla^n u\|_{L^{2q}}^{\theta_j}\|u\|_{L^{2\sigma}}^{1-\theta_j}\\ &= C\|\nabla^n u\|_{L^{2q}}^2\|u\|_{L^{2\sigma r}}^{2\sigma}.\end{aligned} \tag{1.171}$$

最后代入(1.168),即得所要结果.

引理 1.38 对一切正整数 d,σ 和 n,任意 $p>\sigma d$ 和 $\delta>0$,有估计

$$\begin{aligned}&\left|\int \nabla^n(|u|^{2\sigma}u)\cdot\nabla^n u^*\,\mathrm{d}x\right|\\ &\leqslant\delta\|\nabla^{n+1}u\|_{L^2}^2+C(\delta)\|\nabla^n u\|_{L^2}^2\|u\|_{L^p}^{\frac{2\sigma p}{p-\sigma d}}.\end{aligned} \tag{1.172}$$

证 用 $G-N$ 不等式估计(1.166)右端,再用 Young 不等式

$$
\begin{aligned}
&\left|\int \nabla^n(|u|^{2\sigma}u)\cdot\nabla^n u^* \mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant C_1 \|\nabla^{n+1}u\|_{L^2}^{\frac{d}{r}} \|\nabla^n u\|_{L^2}^{2-\frac{d}{r}} \|u\|_{L^{2\sigma r}}^{2\sigma} \\
&\leqslant \delta\|\nabla^{n+1}u\|_{L^2}^2 + C_2(\delta)\|\nabla^n u\|_{L^2}^2\|u\|_{L^{2\sigma r}}^{\frac{4\sigma}{2-d/r}}, \quad (1.173)
\end{aligned}
$$

其中 $2-\dfrac{d}{r}>0$. 证 $p=2\sigma r$,即得引理结论.

定理 1.39 对于正整数 d、σ,任何 $r>\dfrac{d}{2}$, $p>\sigma d$,其中 μ,ν 在参数平面区域内使得 CGL 方程具 L^p 初值的解具有 L^p 一致界.这些解是整体的,实解析的($t>0$),进一步,存在 $T_{\max}$ 使得 $u(t)\in D(e^{TA}:H^r(\quad^d))$的模一致有界,对一切初值,$T\in[0,T_{\max}]$和$t\geqslant T$.

附录 关于微分不等式的积分

设 $F(t)\geqslant 0$ 满足微分不等式

$$
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\leqslant a(t)F-b(t)F^{1+s}, \quad (\mathrm{A}.1)
$$

其中 $s>0$, $b(t)>0$. 由 Bernonlli,引入变元 $Y=F^{-s}$,由(A.1)可得线性微分不等式

$$
\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}\geqslant -sa(t)Y+sb(t). \quad (\mathrm{A}.2)
$$

用 $\exp\int_{t'}^{t} sa(t'')\mathrm{d}t''$ 可得

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Y\exp\int_{t'}^{t} sa(t'')\mathrm{d}t''\right)\geqslant sb(t)\exp\left(\int_{t'}^{t} sa(t'')\mathrm{d}t''\right), \quad (\mathrm{A}.3)
$$

积分(A.3) 从 0 到 t 得

$$
\begin{aligned}
Y(t)\geqslant\ & Y(0)\exp\left(-\int_0^t sg(t')\mathrm{d}t'\right) \\
&+\int_0^t sb(t')\exp\left(-\int_{t'}^{t} sa(t'')\mathrm{d}t''\right)\mathrm{d}t', \quad (\mathrm{A}.4)
\end{aligned}
$$

忽略含有 $Y(0)$ 项可得

$$
F(t)<C\int_0^t sb(t')\exp\left(-\int_{t'}^{t} sa(t'')\mathrm{d}t'')\mathrm{d}t'\right)^{-\frac{1}{s}}. \quad (\mathrm{A}.5)
$$

§2 局部空间上的 Ginzburg-Landau 方程的 Cauchy 问题

我们考虑在局部空间上 Ginzburg-Landau 方程整体解的存在性和惟一性，所谓局部空间 $X_{loc} = X_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 是指

$$X_{loc} = \{u : u \in X(B),\text{对任何球 } B \in \mathbb{R}^n\}, \tag{2.1}$$

其中 X 为L^r 或H^μ 或其他函数空间，也可定义局部一致空间 $X_{loc,un}$ 为

$$X_{loc,un} = \{u : \| u : X_{loc,un} \| \equiv \sup_{X \in R^n} \| u : X(B(x,1)) \| < \infty\}, \tag{2.2}$$

这里 $B(x,k)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中以 x 为中心，以 k 为半径的球.

考虑一般 GL 方程

$$\partial_t u = \gamma^2 u + (a + i\alpha)\Delta u - (b + i\beta) f(u), \tag{2.3}$$

其中 u 为复值函数，定义在 $n+1$ 维时空空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上. Δ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的 Laplace 算子，$a, b, \alpha, \beta, \gamma$ 均为实参数，$\gamma \geqslant 0, a > 0, b > 0$. 相互作用项 $f(u)$ 为 u 的非线性函数，典型的如

$$f(u) = u \mid u \mid^{2\sigma}. \tag{2.4}$$

设 $f(u)$ 满足以下条件：

(H_1) $f \in C(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, $f(u)$ 具形式 $f(u) = ug(\mid u \mid^2)$, g 为实的且满足

$$\rho^\sigma \leqslant g(\rho) \leqslant C(1 + \rho^\sigma), \tag{2.5}$$

对某 $\sigma(0 < \sigma < \infty)$, 某 $c \geqslant 1$, $\forall \rho \geqslant 0$.

(H_2) $f \in C'(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, $f(u) = ug(\mid u \mid^2)$, g 为实的，对大的 ρ 满足 $g(\rho) - \rho g'(\rho) > 0$ 且

$$\limsup_{\rho \to \infty} \rho \mid g'(\rho) \mid [g(\rho) + \rho g'(\rho)]^{-1} = \frac{\sigma'}{\sigma' - 1}, \tag{2.6}$$

对某 $\sigma' > 0$ 成立.

(H_3) $f \in C'(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, $f(u) = ug(\mid u \mid^2)$, g 为实的且满足

$$|g(\rho)|+\rho|g'(\rho)|\leqslant C(1+\rho^{\sigma}), \tag{2.7}$$

对某 $\sigma'>0$,某 $c>0$ 和 $\forall\rho\geqslant 0$ 成立.

现考虑 L^2 上的估计和解的存在性.

令

$$G(\rho)=\int_0^{\rho}g(\rho')\mathrm{d}\rho'. \tag{2.8}$$

引理 2.1 设 f 满足(H_1)且

$$u\in L^2_{\mathrm{loc}}(I,H^1)\cap L^{2n+2}_{\mathrm{loc}}(I,L^{2n+2}), I\subset \mathbb{R}, \tag{2.9}$$

并满足方程(2,3),则除了时间上一个零集外,$u\in C(I,L^2)$ 且满足等式

$$\|u(t_2)\|_2^2-\|u(t_1)\|_2^2=\int_{t_1}^{t_2}\{2\gamma\|u(t)\|_2^2-2a\|\nabla u(t)\|_2^2-$$
$$2b\int|u|^2g(|u|^2)\mathrm{d}x\}\mathrm{d}t, \tag{2.10}$$

$\forall t_1,t_2\in I$.

证 (2.10)写成微分形式为

$$\partial_t\|u\|_2^2=2\gamma\|u\|_2^2-2a\|\nabla u\|_2^2$$
$$-2b\int|u|^2g\cdot(|u|^2)dx \tag{2.11}$$

这在形式上可从计算 $2\mathrm{Re}(u,(2.3))$ 得到,真正的证明如下:从方程(2.3)和(2.9)以及假设(H_1)有

$$\partial_t u\in L^2_{\mathrm{loc}}(I,H^{-1})+L^S_{\mathrm{loc}}(I,L^S)\subset L^S_{\mathrm{loc}}(I,H^{-N}), \tag{2.12}$$

对任何 $N>\dfrac{n}{2}$,$S=(2\sigma+2)/(2\sigma+1)$.由[11,引理1.2,p.249]推出 $\|u(t)\|_2^2\in C(I,\mathbb{R}^+)$,且(2.10)成立,对一切 $t_1,t_2\in I$.特别地,$u\in C^{\infty}_{\mathrm{loc}}(I,L^2)$ 连同(2,12)推出 $u\in C(I,H^{-N})$,这就得到 $u\in C_W(I,L^2)$[11,引理8.1,p.297],连同 L^2 模的连续性推出 $u\in C(I,L^2)$.

在假设(H_1)下,等式(2.10)提供了解 u 的一个先验估计

$$u\in L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(I,L^2)\cap L^2_{\mathrm{loc}}(I,H^1)\cap L^{2\sigma+2}_{\mathrm{loc}}(I,L^{2\sigma+2}).$$

命题 2.2 设 f 满足(H_1),$u_0 \in L^2$,则方程(2.3)具有一解.

$$u \in C(\mathbb{R}^+, L^2) \cap L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, H^1) \cap L^{2\sigma+2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, L^{2\sigma+2}), \tag{2.13}$$

具 $u(0) = u_0$,u 满足(2.10),$\forall\, t_1 \geqslant 0, t_2 \geqslant 0$.

这是标准的紧性结果,可用 Galerkin 方法证明之.

引理 2.3 设 f 满足(H_1)且

$$u \in L^2_{\mathrm{loc}}(I, H^1_{\mathrm{loc}}) \cap L^{2\sigma+2}_{\mathrm{loc}}(I, L^{2\sigma+2}_{\mathrm{loc}}), I \in \mathbb{R}$$

满足(2.3),则对任何 $\varphi \in C'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ 具有紧支集,u 满足等式

$$\| \varphi u(t_2) \|_2^2 - \| \varphi u(t_1) \|_2^2 = \int_{t_1}^{t_2} \{2\gamma \| \varphi(u) \|_2^2 - 2a \| \varphi \nabla u \|_2^2$$
$$- 4\mathrm{Re}(a + i\alpha)(u \nabla \varphi, \varphi \nabla u) - 2b \int \varphi^2 | u |^2 g(| u |^2) \mathrm{d}x \} \mathrm{d}t, \tag{2.14}$$

$\forall\, t_1, t_2 \in I$.

证 等式(2.14)可写成微分形式

$$\partial_t \| \varphi u \|_2^2 = 2\gamma \| \varphi u \|_2^2 - 2a \| \varphi \nabla u \|_2^2$$
$$- 4\mathrm{Re}(a + i\alpha)(u \nabla \varphi, \varphi \nabla u) - 2b \int \varphi^2 | u |^2 g(| u |^2) \mathrm{d}x, \tag{2.15}$$

形式上可由计算 $2\mathrm{Re}(\varphi u, \varphi(2.3))$ 得到,实际证明类似引理 2.1.

引入常数

$$C_1 = \| \varphi \|_2^{2\sigma/(\sigma+1)},$$

$$C_2 = \left\{ \int \varphi^{-2/\sigma} | \nabla \varphi |^{2(\sigma+1)/\sigma} \right\}^{\sigma/(\sigma+1)},$$

$$C_3 = 2[\gamma - a^{-1}(a^2 - \alpha^2) c_2 / c_1],$$

$$C_4 = C_1 \left(\frac{C_1 C_3}{2b} \right)^{1/\sigma} = \| \varphi \|_2^2 \left(\frac{C_3}{2b} \right)^{1/\sigma}.$$

设

$$y(t) = \| \varphi u(t) \|_2^2. \tag{2.16}$$

引理 2.4 设 f 满足(H_1),u 为(2.3)的解且满足(2.9),$I = [0, T]$.又设 $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$ 具有紧支集,$C_i (i = 1,2,3,4)$ 和

$y(t)$ 定义如前,则

(1) 如 $y(0)\leqslant C_4$,我们有 $y(t)\leqslant C_4, \forall t\in I$,

(2) 如 $y(0)>C_4$,我们有 $y(t)\leqslant \tilde{y}(t), \forall t\in I$,

这里

$$\begin{aligned}\tilde{y}(t) = & y(0)\{\exp(-C_3\sigma t) \\ & +(y(0)/C_4)^\sigma[1-\exp(-C_3\sigma t)]\}^{-1/\sigma}.\end{aligned} \tag{2.17}$$

特别地,$\tilde{y}(t)$ 指数衰减到 C_4 且

$$\tilde{y}(t)\leqslant C_4[1-\exp(-C_3\sigma t)]^{-\frac{1}{\sigma}}, \forall t>0, \tag{2.18}$$

并对 $y(0)$ 一致成立.

证 从等式(2.12)开始,由 Schwarz 不等式有

$$\begin{aligned}& -2a\|\varphi\nabla u\|_2^2-4\mathrm{Re}(a+i\alpha)(u\nabla\varphi,\varphi\nabla u) \\ & \leqslant 2a^{-1}(a^2+\alpha^2)\|u\nabla\varphi\|_2^2.\end{aligned} \tag{2.19}$$

定义

$$z=\left\{\int\varphi^2|u|^{2\sigma+2}\right\}^{1/(\sigma+1)}. \tag{2.20}$$

由假设(H_1),我们估计

$$-2b\int\varphi^2|u|^2 g(|u|^2)\leqslant -2bz^{\sigma+1}, \tag{2.21}$$

由 Hölder 不等式有

$$\|\varphi u\|_2^2\leqslant\left\{\int\varphi^2\right\}^{\sigma/(\sigma+1)}\left\{\int\varphi^2|u|^{2\sigma+2}\right\}^{1/(\sigma+1)}, \tag{2.22}$$

即 $y\leqslant C_1 z$,同理

$$\begin{aligned}\|u\nabla\varphi\|_2^2\leqslant & \left\{\int\varphi^{-2/\sigma}|\nabla\varphi|^{(2\sigma+2)}\right\}^{\sigma/(\sigma+1)} \\ & \cdot\left\{\int\varphi^2|u|^{2\sigma+2}\right\}^{1/(\sigma+1)}=C_2 z.\end{aligned} \tag{2.23}$$

联系(2.14),(2.20),(2.22)—(2.24)可得如下关于 y 和 z 的不等式

$$y(t)\leqslant C_1 z(t), \tag{2.24}$$

$$y(t_2)-y(t_1)\leqslant\int_{t_1}^{t_2}\{2\gamma y+2a^{-1}(a^2+\alpha^2)C_2 z-2bz^{\sigma+1}\}\mathrm{d}t. \tag{2.25}$$

引理 2.4 的证明还需要如下的引理 2.5 和 2.6.

引理 2.5 设 $\lambda > 0, \mu > 0$,则 ODE

$$\partial_t \tilde{y} = \lambda \tilde{y} - \mu \tilde{y}^{\sigma+1} \tag{2.26}$$

具 $\tilde{y}(0) = \tilde{y}_0 \geqslant 0$ 的解 $\tilde{y}(t)$ 为

$$\tilde{y}(t) = \tilde{y}_0 \{\exp(-\lambda\sigma t) + \eta^{-\sigma}\tilde{y}_0^{\sigma}[1 - \exp(-\lambda\sigma t)]\}^{-1/\sigma}, \tag{2.27}$$

其中 $\eta = (\lambda/\mu)^{1/\sigma}$ 为使(2.26) 右端为 0 的 $\tilde{y}$ 值. 对 $\tilde{y}_0 > \eta(< \eta, = \eta)$,解满足 $\tilde{y}(t) > \eta(< \eta, = \eta)$, $\forall\, t \geqslant 0$. 且 $\tilde{y}(t)$ 是指数减少 $\to \eta$(增加,常数), $t \to \infty$.

证明由基本计算可得.

引理 2.6 设 $0 < \nu \leqslant \lambda, \mu > 0, I \in [0, T], y \in C[I, \mathbb{R}^+)$ 且 $y(0) = y_0, z \in L^{\sigma+1}(I, \mathbb{R}^+)$ 满足如下不等式

$$y(t) \leqslant z(t), \tag{2.28}$$

$$y(t_2) - y(t_1) \leqslant \int_{t_1}^{t_2} \{(\lambda - \nu)y + \nu z - \mu z^{\sigma+1}\} \mathrm{d}t \tag{2.29}$$

对一切 $t, t_1, t_2 \in I, t_1 \leqslant t_2$ 成立,则 $y(t) \leqslant \tilde{y}(t), \forall\, t \in I$,其中 $\tilde{y}$ 为 ODE(2.26) 具初值 $\tilde{y}_0 \geqslant (y_0, \eta_0)$ 的解, 这里 $\eta_0 = [\lambda/(\sigma+1)^{\mu}]^{1/\sigma}$ 为使(2.26) 右端取最大值的值(注意 $\eta_0 < \eta$).

证 设 $t \in I, t > 0$,我们要证 $y(t) \leqslant \tilde{y}(t)$. 令 $t_0 = \sup\{t' : t' \leqslant t, y(t') \leqslant \tilde{y}(t')\}$. 如 $t_0 = t$,则由 y 的连续性有 $y(t) \leqslant \tilde{y}(t)$. 如 $t_0 < t$,则 $y(t_0) = \tilde{y}(t_0), y(t') > \tilde{y}(t'), t_0 < t' \leqslant t$. 由(2.29) 和 $y(t') \leqslant z(t')$ 有

$$\begin{aligned} y(t) - y(t_0) &= \int_{t_0}^{t} [(\lambda - \nu)y + \nu z - \mu z^{\sigma+1}] \mathrm{d}t' \\ &\leqslant \int_{t_0}^{t} [\lambda z(t) - \mu z_{(t)}^{\sigma+1}] \mathrm{d}t'. \end{aligned}$$

现对一切 $t' \in (t_0, t]$ 有

$$z(t') \geqslant y(t') > \tilde{y}(t') \geqslant \eta_0.$$

最后不等式是由 $\tilde{y}_0 \geqslant \eta_0$ 和引理 2.5 得到,由于

$$y(t) - y(t_0) \leqslant \int_0^t (\lambda \tilde{y} - \mu \tilde{y}^{\sigma+1}) \mathrm{d}t' = \tilde{y}(t) - \tilde{y}(t_0),$$

因 $y(t_0)=\tilde{y}(t_0)$ 有 $y(t)\leqslant\tilde{y}(t)$. 这是矛盾于 $t_0<t$ 时 $y(t)>\tilde{y}(t)$ 的,引理获证.

现在可得引理 2.4 的证明. 充分调整常数 λ,μ,ν 在引理 2.6 中,使得能应用此引理,可取 $\lambda=C_3,\eta=C_4$.

引理 2.7 设 f,u,φ 满足引理 2.4 的假设,则 u 满足估计

$$\int_{t_1}^{t_2}\{a\|\varphi\nabla u\|_2^2+2b\int\varphi^2|u|^2g(|u|^2)\}\mathrm{d}t\leqslant\|\varphi u(t_1)\|_2^2$$
$$-\|\varphi u(t_2)\|_2^2+\int_{t_1}^{t_2}[2\gamma\|\varphi u(t)\|_2^2+4a^{-1}(a^2+\alpha^2)\|u(t)\nabla\varphi\|_2^2],\tag{2.30}$$

$\forall t_1,t_2\in I,t_1\leqslant t_2$.

证 这个结论直接来自(2.10)和不等式

$$-4\mathrm{Re}(a+i\alpha)(u\nabla\varphi,\varphi\nabla u)$$
$$\leqslant a\|\varphi\nabla u\|_2^2+4a^{-1}(a^2+\alpha^2)\|u\nabla\varphi\|_2^2.$$

命题 2.8 设 f 满足(H_1), $u_0\in L_{\mathrm{loc}}^2$,则方程(2.3)具有一解

$$u\in C(\mathbb{R}^+,L_{\mathrm{loc}}^2)\cap L_{\mathrm{loc}}^2(\mathbb{R}^+,H_{\mathrm{loc}}^1)\cap L_{\mathrm{loc}}^{2\sigma+2}(\mathbb{R}^+,L_{\mathrm{loc}}^{2\sigma+2}),\tag{2.31}$$

具初值 $u(0)=u_0$,对任何 $\varphi\in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^+)$ 具有紧支集, $C_2<\infty$,并对 $t_1\geqslant0,t_2\geqslant0$, u 满足等式(2.10). 进一步 u 满足引理2.4和 2.7 的局部估计, $u\in L^\infty([t_0,\infty),L_{\mathrm{loc,un}}^2)$, $\forall t_0>0$.

证 设 $\Lambda_i,1\leqslant i<\infty$,为 R^n 中"盒子"的增加序列(例如可取 λ_i 为半径为 2^i 的球). 令 u_{0i} 为 u_0 限制在 Λ_i 上, u_i 为方程(2.3)具初值 u_{0i} 的命题 2.2 所得到的解. 让

$$X_j=L^\infty([0,2^j],L^2(\Lambda_j))\cap L^2([0,2^j),$$
$$H^1(\Lambda_j))\cap L^{2\sigma+2}([0,2^j],L^{2\sigma+2}(\Lambda_j)),$$

则由引理2.4,2.7,和假设(H_1),对固定的 j, $\{u_i\}_{i>j}$ 在X_j 中有界. 由紧性原理和对角线选取,从序列$\{u_i\}$中选出子序列使之在 X_j 中弱 * 收敛于某个 $u(\forall j)$,

$$u\in L_{\mathrm{loc}}^\infty(\mathbb{R}^+,L_{\mathrm{loc}}^2)\cap L_{\mathrm{loc}}^2(\mathbb{R}^+,H_{\mathrm{loc}}^1)\cap L_{\mathrm{loc}}^{2\sigma+2}(\mathbb{R}^+,L_{\mathrm{loc}}^{2\sigma+2}),$$

由标准的原理可知，u 满足(2.3)及初始条件 $u(0)=u_0$. 命题的最后提法来自引理 2.4 和引理 2.7.

现来证明在 L^2_{loc} 中解的惟一性.

选取特殊函数 $\varphi_0\in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^+)$, $0\leqslant\varphi_0(x)\leqslant 1$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$. 当 $|x|\leqslant 1$ 时，$\varphi_0(x)=1$；当 $|x|\geqslant 2$ 时，$\varphi_0(x)=0$. 以 τ_v 表示在 $\mathbb{R}^n$ 平移 v, $u\in L^2_{\mathrm{loc}}$.

定义

$$Y_k(u)=\sup_{|v|\leqslant k}\|(\tau_v\varphi_0)u\|_2^2. \tag{2.32}$$

命题 2.9 设 f 满足(H_1)和(H_2)，令

$$|\beta|<b\sqrt{2\sigma'+1}/\sigma', \tag{2.33}$$

让 $u_0\in L^2_{\mathrm{loc}}$. 如 $\sigma\leqslant 1$，设

$$Y_k(u_0)\leqslant A\exp(\exp Bk^2),\ \sigma=1, \tag{2.34}$$

$$Y_k(u_0)\leqslant A\exp(Bk^2),\ \sigma<1, \tag{2.35}$$

其中 A,B 为正常数，则方程(2.3)具初值 $u(0)=u_0$ 有惟一解 u,

$$u\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+,L^2_{\mathrm{loc}})\cap L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+,H^1_{\mathrm{loc}})\cap L^{2\sigma+2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+,L^{2\sigma+2}_{\mathrm{loc}}).$$

证 存在性由命题 2.8 和引理 2.3, 2.4 得证. 我们仅需证明惟一性. 设 u_1 和 u_2 为方程(2.3)具同一初值 u_0 的两个解，我们将证明 u_1-u_2 的 L^2 局部模为零. 设 $\varphi\in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^+)$，如同引理 2.3 相同的证明，$u_1,u_2$ 满足等式

$$\begin{aligned}&\partial_t\|\varphi(u_1-u_2)\|_2^2=2\gamma\|\varphi(u_1-u_2)\|_2^2\\&-2a\|\varphi\nabla(u_1-u_2)\|_2^2-4\mathrm{Re}(a+i\alpha)\langle(u_1-u_2)\nabla\varphi,\\&\varphi\nabla(u_1-u_2)\rangle-2\mathrm{Re}(b+i\beta)\langle\varphi(u_1-u_2),\\&\varphi(f(u_1)-f(u_2))\rangle.\end{aligned} \tag{2.36}$$

利用 Schwarz 不等式估计(2.36)右端第二项，第三项囿于

$$2a^{-1}(a^2+\alpha^2)\|(u_1-u_2)\nabla\varphi\|_2^2, \tag{2.37}$$

利用 $f(u_1)-f(u_2)=\int_0^1\{(u_1-u_2)(g(\rho)+g'(\rho)\rho$

$$+(\overline{u}-\overline{u}_2)u^2g'(\rho)\}\mathrm{d}\lambda, \tag{2.38}$$

其中 $u=\lambda u_1+(1-\lambda)u_2$, $\rho=|u|^2$, 可写(2.36)最后一项为

$$- 2\mathrm{Re}(b + i\beta)\int_{\rho}^{1} d_{\lambda}\int \varphi^{2}[\,|u_{1} - u_{2}|^{2}(g(\rho)$$
$$+ \rho g'(\rho) + (\overline{u}_{1} - \overline{u}_{2})^{2}u^{2}g'(\rho)]. \tag{2.39}$$

让 g 和β选取得使该项为负.事实上,如 $g(\rho) = \rho^{\sigma}$,在(2.39)积分中的幅角 θ 满足

$$|\sin\theta| \leqslant \sup \rho g'(\rho)[g(\rho) + \rho g'(\rho)]^{-1} = \sigma/(\sigma - 1), \tag{2.40}$$

整个表达式是负的,如果

$$|\arg(b + i\beta)| + \arcsin\left(\frac{\sigma}{\sigma - 1}\right) \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{2.41}$$

这等价于 $|\beta| \leqslant b\sqrt{2\sigma + 1}/\sigma$.

在更一般的假设(H_2)下,定义 ε 为

$$|\beta| \leqslant b\sqrt{2(\sigma' + \varepsilon) + 1}(\sigma' + \varepsilon)^{-1}. \tag{2.42}$$

由(2.6)可知 $\varepsilon > 0$,由(H_2),能分解 $g = g_{+} + g_{-}$,其中

$$\rho\,|g'(\rho)|\,[g_{+}(\rho) + \rho g'_{+}(\rho)]^{-1}$$
$$\leqslant (\sigma' + \varepsilon)(\sigma' + \varepsilon + 1)^{-1}, \forall \rho \in \mathbb{R}^{+}. \tag{2.43}$$

g_{-} 具有紧支集,$g_{-}(\rho) = 0, \rho \geqslant \rho_{0}, \rho_{0} \in \mathbb{R}^{+}$. g_{+} 的贡献是使(2.39)为负.用以前的原理,将 $\sigma' + \varepsilon$ 代替以前的σ,而 g_{-} 的贡献在于可为 F 式

$$2\,|b + i\beta|\,\sup\{|g_{-}(\rho)| + 2\rho\,|g'_{-}(\rho)|\}\,\|\varphi(u_{1} - u_{2})\|_{2}^{2} \tag{2.44}$$

所估计.将(2.37),(2.44)代入(2.36)可得

$$\partial_{t}\|\varphi(u_{1} - u_{2})\|_{2}^{2} \leqslant 2\gamma_{1}\|\varphi(u_{1} - u_{2})\|_{2}^{2}$$
$$+ 2a^{-1}(a^{2} + \alpha^{2})\|(u_{1} - u_{2})\nabla\varphi\|_{2}^{2}, \tag{2.45}$$

这里常数 γ_{1} 仅依赖于方程,不依赖 φ, u_{1}, u_{2}.在球的增加序列中,我们将用(2.45)去控制 $u_{1} - u_{2}$ 的 L^{2} 局部模.

设 $R_{0} > 0, 0 < r < 1, R_{j} = R_{0} + jr, 0 \leqslant j \leqslant k, k$ 为某正整数,令 $R = R_{k}, \varphi_{j}(1 \leqslant j \leqslant k)$ 定义如下:

$$\varphi_{j}(x) = 1,\ |x| \leqslant R_{j-1},$$
$$\varphi_{j}(x) = \varphi_{0}[x(r + |x| - R_{j-1})/r\,|x|],\ |x| \geqslant R_{j-1}.$$

因此当 $|x|$ 从 R_{j-1} 增加到 R_j 时，φ_j 从 1 变化到 0，进一步设

$$\varphi(x) = 1, x \in \operatorname{supp}\varphi_{j-1}(1 \leqslant j \leqslant k),$$

$$\|\nabla \varphi_j\|_\infty \leqslant r^{-1}\|\nabla \varphi_0\|_\infty.$$

让 x_j 为 $\{x : R_{j-1} \leqslant |x| \leqslant R_j\}$ 的特征函数，它含有 $\nabla \varphi_j$ 的交集. 定义

$$Q_j(t) = \|\varphi_j(u_1(t) - u_2(t))\|_2^2 \exp(-2r_1 t), \tag{2.46}$$

$$S_j(t) = \|x_j(u_1(t) - u_2(t))\|_2^2 \exp(-2r_1 t). \tag{2.47}$$

从(2.45)和前面的定义得

$$\partial_t Q_j(t) \leqslant C_5 r^{-2} S_j(t) \leqslant C_5 r^{-2} Q_{j+1}(t), \tag{2.48}$$

其中 $C_5 = 2a^{-1}(a^2 + \alpha^2)\|\nabla \varphi_0\|_\infty^2$，而 $Q_j(0) = 0$，$\forall j$. 因为 $u_1 - u_2|_{t=0} = 0$，(2.48) 对 t_j 积分($j = 1, 2, \cdots, k$)可得

$$Q_1(t) \leqslant \int C_5^k r^{-2k} S_k(t_k) \mathrm{d}_{t_1} \cdots \mathrm{d}_{t_k}$$

$$0 \leqslant t_k \leqslant \cdots \leqslant t_1 \leqslant t \leqslant C_5^k r^{-2k} \frac{t^k}{(k-1)!}\int_0^t \frac{1}{t} S_k(t')\mathrm{d}t'. \tag{2.49}$$

区域 $R_{k-1} \leqslant |x| \leqslant R_k$ 能为有限个半径为 1 的球所遮盖. 它的数目界于 $CR^{n-1}(r \leqslant 1)$，C 为绝对常数，于是

$$Q_1(t) \leqslant CR^{n-1} C_5^k r^{-2k} \frac{t^k}{(k-1)!}\int_0^t \frac{\mathrm{d}t'}{t} e^{-2rt'} Y_R(u_1(t') - u_2(t')). \tag{2.50}$$

对于固定的 R 和 R_0，(2.50) 中的积分与 k 无关，我们选取 k 使得因子

$$\frac{(C_5 r^{-2} t)^k}{(k-1)!} = \frac{[C_5(R - R_0)^{-2} t k^2]^k}{(k-1)!}$$

$$\leqslant k[C_5(R - R_0)^{-2} tke]^k$$

$$\leqslant k\exp^{(-k)} = \frac{(R - R_0)^2}{C_5 e^2 t}\exp\left[-\frac{(R - R_0)^2}{C_5 e^2 t}\right] \tag{2.51}$$

为近似极小，$k = (R - R_0)^2/(C_5 te^2)$. 运用引理 2.4，特别是 (2.18) 估计(2.50)的积分项，利用该引理对于平移 φ 的不变性可

得

$$Y_R(u_1(t') - u_2(t')) \leqslant 2\{Y_R(u_1(t')) + Y_R(u_2(t'))\}$$

$$\leqslant 4Y_R(u_0)\exp(C_3t')[1 + (Y_R(u_0)/C_4)^\sigma C_3\sigma t']^{-\frac{1}{\sigma}}, \quad (2.52)$$

这里常数 C_3 和 C_4 与 φ_0 有关.

将(2.51)(2.52)代入(2.50)可得基本估计

$$Q_1(t) \leqslant CR^{n-1}\frac{(R-R_0)^2}{(C_5e^2t)}\exp\left[-\frac{(R-R_0)^2}{C_5e^2t}\right]\exp[C_3t]$$

$$\times\int_0^t\frac{\mathrm{d}t'}{t}Y_R(u_0)[1 + (Y_R(u_0)/C_4)^\sigma C_3\sigma t']^{-\frac{1}{\sigma}}. \quad (2.53)$$

对 $\sigma > 1$,(2.53)右端最后积分可用 $Y_R(u_0)$ 一致估计

$$\int_0^t t^{-1}\mathrm{d}t'C_4(C_3\sigma)^{-\frac{1}{\sigma}}t'^{-\frac{1}{\sigma}} = C_4(C_3\sigma)^{-\frac{1}{\sigma}}\sigma(\sigma-1)^{-1}t^{-\frac{1}{\sigma}},$$

令 $R\to\infty$,R_0 固定,可得 $Q_1(t) = 0$, $\forall t > 0$,及一切 R_0,因此 $u_1 = u_2$.

对 $\sigma = 1$ 积分变成

$$\int_0^t t^{-1}\mathrm{d}t'Y_R(u_0)[1 + Y_R(u_0)C_2^{-1}C_3t']^{-1}$$

$$= C_4C_3^{-1}t^{-1}\log[1 + Y_R(u_0)C_4^{-1}C_3t]. \quad (2.54)$$

将(2.54)代入(2.53),令 $R\to\infty$,R_0 固定,对充分小的 t,有 $Q_1(t) = 0$. 因此 $u_1(t) = u_2(t)$ 对小的 t 成立(在假设(2.34)下),可直接延拓对任意 t 成立.

最后 $\sigma < 1$,积分可估计为

$$t^{-1}Y_R(u_0)[(Y_R(u_0)/C_4)^\sigma C_3\sigma]^{-1}\int_0^\infty \mathrm{d}_s(1+s)^{-\frac{1}{\sigma}}$$

$$= (1-\sigma)^{-1}C_4^\sigma C_3^{-1}t^{-1}[Y_R(u_0)]^{1-\sigma},$$

在假设(2.35)下,结果即得.

现考虑在 $L^r(r > 2)$ 中解的存在惟一性.

引理 2.10 设 f 满足(H_1), u 满足

$$u \in L^2_{\mathrm{loc}}(I, H^1_{\mathrm{loc}}) \cap L^{2\sigma+r}_{\mathrm{loc}}(I, L^{2\sigma+r}), \ |u|^k u \in L^2_{\mathrm{loc}}(I, H^1), \quad (2.55)$$

其中 $I \subset$ ，u 满足(2.3)，则 $u \in C(I, L^r)$ 且有等式

$$\int \mathrm{d}x H(\rho(t_2)) - \int \mathrm{d}x H(\rho(t_1)) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \{2\gamma \int \mathrm{d}x \rho h(\rho)$$

$$- 2b \int \mathrm{d}x \rho h(\rho) g(\rho) - 2\mathrm{Re}(a + i\alpha) \int \mathrm{d}x [(h(\rho)$$

$$+ \rho h'(\rho)] |\nabla u|^2 + h'(\rho)(\bar{u} \nabla u)^2\}(t), \tag{2.56}$$

这里 $\rho = |u|^2, \forall t_1, t_2 \in I, H(\rho) = \rho^{k+1}/k+1, h(\rho) = H^1(\rho) = \rho^k$.

证 等式(2.56)的微分形式为

$$\partial_t \int \mathrm{d}x H(\rho) = 2\gamma \int \mathrm{d}x \rho h(\rho) - 2b \int \mathrm{d}x \rho h(\rho) g(\rho)$$

$$- 2\mathrm{Re}(a + i\alpha) \int \mathrm{d}x [(h(\rho) + \rho h'(\rho)) |\nabla u|^2$$

$$+ h'(\rho)(\bar{u} \nabla u)^2], \tag{2.57}$$

可以由计算 $2\mathrm{Re}(h(\rho)u, (2.3))$ 和分部积分得到.

引理 2.11 设 f 满足(H_1)，α 满足

$$|\alpha|/a < \sqrt{2k+1}/k (\equiv 2\sqrt{r-1}/(r-2)). \tag{2.58}$$

若 u 为(2.3)的解，满足(2.55)，则 u 具有先验估计对应于空间，

$$u \in L^\infty(I, L^r) \cap L^{2\sigma+r}(I, L^{2\sigma+r}), \ |u|^k u \in L^2(I, H^1),$$

$$u(0) \in L^r. \tag{2.59}$$

证 首先注意到

$$\| |u|^k u : H^1 \|^2 = \|u\|_r^r + \|\nabla(|u|^k u)\|_2^2$$

$$\| |u|^k \nabla u \|_2 \leqslant \|\nabla(|u|^k u)\|_2$$

$$\leqslant (k+1) \| |u|^k \nabla u \|_2. \tag{2.60}$$

利用等式(2.56)的微分形式(2.57)有

$$(k+1)^{-1} \partial_t \|u\|_r^r = 2\gamma \|u\|_r^r - 2b \int \mathrm{d}x \rho^{k+1} g(\rho)$$

$$- 2a\varepsilon \| |u|^k \nabla u \|_2^2 - 2\mathrm{Re}(a + i\alpha) \int \mathrm{d}x [(k+1$$

$$- \varepsilon)\rho^k |\nabla u|^2 + k\rho^{k-1}(\bar{u} \nabla u)^2], \tag{2.61}$$

其中 $\varepsilon > 0$ 适当小，如同命题2.9的证明，(2.60)的最后积分是负，当

$$|\alpha|/\alpha \leqslant [(1-\varepsilon)(2k+1-\varepsilon)]^{\frac{1}{2}}/k, \tag{2.62}$$

特别在假设(2.58)下,ε 充分小,(2.61)右端的第一、二项能用 $L^{\infty}(L^r)$ 模控制,第三项能为模 $L^{2\sigma+r}(L^{2\sigma+r})$ 所控制(在假设(H_1)下),第四项能为 $|u|^k u$ 在 $L^2(H^1)$ 的模控制.

通过这个引理,可得到 L^r 解的存在性.

命题 2.12 设 f 满足(H_1),α 满足(2.58). $u_0 \in L^r$,则方程(2.3)具有一解

$$u \in C(\mathbb{R}^+, L^r) \cap L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+, H^1_{\text{loc}}) \cap L^{2\sigma+r}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+, L^{2\sigma+r}),$$
$$|u|^k u \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+, H^1),$$

且 $u(0) = u_0$,u 满足(2.56),$\forall\, t_1, t_2 \geqslant 0$.

证 这又是一个紧性的结果,分两步证明.设序列$\{\varepsilon_j\} \to 0$,例如 $\varepsilon_j = 2^{-j}$,考虑正则化方程

$$\partial_t u = \gamma u + (a+i\alpha)\Delta u - (b+i\beta)u g_{\varepsilon}(u), \tag{2.63}$$

这里 $g_{\varepsilon}(\rho) = g\left(\dfrac{\rho}{1+\varepsilon\rho}\right)$. 考虑$\{u_{0j}\}$在 $L^2 \cap L^{\infty}$ 中收敛于 u_0,在 L^r 中强收敛于 u_0,如同命题 2.2,我们证明对每个 j,方程(2.63)当 $\varepsilon = \varepsilon_j$, $u(0) = u_0$ 具有一解

$$u_j \in C(\mathbb{R}^+, L^2) \cap L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+, H^1). \tag{2.64}$$

由于 g 换成g_{ε},我们未知 $u \in L^{2\sigma+2}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+, L^{2\sigma+2})$. 另一方面,方程(2.3)可写成积分方程形式

$$u(t) = U(t)u_0 - (b+i\beta)\int_0^t \mathrm{d}t' U(t-t') f(u(t')), \tag{2.65}$$

其中 $U(t)$ 表示单参数群,它是线性方程

$$\partial_t u = \gamma u + (a+i\alpha)\Delta u \tag{2.66}$$

的解. $U(t) = \exp[\gamma t + (a+i\alpha)\Delta)$. $U(t)$ 的 L^{∞} 模对 t 一致有界,且 $u_{0j} \in L^{\infty}$,由(H_1)

$$g_{\varepsilon}(\rho) \leqslant C(1+\varepsilon^{-\sigma}) \tag{2.67}$$

对ρ一致成立. 由Gronwall不等式,$u_j \in L^{\infty}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+, L^{\infty})$. 连同

(2.64) 推出 $u_j \in L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, L^{2\sigma+r})$, $|u_j|^k u_j \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, H^1)$. 特别 u_j 满足引理 2.10 的假设(2.55), $g \to g_\varepsilon$. 我们得到一个先验估计一致对 j 成立. $u_j \in L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, L^r)$, $u_j \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, H^1)$ 且

$$\tilde{u}_j = u_j(1 + \varepsilon_j |u_j|^2)^{-\sigma/(2\sigma+r)} \in L^{2\sigma+r}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, L^{2\sigma+r}).$$

进一步由 $u_0 \in L^r$ 推出 $u_0 \in L^2_{\mathrm{loc}}$, 因此由引理 2.7 可得先验估计. 对于一致有 $u_j \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, H^1_{\mathrm{loc}})$. 由标准的紧性原理, 能从 $\{u_j\}$ 中选取一子序列(仍记为 $\{u_j\}$), 使得依弱 * 意义下收敛于某个 $u \in L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, L^r) \cap L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, H^1_{\mathrm{loc}})$. 而 $|u_j|^k u_j$ 收敛于某个函数 $v_1 \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, H^1)$, $u_j g_{\varepsilon_j}(|u_j|^2)$ 收敛于某个 $v_2 \in L^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, L^s)$, $s = (2\sigma + r)/(2\sigma + 1)$.

进一步 u 满足方程

$$\partial_t u = \gamma u + (a + i\alpha)\Delta u - (b + i\beta) v_2,$$

其余的证明是标准的. 特别从第一个收敛性推出 u_j 的子序列几乎处处点 ε 收敛, 因此 $v_1 = |u|^k u$, $v_2 = f(u)$ 等.

引理 2.13 设 f 满足(H_1), u 满足方程(2.3), 且

$$u \in L^2_{\mathrm{loc}}(I, H^1_{\mathrm{loc}}) \cap L^{2\sigma+r}_{\mathrm{loc}}(I, L^{2\sigma+r}_{\mathrm{loc}}), \quad |u|^k u \in L^2_{\mathrm{loc}}(I, H^1_{\mathrm{loc}}), \tag{2.68}$$

则 $u \in C(I, L^r_{\mathrm{loc}})$, 且对任意 $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ 具有紧支集, u 满足等式

$$\begin{aligned}\int \varphi^2 H(\rho(t_2)) - \int \varphi^2 H(\rho(t_1)) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \{ 2\gamma \int \varphi^2 \rho h(\rho) \\ - 2b \int \varphi^2 h(\rho) g(\rho) - 2\mathrm{Re}(a + i\alpha) \int \varphi^2 [(h(\rho) \\ + \rho h'(\rho)) |\nabla u|^2 + h'(\rho)(\overline{u} \nabla u)^2] \\ - 4\mathrm{Re}(a + i\alpha) \langle u h(\rho) \nabla \varphi, \varphi \nabla u \rangle \}(t),\end{aligned} \tag{2.69}$$

$\forall t_1, t_2 \in I$.

证(提要) 等式(2.69) 的微分形式为

$$\partial_t \int \varphi^2 H(\rho) = 2\gamma \int \varphi^2 \rho h(\rho) - 2b \int \varphi^2 \rho h(\rho) g(\rho)$$

$$- 2\mathrm{Re}(a + i\alpha) \int \varphi^2 [(h(\rho) + \rho h'(\rho)) |\nabla u|^2 + h'(\rho)(\overline{u} \nabla u)^2]$$

$$-4\mathrm{Re}(a+i\alpha)\langle uh(\rho)\nabla\varphi,\varphi\nabla u\rangle, \tag{2.70}$$

可由计算 $2\mathrm{Re}\langle\varphi h(\rho)u,\varphi(2.3)\rangle$ 得到,其余证明是类似的.

现利用等式(2.69)去得到局部模的先验估计,定义 ε 为

$$|\alpha|/a=[(1-\varepsilon)(2k+1-\varepsilon)]^{\frac{1}{2}}/k, \tag{2.71}$$

$0<\varepsilon<1$,在条件(2.58)下,设 $\varphi\in C^1(R^n,R)$ 具有紧支集,令

$$C_1=\|\varphi\|_2^{2\sigma/(\sigma+k+1)},$$

$$C_2=\left\{\int\varphi^{-2(k+1)/\sigma}|\nabla\varphi|^{2(\sigma+k+1)/\sigma}\right\}^{\sigma/(\sigma+k+1)}, \tag{2.72}$$

$$C_3=2\{\gamma+(a\varepsilon)^{-1}(a^2+\alpha^2)C_2/C_1\},$$

$$C_4=C_1\left(\frac{C_1C_3}{2b}\right)^{(k+1)/\sigma}=\|\varphi\|_2^2\left(\frac{C_3}{2b}\right)^{(k+1)/\sigma}. \tag{2.73}$$

如 φ 在它的零点处具有充分高的光滑性,则这些常数是有限的,且对 φ 的平移是不变的,令

$$y(t)=\int\mathrm{d}x\varphi^2|u(t)|^r=\int\mathrm{d}x\varphi^2\rho^{k+1}. \tag{2.74}$$

引理 2.14 设 f 满足(H_1),α 满足(2.58),u 为方程(2.3)的解满足(2.68). $I=[0,T)$,φ,$C_i(i=1,\cdots,4)$,$y(t)$ 如前所定义,则

(1) 如 $y(0)\leqslant C_4$,有 $y(t)\leqslant C_4$,$\forall t\in I$,

(2) 若 $y(0)>C_4$,有 $y(t)\leqslant\bar{y}(t)$,$\forall t\in I$,

其中

$$\bar{y}(t)=y(0)\left\{\exp(-C_3\sigma t)-\left(\frac{y(0)}{C_4}\right)^{\sigma/(k+1)}\cdot[1-\exp(-C_3\sigma t)]\right\}^{\frac{-(k+1)}{\sigma}}. \tag{2.75}$$

特别地,$\bar{y}(t)$ 指数减少到 C_4 且

$$\bar{y}(t)\leqslant C_4[1-\exp(-C_3\sigma t)]^{-(k+1)/\sigma}, \tag{2.76}$$

$\forall t>0$,且对 $y(0)$ 一致成立.

证 首先定义

$$z=z(t)=\left\{\int\varphi^2\rho^{\sigma+k+1}\right\}^{(k+1)/(\sigma+k+1)}, \tag{2.77}$$

由 Hölder 不等式

$$y(t) \leqslant C_1 z(t). \tag{2.78}$$

考虑(2.70),并估计它的右端,第一项估计为 $2\gamma y(t)$,第二项估计为

$$-2b\int \varphi^2 \rho h(\rho) g(\rho) \leqslant -2bz^{(1+\sigma)/(k+1)}, \tag{2.79}$$

最后一项由 Schwarz 不等式估计为

$$\begin{aligned} -4\mathrm{Re}(a+i\alpha)\langle uh(\rho)\nabla\varphi, \varphi\nabla u\rangle &\leqslant 2a\varepsilon\int \varphi^2 h(\rho) \mid \nabla u \mid^2 \\ &+ 2(a\varepsilon)^{-1}(a^2+\alpha^2) \times \int \mid \nabla\varphi \mid^2 \rho h(\rho). \end{aligned} \tag{2.80}$$

(2.80) 右端的第一项连同(2.70) 最后一项有

$$\begin{aligned} -2\mathrm{Re}(a+i\alpha)\int \varphi^2\rho^k[&(k+1-\varepsilon)\rho^k \mid \nabla u \mid^2 \\ &+ k\rho^{k-1}(\overline{u}\nabla u)^2]. \end{aligned} \tag{2.81}$$

由于(2.71) 式 α 的选取,使它为负.(2.80) 最后积分由 Hölder 不等式可估计为

$$\int \mid \nabla\varphi \mid^2 \rho h(\rho) = \int \mid \nabla\varphi \mid^2 \rho^{k+1} \leqslant C_2 z, \tag{2.82}$$

其中 C_2 和 z 分别由(2.72)(2.77) 所定义,将(2.79)—(2.81) 代入(2.70) 得

$$\partial_t y \leqslant \gamma\{\gamma y + (a\varepsilon)^{-1}(a^2+\alpha^2)C_2 z - bz^{(1+\sigma)/(k+1)}\}, \tag{2.83}$$

类似于引理 2.4 可得引理结论.

引理 2.15 设 f, α, u 和 φ 满足引理 2.14 假设,则 u 满足估计

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \{a\varepsilon \parallel \varphi \mid u \mid^k \nabla u \parallel_2^2 + 2b\int \varphi^2 \mid u \mid^r g(\mid u \mid^2)\} \\ &\leqslant (k+1)^{-1}\left\{\int \varphi^2 \mid u(t_1) \mid^r - \int \varphi^2 \mid u(t_2) \mid^r\right\} - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \\ &\quad \left\{2\gamma\int \varphi^2 \mid u(t) \mid^r + 4(a\varepsilon)^{-1}(a^2+\alpha^2)\int \mid \nabla\varphi \mid^2 \mid u(t) \mid^r\right\}. \\ &\qquad \forall t_1, t_2 \in I, t_1 \leqslant t_2. \end{aligned} \tag{2.84}$$

证 证明来自(2.70),Schwarz 不等式(2.80),(2.81)的负性.(2.84)右端仅含局部 L^r 模,可由引理 2.14 控制,其中第二个积分 u 的 $L^{2\sigma+r}_{loc}(I,L^{2\sigma+r}_{loc})$ 模由假设(H_1)进行控制.

命题 2.16 设 f 满足(H_1),α 满足(2.71),设 $u_0\in L^r_{loc}$,则方程(2.3)具有一解

$$u\in C(\mathbb{R}^+,L^r_{loc})\cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+,H^1_{loc})\cap L^{2\sigma+r}_{loc}(\mathbb{R}^+,L^{2\sigma+r}_{loc}),$$
$$|u|^k u\in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+,H^1_{loc}),\tag{2.85}$$

$u(0)=u_0$.对任何 $\varphi\in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ 具有紧支集且 $C_2<\infty$,对任何 $t_1,t_2\geqslant 0$,满足(2.70).进一步,u 满足引理 2.14 和引理 2.15 的局部估计,$u\in L^\infty([t_0\ \infty),L^r_{loc,un}),\forall t_0>0$.

证 这又是一个紧性的结果,类似于命题 2.8 的证明,再设 $\{\Lambda_i\}$ 为一系列"盒子"增加到 $\mathbb{R}^n$,设 u_{0i} 为 u_0 限制到 Λ_i,u_i 为方程(2.3)具初值 u_{0i} 的由命题 2.12 得到的解,由引理 2.7,引理 2.14 和引理 2.15,对固定的 j、序列 $\{u_i\}_{i>j}$ 在空间

$$X_j=L^\infty([0,2^j],L^r(\Lambda_j))\cap L^2([0,2^j],H^1(\Lambda_j)]$$
$$\cap L^{2\sigma+r}([0,2^j],L^{2\sigma+r}(\Lambda_j))$$

中是有界的,序列 $\{|u_i|^k u_i\}_{i>j}$ 在 $L^2([0,2^j],H^1(\Lambda_j))$ 中是有界的.由紧性原理和对角线选取,能从序列 $\{u_i\}$ 选取一个子序列(仍记为 $\{u_i\}$)在 $X_j(\forall j)$ 弱 * 收敛于某个 u,且

$$u\in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+,L^2_{loc})\cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+,H^1_{loc})\cap L^{2\sigma+r}_{loc}(\mathbb{R}^+,L^{2\sigma+r}_{loc}),$$

而子序列 $\{|u_i|^k u_i\}$ 弱收敛于某个 $v\in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+,H^1_{loc})$,由标准的原理,$u$ 满足方程(2.3),$v=|u|^k u$.这最后的论述来自引理 2.13—引理 2.15.

现在整体空间上作 H^1 解的存在性.

引理 2.17 设 f 满足(H_1).令

$$u\in L^2_{loc}(I,H^2)\cap L^{4\sigma+2}_{loc}(I,L^{4\sigma+2}),I\subset\mathbb{R},\tag{2.86}$$

u 满足方程(2.3),则 $u\in C(I,H^1\cap L^{2\sigma+2})$ 且满足等式

$$\|\nabla u(t_2)\|_2^2-\|\nabla u(t_1)\|_2^2$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \{ 2\gamma \| \nabla u \|_2^2 - 2a \| \Delta u \|_2^2$$

$$- 2\mathrm{Re}(b + i\beta) \langle f(u), \Delta u \rangle \}(t), \tag{2.87}$$

$$\int \mathrm{d}x G(|u(t_2)|^2) - \int \mathrm{d}x G(|u(t_1)|^2)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \{ 2\gamma \int \mathrm{d}x |u|^2 g(|u|^2) - 2b \| f(u) \|_2^2$$

$$+ 2\mathrm{Re}(a + i\alpha) \langle f(u), \Delta u \rangle \}, \forall t_1, t_2 \in I. \tag{2.88}$$

证　等式(2.87)的微分形式为

$$\partial_t \| \nabla u \|_2^2 = 2\gamma \| \nabla u \|_2^2 - 2a \| \Delta u \|_2^2$$

$$- 2Re(b + i\beta) \langle f(u), \Delta u \rangle, \tag{2.89}$$

它是由计算 $2\mathrm{Re}(\nabla u, \nabla(2.3))$ 得到的.类似,等式(2.88)的微分形式为

$$\partial_t \int \mathrm{d}x G(|u|^2) = 2\gamma \int \mathrm{d}x |u|^2 g(|u|^2) - 2 \| f(u) \|_2^2$$

$$+ 2\mathrm{Re}(a + i\alpha) \langle f(u), \Delta u \rangle, \tag{2.90}$$

它是由计算 $2\mathrm{Re}(f(u),(2.3))$ 得到的,类似于引理 2.1 的证明可得.

引理 2.18　设 f 满足(H_1)和(H_2),α,β满足或者$\alpha\beta \geqslant 0$或者

$$(|\alpha\beta| - ab)(|\alpha| b + |\beta| a)^{-1} \leqslant \sqrt{2\sigma' + 1}/\sigma'. \tag{2.91}$$

设 u 为方程(2.3)的解,满足(2.86),则 u 可先验估计在空间

$$L^\infty(I, H^1 \cap L^{2\sigma+2}) \cap L^2(I, H^2) \cap L^{4\sigma+2}(I, L^{4\sigma+2})$$

中,$u(0) \in H^1 \cap L^{2\sigma+2}$.

证　定义

$$K = \| \nabla u \|_2^2, K_1 = \| \Delta u \|_2^2, \tag{2.92}$$

$$P = \int \mathrm{d}x G(|u|^2), P_1 = \| f(u) \|_2^2, \tag{2.93}$$

$$z = \langle f(u), \Delta u \rangle. \tag{2.94}$$

由 Schwarz 不等式有

$$|z|^2 \leqslant K_1 P_1. \tag{2.95}$$

证明基于等式(2.87)和(2.88). 为简单计,可用微分形式(2.89)和(2.90),再利用符号(2.92)—(2.94)有

$$\partial_t K = 2\gamma K - 2aK_1 - 2\mathrm{Re}(b + i\beta)z, \tag{2.96}$$

$$\partial_t P = 2\gamma\int \rho g(\rho) - 2bP_1 + 2\mathrm{Re}(a + i\alpha)z, \tag{2.97}$$

其中 $\rho = |u|^2$, 我们现在寻求(2.96), (2.97)凸的组合. 利用(2.95)和假设(H_2)使右端中的 z 被吸取到负项中去,设 $0 < \lambda < 1$,则

$$\begin{aligned}\partial_t[\lambda aK + (1-\lambda)bp] &= 2\gamma\left[\lambda aK + (1-\lambda)b\int\rho g(\rho)\right] \\ &\quad - 2[\lambda a^2 K_1 + (1-\lambda)b^2 p_1] + 2\mathrm{Re}[ab - i(\lambda\beta a - (1-\lambda)\alpha b)]z \\ &\leqslant 2\gamma\left[\lambda aK + (1-\lambda)b\int\rho g(\rho)\right] - 2\varepsilon[\lambda a^2 K_1 + (1-\lambda)b^2 p_1] \\ &\quad - 4(1-\varepsilon)\sqrt{\lambda(1-\lambda)}ab|z| + 2\mathrm{Re}[ab - i(\lambda\beta a - (1-\lambda)\alpha b)]z,\end{aligned} \tag{2.98}$$

其中 $\varepsilon > 0$ 为小参数待定. 我们有(2.95),由(H_2)分解 g 为 $g = g_+ + g_-, \rho\in R^+, g_-(\rho) = 0, \rho \geqslant \rho_0$. 相应分解 $z = z_+ + z_-$. 在(2.98)中最后二项欲使 z_- 的贡献使之为负,为此再写 z_- 如下

$$\begin{aligned}z_- = \int \mathrm{d}x g_-(\rho)\bar{u}\Delta u &= -\int \mathrm{d}x\{[g_+(\rho) + \rho g'_-(\rho)]|\nabla u|^2 \\ &\quad + g'_+(\rho)(\bar{u}\nabla u)^2\}.\end{aligned} \tag{2.99}$$

从(2.43)可知(2.96)积分中的 θ 辐角满足

$$0 \leqslant |\theta| \leqslant \zeta \equiv \arcsin(\sigma' + \varepsilon)(\sigma' + \varepsilon + 1)^{-1}, \tag{2.100}$$

因此由积分可得

$$\pi - \zeta < \arg z_- < \pi + \zeta, \tag{2.101}$$

于是

$$\mathrm{Re}z_- \leqslant -|z_-|\cos\zeta, \quad |\mathrm{Im}z_-| \leqslant |z_-|\sin\zeta. \tag{2.102}$$

代入(2.98)最后二项,由于 z_- 的贡献得

$$\begin{aligned}(2.98)\text{的左端} \leqslant 2|z_-|\{&-ab\cos\zeta + 2(1-\varepsilon)\sqrt{\lambda(1-\lambda)} \\ &+ \sin\zeta|\lambda\beta a - (1-\lambda)\alpha b|\},\end{aligned} \tag{2.103}$$

我们要使上式最后括号为负.

若 $\alpha\beta \geqslant 0$，则易于做到，例如取

$$\lambda = \max(|\alpha| b, ab \operatorname{cotg}\zeta)\{\max(|\alpha| b, ab \operatorname{cotg}\zeta) + \max(|\beta| a, ab \operatorname{cotg}\zeta)\}^{-1}.$$

若 $\alpha\beta < 0$，最优的 λ 的取 $\lambda = \cos^2\theta, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. 在(2.103)中的括号变为

$$- ab\cos\zeta - ab(1-\varepsilon)\sin 2\theta + \frac{1}{2}\sin\zeta |\beta a - \alpha b| = \frac{1}{2}\sin\zeta(\beta a + \alpha b)\cos 2\theta. \tag{2.104}$$

最优的办法是取向量 $(\sin 2\theta, \cos 2\theta)$ 与 $(ab(1-\varepsilon), \frac{1}{2}\sin\zeta(\beta a + \alpha b))$ 共线，(2.104) 为负归结为选取

$$- ab\cos\zeta - \frac{1}{2}\sin\zeta |\beta a - \alpha b| \leqslant \{a^2b^2(1-\varepsilon)^2 + \frac{1}{2}\sin^2\zeta(\beta a + \alpha b)^2\}^{\frac{1}{2}}. \tag{2.105}$$

等价地，由基本运算得

$$|\alpha\beta| - |\beta a - \alpha b| \operatorname{cotg}\zeta - ab \leqslant -(2\varepsilon - \varepsilon^2)ab/\sin^2\zeta, \tag{2.106}$$

它在(2.91)假设下能得到保证，此时 ε 充分小.

在所有情况下，适当选取 λ 和 ε，我们能得到如下形式的估计

$$\partial_t[\lambda a K + (1-\lambda) b p] \leqslant C[\lambda a K + (1-\lambda) b p] - 2\varepsilon[\lambda a^2 K_1 + (1-\lambda) b^2 p_1],$$

连同假设(H_1)推出要求的积分估计.

引理 2.19 设 f 满足(H_1)和(H_3)，$\sigma'(n-2) < 2$. 如 $n\sigma' > 2$，令 α 满足

$$|\alpha| / a < 2\sqrt{n\sigma' - 1}/(n\sigma' - 2). \tag{2.107}$$

若 u 为方程(2.3)的解且满足(2.86)，则 u 具有先验估计于如下空间

$$L^\infty(I, H^1) \cap L^2(I, H^2) \cap L^{4\sigma+2}(I, L^{4\sigma+2}), u(0) \in H^1.$$

证 对任何 $r, 2 \leqslant r \leqslant \infty$. 定义 $\delta(r) = \frac{n}{2} - \frac{n}{r}$，$H^1$ 亚临界

条件 $\sigma'(n-2)<2$ 等价于

$$(0\leqslant)\delta\equiv\delta(2\sigma'+2)\equiv\frac{n}{2}-\frac{n}{(2\sigma'-2)}<1. \quad (2.108)$$

我们首先在 $L^{\infty}(I,H^1)\cap L^2(I,H^2)$ 中估计 u. 从(2.96) 和(2.99),再写 z 为

$$z=-\int\mathrm{d}x\{[g(\rho)+\rho g'(\rho)]\mid\nabla u\mid^2+g'(\rho)(\overline{u}\nabla u)^2\},\quad (2.109)$$

利用假设(H_3),估计 z 为

$$\begin{aligned}\mid z\mid&\leqslant CK+C\|\mid u\mid^{2\sigma}\mid\nabla u\mid^2\|_1\\&\leqslant CK+C\|u\|_{2\sigma'+2}^{2\sigma}\|\nabla u\|_{2\sigma'+2}^{2},\end{aligned}\quad (2.110)$$

由 Hölder 不等式

$$\mid z\mid\leqslant CK+C\|u\|_{2\sigma'+2}^{2\sigma'}K^{1-\delta}K_1^{\delta},\quad (2.111)$$

由 Sobolev 不等式

$$\|v\|_{2\sigma'+2}\leqslant C\|v\|_2^{1-\delta}\|\nabla v\|_2^{\delta},\quad (2.112)$$

应用于 ∇u,将(2.111) 代入(2.96) 并利用基本不等式

$$K_1^{\delta}M\leqslant a\delta K_1+(1-\delta)(Ma^{-\delta})^{\frac{1}{1-\delta}},\quad (2.113)$$

其中 $M>0,a>0,0<\delta<1$,可得

$$\partial_t K\leqslant CK-aK_1+C\|u\|_{2\sigma'+2}^{2\sigma'/(1-\delta)}K\equiv-aK_1+C_1(t)K,\quad (2.114)$$

这里

$$C_1(t)=C[1+\|u\|_{2\sigma'+2}^{2\sigma'/(1-\delta)}].\quad (2.115)$$

由(2.114) 积分得

$$\begin{aligned}K(t)+a\int_0^t\mathrm{d}t'K_1(t')\exp[m(t)-m(t')]\\\leqslant K(0)\exp[m(t)],\end{aligned}\quad (2.116)$$

其中

$$m(t)=\int_0^t\mathrm{d}t'C_1(t').\quad (2.117)$$

为得到 u 在 $L^{\infty}(I,H^1)\cap L^2(I,H^2)$ 的估计. 必须对 $C_1(t)$

的积分进行估计. 分两种情况: $n\sigma' \leqslant 2$ 和 $n\sigma' > 2$.

若 $n\sigma' \leqslant 2$,则由(2.112)得

$$\| u \|_{2\sigma+2}^{2\sigma'/(1-\delta)} \leqslant C \| u \|_2^{2\sigma'} K^{\sigma'\delta/(1-\delta)}. \qquad (2.118)$$

L^2 亚临界条件 $n\sigma' \leqslant 2$ 等价于 $(\sigma'+1)\delta \leqslant 1$,即 $\sigma'\delta/(1-\delta) \leqslant 1$. 由(2.115)和(2.118)得

$$C_1(t) \leqslant C[1 + \| u \|_2^{2\sigma'}(1+K)], \qquad (2.119)$$

$C_1(t)$ 的积分作为 $\| u(0) \|_2$ 的估计来自(2.14)关于 u 在 $L^\infty(I, L^2) \cap L^2(I, H^1)$ 的整个估计.

如 $\sigma'(n-2) < 2 < n\sigma'$,令 $r \equiv 2k+2$ 使得 $0 < \delta(r) < 1$,有

$$|\alpha|/\alpha < \sqrt{2k+1}/k \equiv 2\sqrt{r-1}/(r-2).$$

最后选取 $r = n\sigma'$,因为 $2 < n\sigma' < 2n/(n-2)$,显然满足那些条件,即等价于 $0 < \delta(n\sigma') < 1$,(2.58)归结为(2.107),条件 $0 < \delta(r) < 1$ 推出 $H^1 \subset L^r$,因此由引理 2.11,我们知道 u 作为模 $\| u(0) : H^1 \|$ 的先验估计对应于(2.59).

若 $r \geqslant (2\sigma'+2)$,我们估计 $\| u \|_{2\sigma'+2}$ 作为 $\| u \|_2$ 和 $\| u \|_r$ 的项,要求估计 $C_1(t)$ 的积分来自引理 2.11 和 $L^\infty(L^2)$ 估计.

如 $r \leqslant (2\sigma'+2)$,我们估计

$$\| u \|_{2\sigma'+2}^{2\sigma'/(1-\delta)} = \| |u|^k u \|_s^{2\sigma'/(k+1)(1-\delta)},$$

其中 $s = (2\sigma'+2)/(k+1)$,因此 $0 < \delta(s) < 1$.

$$\| u \|_{2\sigma'+2}^{2\sigma'/(1-\delta)},$$

$$\leqslant C \| u \|_r^{2\sigma'(1-\delta(s))/(1-\delta)} \| \nabla |u|^k u \|_2^{2\sigma'\delta(s)/(k+1)(1-\delta)},$$

由基本 Sobolev 不等式,如 $\sigma'\delta(s) < (k+1)(1-\delta)$,则

$$\| u \|_{2\sigma'+2}^{2\sigma'/(1-\delta)}, \leqslant C \| u \|_r^{2\sigma'[1-\delta(s)]/(1-\delta)} (1 + \| \nabla |u|^k u \|_2^2). \qquad (2.120)$$

$\sigma'\delta(s) \leqslant (k+1)(1-\delta)$ 等价于

$$\sigma' \frac{n}{r} - \sigma' \frac{n}{2\sigma'+2} \leqslant 1 - \frac{n}{2} + \frac{n}{2\sigma'+2},$$

即 $n\sigma' \leqslant r$. 此时要求的 $C_1(t)$ 估计来自(2.115)和(2.120),以及引理 2.11.

现来估计 $u \in L^{4\sigma+2}(I, L^{4\sigma+2})$. 由$(H_1)$，充分估计 $f(u) \in L^2(I, L^2)$，积分(2.97)，由 Schwarz 不等式(2.95) 和对时间的 Schwarz 不等式可估计 z 的积分.

$$P(t) - P(0) \leqslant 2\gamma\int_0^t dt'\int \rho g(\rho)(t') - 2b \| f(u): L^2([0,t], L^2) \|^2 + 2 | a + i\alpha | \| f(u): L^2([0,t], L^2) \| \| \Delta u: L^2([0,t], L^2) \|, \tag{2.121}$$

因此

$$P(t) + b \| f(u): L^2([0,t], L^2) \|^2 \leqslant P(0) + 2\gamma\int_0^t dt'\int \rho g(\rho)(t') + b^{-1}\rho^2(a^2 + \alpha^2) \| \Delta u: L^2([0,t], L^2) \|^2. \tag{2.122}$$

由此即得估计 $u \in L^{4\sigma+2}(I, L^{4\sigma+2})$.

命题 2.20 设 f 满足(H_1)，附加条件

(ⅰ) f 满足(H_2)，α, β 满足 $\alpha\beta \geqslant 0$ 或(2.91)，或者

(ⅱ) f 满足(H_2)，$\sigma'(u - 2) < 2$，α 满足(2.107)，$n\sigma' > 2$.

设 $u_0 \in H^1 \cap L^{2\sigma+2}$，则方程(2.3) 具有解

$$u \in C(\mathbb{R}^+, H^1 \cap L^{2\sigma+2}) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, H^2) \cap L^{4\sigma+2}_{loc}(\mathbb{R}^+, L^{4\sigma+2}), \tag{2.123}$$

$u(0) = u_0$，并且 u 满足(2.10)，(2.87)，(2.88)，以及引理2.18和2.19的估计.

证(摘要) 这又是一个紧性的结果，但它不能用 Galerkin 方法，因为方程(2.3) 正则化由有限维投影不适合引理 2.18、引理 2.19 在 R^n 中的估计.我们采用卷积方法使方程(2.3) 正则化，对于一个典型的函数 u 定义在$\mathbb{R}^n$的置换为$\eta * u$，η为δ函数的逼近函数. 例如 $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$，$\eta$ 具有紧支集，η 是偶函数，$\int \eta(x)dx = 1$. 定义：$\eta_j(x) = j^n\eta(jx)$，$j \geqslant 1$. 取 $\eta = \eta_j$，令 $j \to \infty$. 对 η 的卷积在$L^r(1 \leqslant r \leqslant \infty)$ 和 H^s(任何 $s \in \mathbb{R}$) 是压缩的，并在 $L^r(1 \leqslant r \leqslant \infty)$ 和 H^s 中强收敛于单位算子.

置换(2.3)为

$$\partial_t u = \gamma u + (a + i\alpha)\Delta u - (b + i\beta)\eta * f(\eta * u), \quad (2.124)$$

正则化初值

$$u(0) = \eta * u_0. \quad (2.125)$$

在假设 $f \in C^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ 下,容易看到由 $C(L^2)$ 压缩方法可得 Cauchy 问题(2.124),(2.125)具有惟一局部解 $u_\eta \in C^1(H^N)$, $\forall N \in \mathbb{N}$. 类似于引理 2.1 的计算,解满足微分形式等式

$$\partial_t \| u_\eta \|_2^2 = 2\gamma \| u_\eta \|_2^2 - 2a \| \nabla u_\eta \|_2^2 - 2b\int \rho_\eta g(\rho_\eta), \quad (2.126)$$

这里 $\rho_\eta = |\eta * u_\eta|^2$. 因此 $u_\eta \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(L^2) \cap L^2_{\mathrm{loc}}(H^1)$,由标准的整体化原理推出 u_η 对一切 $t \geqslant 0$ 连续. 如同引理(2.17)的计算,可知 u_η 满足类似的微分等式

$$\partial_t K = 2\gamma K - 2aK_1 + 2\mathrm{Re}(b + i\beta) z_\eta, \quad (2.127)$$

$$\partial_t P_\eta = 2\gamma \int \rho_\eta g(\rho_\eta) - 2bP_{1\eta} + 2\mathrm{Re}(a + i\alpha) z_\eta, \quad (2.128)$$

其中

$$K = K(u_\eta) = \| \nabla u_\eta \|_2^2, K_1 = K_1(u_\eta) = \| \Delta u_\eta \|_2^2,$$

$$P_\eta = P(\eta * u_\eta) = \int G(|\eta * u_\eta|^2), P_{1\eta} = \| \eta * f(\eta * u_\eta) \|_2^2,$$

$$z_\eta = z(\eta * u_\eta) = \langle \eta * f(\eta * u_\eta), \Delta u_\eta \rangle.$$

特别有 $|z_\eta|^2 \leqslant K_1 P_{1\eta}$. 引理(2.18)和引理(2.19)的证明能提供 $u_\eta \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, H^1) \cap L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, H^2)$ 关于 η 一致的先验估计,以及由(H_1)可得 $\eta * u_\eta \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, L^{2\sigma+2})$, $\eta * f(\eta * u_\eta) \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, L^2)$ 的估计. 再取序列 $\{\eta_j\}$ 趋于 δ,由标准的紧性原理知 u_η 在 $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, H^1) \cap L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, H^2)$ 中弱 * 收敛. $\eta * u_\eta$ 在 $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, L^{2\sigma+2})$ 中弱 * 收敛于 $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, H^1 \cap L^{2\sigma+2})$,而 $f(\eta * u_\eta)$ 在 $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, L^{(2\sigma+2)/(2\sigma+1)})$ 中弱 * 收敛, $\eta * f(\eta * u_\eta)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^+, L^2)$ 中弱 * 收敛于 $v \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, L^{(2\sigma+2)/(2\sigma+1)}) \cap L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, L^2)$. 因此, u, v 满足

$$i\partial_t u = \gamma u + (a + i\alpha)\Delta u - (b + i\beta)v.$$

由于 $\eta * u_\eta$ 点态收敛于 u，易证 $v = f(u)$，命题证毕.

现考虑 H^1 解在局部空间上的存在性和估计.

引理 2.21 设 f 满足(H_1)，令

$$u \in L^2_{\mathrm{loc}}(I, H^2_{\mathrm{loc}}) \cap L^{4\sigma+2}_{\mathrm{loc}}(I, L^{4\sigma+2}_{\mathrm{loc}}), I \subset \mathbb{R},$$

设满足方程(2.3)，则有

$$u \in C(I, H^1_{\mathrm{loc}} \cap L^{2\sigma+2}_{\mathrm{loc}}),$$

且对任何 φ，u 满足等式

$$\begin{aligned}\|\varphi\nabla u(t_2)\|_2^2 - \|\varphi\nabla u(t_1)\|_2^2 = \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\{2\gamma\|\varphi\nabla u\|_2^2 \\ - 2a\|\varphi\Delta u\|_2^2 - 4\mathrm{Re}(a + i\alpha)\langle\nabla\varphi\nabla u, \varphi\Delta u\rangle \\ - 2\mathrm{Re}(b + i\beta)\langle\varphi\nabla f(u), \varphi\nabla u\rangle\},\end{aligned} \tag{2.129}$$

$$\begin{aligned}&\int\mathrm{d}x\varphi^2 G(|u(t_2)|^2) - \int\mathrm{d}x\varphi^2 G(|u(t_1)|^2) \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\left\{2\gamma\int\mathrm{d}x\varphi^2|u|^2 g(|u|^2) - 2b\|\varphi f(u)\|_2^2\right. \\ &\quad \left.+ 2\mathrm{Re}(a + i\alpha)\langle\varphi f(u), \varphi\Delta u\rangle\right\},\end{aligned} \tag{2.130}$$

$\forall t_1, t_2 \in I$.

证(摘要) 等式(2.129)的微分形式为

$$\begin{aligned}\partial_t\|\varphi\nabla u\|_2^2 = 2\gamma\|\varphi\nabla u\|^2 - 2a\|\varphi\Delta u\|_2^2 - 4\mathrm{Re}(a + i\alpha) \\ \langle\nabla\varphi\nabla u, \varphi\Delta u\rangle - 2\mathrm{Re}(b + i\beta)\langle\varphi\nabla f(u), \varphi\nabla u\rangle,\end{aligned} \tag{2.131}$$

它可从 $2\mathrm{Re}\langle\varphi\nabla u, \varphi\nabla(2.3)\rangle$ 计算得到.(2.130)的微分形式为

$$\begin{aligned}\partial_t\int\mathrm{d}x\varphi^2 G(|u|^2) = 2\gamma\int\mathrm{d}x\varphi^2|u|^2 g(|u|^2) \\ - 2b\|\varphi f(u)\|_2^2 + 2\mathrm{Re}(a + i\alpha)\langle\varphi f(u), \varphi\Delta u\rangle,\end{aligned} \tag{2.132}$$

可由 $2\mathrm{Re}\langle\varphi f(u), \varphi(2.3)\rangle$ 计算得到. 引理的证明类似于引理 2.17，利用了 $u_t \in L^2_{\mathrm{loc}}(I, L^2_{\mathrm{loc}})$ 的事实.

引理 2.22 设 f 满足(H_1)和(H_2)，α, β 满足 $\alpha\beta \geqslant 0$ 或(2.91)，若 u 为方程(2.3)的解满足(2.128)，则 u 可在空间

$$L^\infty(I, H^1_{loc} \cap L^{2\sigma+2}_{loc}) \cap L^2(I, H^2_{loc}) \cap L^{4\sigma+2}_{loc}(I, L^{4\sigma+2}_{loc}) \tag{2.133}$$

进行先验估计，$u(0) \in H^1_{loc} \cap L^{2\sigma+2}_{loc}$. 更详细一点，局部模(2.133)在开球 B 上能为 $u(0)$ 在球 B_0 上的局部模估计，$B \subset\subset B_0$.

证 类似引理 2.18 的证明，定义

$$K_\varphi = \|\varphi\Delta u\|_2^2, K_{1\varphi} = \|\varphi\Delta u\|_2^2, \tag{2.134}$$

$$P_\varphi = \int dx\varphi^2 G(|u|^2), P_{1\varphi} = \|\varphi f(u)\|_2^2, \tag{2.135}$$

$$z_\varphi = \langle\varphi f(u), \varphi\Delta u\rangle, z'_\varphi = -\langle\varphi\nabla f(u), \varphi\nabla u\rangle. \tag{2.136}$$

由 Schwarz 不等式

$$|z_\varphi|^2 \leqslant K_{1\varphi}P_{1\varphi}, \tag{2.137}$$

而

$$z'_\varphi - z_\varphi = 2\langle\varphi f(u), \nabla\varphi\nabla u\rangle. \tag{2.138}$$

微分等式(2.131)，(2.132) 利用(2.134)—(2.136) 可得

$$\partial_t K_\varphi = 2\gamma K_\varphi - 2aK_{1\varphi} - 4\mathrm{Re}(a + i\alpha)\langle\nabla\varphi\nabla u, \varphi\Delta u\rangle + 2\mathrm{Re}(b + i\beta)z'_\varphi, \tag{2.139}$$

$$\partial_t P_\varphi = 2\gamma\int\varphi^2\rho g(\rho) - 2bP_{1\varphi} + 2\mathrm{Re}(a + i\alpha)z_\varphi. \tag{2.140}$$

再考虑(2.139)，(2.140) 的凸组合，$0 < \lambda < 1$，

$$\begin{aligned}
&\partial_t[\lambda aK_\varphi + (1-\lambda)bP_\varphi] \\
&= 2\gamma[\lambda aK_\varphi + (1-\lambda)b\int\varphi^2\rho g(\rho)] - 2[\lambda a^2 K_{1\varphi} \\
&\quad + (1-\lambda)b^2 P_{1\varphi}] - 4\mathrm{Re}\lambda a(a + i\alpha)\langle\nabla\varphi\cdot\nabla u, \varphi\Delta u\rangle \\
&\quad + 2\mathrm{Re}\{\lambda a(b + i\beta)z'_\varphi + (1-\lambda)b(a + i\alpha)z_\varphi\}.
\end{aligned} \tag{2.141}$$

令 $\varepsilon > 0$ 待定，用$(1-\varepsilon)$ 乘以(2.141) 右端第二项并进行估计有

$$\begin{aligned}
&-2(1-\varepsilon)[\lambda a^2 K_{1\varphi} + (1-\lambda)b^2 P_{1\varphi}] \\
&\leqslant -4(1-\varepsilon)\sqrt{\lambda(1-\lambda)}ab|z_\varphi| \\
&\leqslant -4(1-\varepsilon)\sqrt{\lambda(1-\lambda)}ab|z'_\varphi| + 4\sqrt{\lambda(1-\lambda)}ab|z'_\varphi - z_\varphi|.
\end{aligned} \tag{2.142}$$

用 Schwarz 不等式估计(2.141) 右端第三项.

$$-4\mathrm{Re}\lambda a(a+i\alpha)\langle\nabla\varphi\cdot\nabla u,\varphi\Delta u\rangle$$
$$\leqslant\varepsilon\lambda a^2K_{1\varphi}+4\varepsilon^{-1}\lambda(a^2+\alpha^2)\|\nabla\varphi\cdot\nabla u\|_2^2. \qquad (2.143)$$

将(2.142),(2.143)代入(2.141)得

$$\partial_t[\lambda aK_\varphi+(1-\lambda)bP_\varphi]\leqslant 2\gamma[\lambda aK_\varphi+(1-\lambda)b\int\varphi^2\rho g(\rho)]$$
$$-\varepsilon\lambda a^2K_{1\varphi}-2\varepsilon(1-\lambda)b^2P_{1\varphi}+4\varepsilon^{-1}\lambda(a^2+\alpha^2)\|\nabla\varphi\cdot\nabla u\|_2^2$$
$$+[4\sqrt{\lambda(1-\lambda)}ab+2(1-\lambda)b|a+i\alpha|]|z'_\varphi-z_\varphi|$$
$$+4(1-\varepsilon)\sqrt{\lambda(1-\lambda)}ab|z'_\varphi|$$
$$+2\mathrm{Re}[ab-i\lambda\beta a-(1-\lambda)ab]z'_\varphi. \qquad (2.144)$$

在(2.144)中 $|z'_\varphi-z_\varphi|$ 能由(2.138)用 Schwarz 不等式估计,

$$(\cdots)|z'_\varphi-z_\varphi|\leqslant\varepsilon(1-\lambda)b^2P_{1\varphi}+4\varepsilon^{-1}(2\sqrt{\lambda}a$$
$$+\sqrt{1-\lambda}|a+i\alpha|)^2\cdot\|\nabla\varphi\cdot\nabla u\|_2^2. \qquad (2.145)$$

(2.144)中的最后二项具有 z'_φ,能用类似于(2.98)最后二项含 z 的估计进行,再写 z'_φ 为

$$z'_\varphi=-\int\mathrm{d}x\varphi^2\{[g(\rho)+\rho g'(\rho)]|\nabla u|^2+g'(\rho)(\overline{u}\nabla u)^2\}, \qquad (2.146)$$

分解 $g=g_++g_-$,g_- 满足(2.43)且具有紧支集,g_+ 的贡献在(2.144)中估计为 CK_φ,g_- 的贡献使之为负.综合上面结果有

$$\partial_t[\lambda aK_\varphi+(1-\lambda)bP_\varphi]\leqslant C[\lambda aK_\varphi+(1-\lambda)bP_\varphi]$$
$$-\varepsilon[\lambda a^2K_{1\varphi}+(1-\lambda)b^2P_{1\varphi}]$$
$$+24\varepsilon^{-1}(a^2+\alpha^2)\|\nabla\varphi\cdot\nabla u\|_2^2. \qquad (2.147)$$

用以前的符号,可写为形式

$$\partial_t y\leqslant cy-\varepsilon z+\varepsilon^+y_1. \qquad (2.148)$$

由引理2.4,引理2.7的 φ 置换为 $|\nabla\varphi|$,可知 $\|\nabla\varphi\cdot\nabla u\|_2^2$ 即 y_1 由 $L^2(I)$ 估计.积分(2.148)得

$$y(t)+\varepsilon\int_0^t\mathrm{d}t'z(t')\exp[C(t-t')]$$
$$\leqslant y(0)\exp[ct]+\varepsilon^{-1}\int_0^t\mathrm{d}t'y_1(t')\exp[C(t-t')]. \qquad (2.149)$$

由此得到 y 的点态估计和 z 的积分估计,引理由假设(H_1)得到.

引理 2.23 设 f 满足(H_1)和(H_3),且 $\sigma'(n-2)<2$. 如果 $n\sigma'>2$,让 α,β 满足(2.91). 设 u 为方程(2.3)的解且满足(2.86),则 u 可在空间

$$L^{\infty}(I,H_{\mathrm{loc}}^{1})\cap L^{2}(I,H_{\mathrm{loc}}^{2})\cap L^{4\sigma+2}(I,L_{\mathrm{loc}}^{4\sigma+2}) \tag{2.150}$$

中进行估计. $u(0)\in H_{\mathrm{loc}}^{1}$. 更详细一点,局部模(2.150)在开球 B 能用 $u(0)\in H^{1}(B_0)$ 进行估计,$B\subset\subset B_0$.

证 证明类似于引理 2.19,不过局部化要求比引理 2.22 更为细心地估计. 我们需要函数 $\varphi,\tilde{\varphi}\in C^{2}(\mathbb{R}^{n},\mathbb{R}^{+})$ 均具有紧支集,$0\leqslant\varphi\leqslant\tilde{\varphi}\leqslant 1$. $\tilde{\varphi}=1$ 在 φ 的支集上. 特征化局部 H^2 模为

$$K_{2\varphi}=\|\varphi\nabla^{2}u\|_{2}^{2}\equiv\sum_{ij}\|\varphi\nabla_{i}\nabla_{j}u\|_{2}^{2}\equiv\|\varphi\nabla_{i}\nabla_{j}u\|_{2}^{2}. \tag{2.151}$$

容易比较 $K_{2\varphi}$ 和 $K_{1\varphi}$,由基本计算得

$$K_{2\varphi}=K_{1\varphi}+\langle\nabla u,\Delta\varphi^{2}\nabla u\rangle-\langle\nabla_{i}u,(\nabla_{i}\nabla_{j}\varphi^{2})\nabla_{j}u\rangle. \tag{2.152}$$

因此 $K_{2\varphi}$ 和 $K_{1\varphi}$ 相差为 H^1 模,由变化(2.131)可得

$$\partial_{t}\|\varphi\nabla u\|_{2}^{2}=2\gamma\|\varphi\nabla u\|_{2}^{2}-2a\|\varphi\nabla^{2}u\|_{2}^{2}-4\mathrm{Re}(a+i\alpha)\langle(\nabla\varphi)\nabla u,\varphi\nabla^{2}u\rangle-2\mathrm{Re}(b+i\beta)\langle\varphi\nabla f(u),\varphi\nabla u\rangle, \tag{2.153}$$

其中 $\langle(\nabla\varphi)\nabla u,\varphi\nabla^{2}u\rangle=\sum_{ij}\langle\nabla_{i}\varphi\nabla_{j}u,\varphi\nabla_{i}\nabla_{j}u\rangle$. 等价地,用符号(2.134),(2.136)和(2.151)得

$$\partial_{t}K_{\varphi}=2\gamma K_{\varphi}-2aK_{2\varphi}-4\mathrm{Re}(a+i\alpha)\langle(\nabla\varphi)\nabla u,\varphi\nabla^{2}u\rangle+2\mathrm{Re}(b+i\beta)z_{\varphi}'. \tag{2.154}$$

我们再用 Schwarz 不等式估计(2.154)左端的第三项,

$$-4\mathrm{Re}(a+i\alpha)\langle(\nabla\varphi)\Delta u,\varphi\nabla^{2}u\rangle\leqslant\left(\frac{a}{2}\right)K_{2\varphi}+8a^{-1}(a^{2}+\alpha^{2})\||\nabla\varphi|\nabla u\|_{2}^{2}. \tag{2.155}$$

估计(2.154)最后一项(用(H_3))得

$$2\mathrm{Re}(b+i\beta)z_{\varphi}'\leqslant CK_{\varphi}+C'\||\tilde{\varphi}u|^{2\sigma}|\varphi\nabla u|^{2}\|_{1}$$

$$\leqslant CK_{\varphi} + C \| \tilde{\varphi} u \|_{2\sigma'+2}^{2\sigma'} \| \varphi \nabla u \|_{2\sigma'+2}^{2}. \tag{2.156}$$

由 Hölder 不等式

$$\leqslant CK_{\varphi} + C \| \tilde{\varphi} u \|_{2\sigma'+2}^{2\sigma'} \| \varphi \nabla u \|_{2}^{2(1-\delta)} \| \nabla \varphi \nabla u \|_{2}^{2\delta}.$$

再利用 Sobolev 不等式(2.112) 于 $\varphi \nabla u$ 得

$$\leqslant CK_{\varphi} + \left(\frac{a}{2}\right) \| \nabla \varphi \nabla u \|_{2}^{2} + C \| \tilde{\varphi} u \|_{2\sigma'+2}^{2\sigma'/(1-\delta)} K_{\varphi}. \tag{2.157}$$

基本计算表明

$$\| \nabla \varphi v \|_{2}^{2} = \| \varphi \nabla v \|_{2}^{2} - \langle \varphi v, (\Delta \varphi) v \rangle, \forall\, v \in H_{\mathrm{loc}}^{1}. \tag{2.158}$$

将(2.158) 中 $v = \nabla u$ 代入(2.157) 可得

$$\begin{aligned}\partial_t K_{\varphi} \leqslant{}& CK_{\varphi} - aK_{2\varphi} + C(\| \,|\nabla \varphi|\, \nabla u \|_{2}^{2} \\ &+ |\langle \varphi \nabla u, (\Delta \varphi) \nabla u \rangle|) + C \| \tilde{\varphi} u \|_{2\sigma'+2}^{2\sigma'/(1-\delta)} K_{\varphi} \\ ={}& - aK_{2\varphi} + C_1(t) K_{\varphi} + C_2(t),\end{aligned} \tag{2.159}$$

其中 $$C_1(t) = C(1 + \| \tilde{\varphi} u \|_{2\sigma'+2}^{2\sigma'/(1-\delta)}), \tag{2.160}$$

$$C_2(t) = C(\| \,|\nabla \varphi|\, \nabla u \|_{2}^{2} + |\langle \varphi \nabla u, (\Delta \varphi) \nabla u \rangle|). \tag{2.161}$$

(2.159) 积分可得

$$\begin{aligned}&K_{\varphi}(t) + a\int_0^t \mathrm{d}t' K_{2\varphi}(t') \exp[m(t) - m(t')] \\ \leqslant{}& K_{\varphi}(0) \exp[m(t)] - \int_0^t \mathrm{d}t' C_2(t') \exp[m(t) - m(t')],\end{aligned} \tag{2.162}$$

其中

$$m(t) = \int_0^t \mathrm{d}t' C_1(t'). \tag{2.163}$$

为得到 $u \in L^{\infty}(I, H_{\mathrm{loc}}^{1}) \cap L^{2}(I, H_{\mathrm{loc}}^{2})$ 的估计，我们估计 $C_1(t)$ 的积分. 分两种情况：$n\sigma' \leqslant 2$ 和 $n\sigma' > 2$.

如 $n\sigma' \leqslant 2$，由(2.112) 得

$$\begin{aligned}&\| \tilde{\varphi} u \|_{2\sigma'+2}^{2\sigma'/(1-\delta)} \leqslant C \| \tilde{\varphi} u \|_{2}^{2\sigma'} \| \nabla \tilde{\varphi} u \|_{2}^{2\sigma'\delta/(1-\delta)} \\ \leqslant{}& C \| \tilde{\varphi} u \|_{2}^{2\sigma'} (1 + K_{\tilde{\varphi}} + |\langle \tilde{\varphi} u, (\Delta \tilde{\varphi}) u \rangle|).\end{aligned} \tag{2.164}$$

这里用到条件 $n\sigma'\leqslant 2$ 或等价于 $\sigma'\delta/(1-\delta)<1$ 和(2.158)中 $v=u$. $C_1(t)$的积分由(2.164)的 $u(0)$的局部 L^2 模和引理 2.4,引理 2.7 所估计.

若 $\sigma'(n-2)<\alpha<n\sigma'$,类似于引理 2.19 的证明有

$$\|\tilde{\varphi}u\|_{2\sigma+2}^{2\sigma'/(1-\delta)}\leqslant C\|\tilde{\varphi}u\|_r^{2\sigma'[1-\delta(s)]/(1-\delta)}[1+\|\tilde{\varphi}^{k+1}\nabla|u|^k u\|^2+\int\tilde{\varphi}^{k+1}(\Delta\tilde{\varphi}^{k+1})|u|^r]. \quad (2.165)$$

要求的 $C_1(t)$ 的估计来自(2.160),(2.165) 和引理 2.14,引理 2.15.

再估计 $u\in L^{4\sigma+2}(I,L_{\rm loc}^{4\sigma+2})$, 由$(H_1)$, 充分估计 $f(u)\in L^2(I,L_{\rm loc}^2)$. 积分(2.140) 由(2.137) 和对 t 的 Schwarz 不等式得.

$$P_\varphi(t)-P_\varphi(0)\leqslant 2\gamma\int_0^t dt'\int\varphi^2\rho g(\rho)-2b\|\varphi f(u):L^2([0,T],L^2)\|^2+2|a+i\alpha|\|\varphi f(u):L^2([0,T],L^2)\|\|\varphi\nabla u:L^2([0,T],L^2)\|, \quad (2.166)$$

因此

$$P_\varphi(t)+b\|\varphi f(u):L^2([0,T],L^2)\|^2\leqslant P_\varphi(0)+2\gamma\int_0^t dt'\int\varphi^2\rho g(\rho)+b^{-1}(a^2+\alpha^2)\int_0^t dt'K_{1\varphi}(t'). \quad (2.167)$$

故要求估计 $f(u)$ 来自先前的估计 $u\in L^2(I,H_{\rm loc}^2)$ 并通过 $K_{2\varphi}$ 和(2.152).

引理 2.24 设 f 满足(H_1),附加条件

(ⅰ) f 满足(H_2), α,β 满足 $\alpha\beta\geqslant 0$ 或(2.91),或者

(ⅱ) f 满足(H_3), $\sigma'(n-2)<\alpha$,如 $n\sigma'>2$, α 满足(2.107).

若 u 为方程(2.3) 的解,则 u 的局部能量关于时间一致有界, $u\in L^\infty(I,H_{\rm loc}^1\cap L_{\rm loc}^{2\sigma+2})$. 进一步对任何 $t_0>0$, $u\in L^\infty([t_0,T],H_{\rm loc,un}^1\cap L_{\rm loc,un}^{2\sigma+2})$ 具有局部模估计与 u,T 无关.

证 由引理 2.7,局部能量 $y=k_\varphi+P_\varphi$ 满足

$$\int_{t_1}^{t_2}dty(t)\leqslant\lambda(t_2-t_1)+\mu,0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant T. \quad (2.168)$$

另一方面，利用引理 2.22 的假设，满足(2.147) 的局部能量有

$$\partial_t y \leqslant C(y + y_1), \tag{2.169}$$

其中 y_1 为更大区域上的局部能量. 由引理 2.7，y_1 满足估计

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t y_1(t) \leqslant \lambda_1(t_2 - t_1) + \mu_1. \tag{2.170}$$

在引理 2.23 的假设下，充分考虑局部动能 $y = K_\varphi$，因对 H^1 亚临界 σ'，$\sigma'(n-2) < \alpha$，局部势能 P_φ 能为局部动能所控制.

对于 $n\sigma' \leqslant 2$，局部动能满足(2.159)—(2.161) 和(2.164) 有

$$\partial_t y \leqslant C(y + y_1 + yy_1), \tag{2.171}$$

这里的 y_1 满足(2.170). 对于 $n\sigma' > 2$，局部动能满足(2.159)—(2.161) 和(2.165)，因此再用不等式(2.171) 可知不等式(2.168) 成立. 从(2.169) 或(2.171) 可得

$$\partial_t y \leqslant yy_1, \tag{2.172}$$

引理由此即得.

引理 2.25 设 y 和 y_1 为非负函数，满足(2.168)(2.170) 和(2.172)，λ，μ，λ_1，μ_1 均为非负常数，则

$$y(t) \leqslant \exp(\lambda + \mu_1)(\lambda + \mu\lambda_1)(e-1)^{-1}. \tag{2.173}$$

证 由(2.172)，对 $t' \leqslant t$ 有

$$y(t) \leqslant y(t')\exp\left\{\int_{t'}^{t} \mathrm{d}t'' y_1(t'')\right\} \leqslant y(t')\exp[\lambda_1(t-t') + \mu_1]. \tag{2.174}$$

由(2.168)，对 $\theta > 0$ 有

$$\begin{aligned}\lambda\theta + \mu &\geqslant \int_{t-\theta}^{t} \mathrm{d}t' \nu(t') \geqslant \int_{t-\theta}^{t} \mathrm{d}t' y(t)\exp[-\mu_1 - \lambda_1(t-t')] \\ &= y(t)e^{-\mu_1}\lambda_1^{-1}[1 - \exp(-\lambda_1\theta)]. \end{aligned} \tag{2.175}$$

因此

$$y(t) \leqslant e^{\mu_1}\lambda_1(\lambda\theta + \mu)[1 - \exp(-\lambda_1\theta)]^{-1},$$

取 $\theta = \lambda_1^{-1}$ 即得引理.

命题 2.26 设 f 满足(H_1). 附加条件

(ⅰ) f 满足(H_2)，α，β 满足 $\alpha\beta \geqslant 0$ 或(2.91)，或者

(ⅱ) f 满足(H_3), $\sigma'(n-2)<\alpha$, 如 $n\sigma'>2$, α 满足(2.107).
若 $u_0\in H^1_{loc}\cap L^{2\sigma+2}_{loc}$, 则方程(2.3)具有一解,

$$u\in C(\mathbb{R}^+,H^1_{loc}\cap L^{2\sigma+2}_{loc})\cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+,H^2_{loc})$$
$$\cap L^{4\sigma+2}_{loc}(\mathbb{R}^+,L^{4\sigma+2}_{loc}), \tag{2.176}$$

且 $u(0)=u_0$, 解满足等式(2.14), (2.129), (2.130)和引理 2.4, 引理 2.7, 引理 2.22 或引理 2.23 和引理 2.24. 特别,

$$u\in L^\infty([t_0,\infty),H^1_{loc,un}\cap L^{2\sigma+2}_{loc,un})\qquad\forall\, t_0>0.$$

证(摘要) 证明基于命题 2.8, 考虑"盒子"的增加序列 $\{\Lambda_i\}$, 于此取半径为 2^i 的球, 令 $\psi_0\in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^+)$, ψ_0轴向对称的, $0\leqslant\psi_0\leqslant1$.

$$\psi_0(x)=1,\quad |x|\leqslant1,$$
$$\psi_0(x)=0,\quad |x|\geqslant2.$$

令 $\psi_i(x)=(2^{-i}x)$, $u_{0i}=u_0\psi_i$, 对每个 i, u_i 为方程(2.3)满足(2.122), $u_i(0)=u_{0i}$的解, 让

$$X'_j=L^\infty([0,2^j]H^1(\Lambda_j)\cap L^{2\sigma+2}(\Lambda_j))\cap L^2([0,2^j],$$
$$H^2(\Lambda_j))\cap L^{4\sigma+2}([0,2^j],L^{4\sigma+2}(\Lambda_j)),$$

则由引理 2.22 或引理 2.23, 对固定的 j, 序列 $\{u_i\}_{i>j}$在 X'_j 中有界, 由紧性原理和对角线选取, 能从 $\{u_i\}$ 中选取子序列使得在 X'_j 中对一切 j 弱 * 收敛于某个 u,

$$u\in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+,H^1_{loc}\cap L^{2\sigma+2}_{loc})\cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+,H^2_{loc})\cap$$
$$L^{4\sigma+2}_{loc}(\mathbb{R}^+,L^{4\sigma+2}_{loc}).$$

从标准原理, 如同命题 2.8 可得命题.

§3 一般二维 Ginzburg-Landau 方程的整体吸引子

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n(n=1,2)$的有界开集, 具有充分光滑的边界 Γ. 考虑如下一般的 Ginzburg-Landau 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-(\lambda+i\alpha)\Delta u+(k+i\beta)|u|^2u-\gamma u=0, \tag{3.1}$$

其中参数 $\lambda,\alpha,\beta,\gamma,k$ 为实数，且设

$$\lambda>0, k>0. \tag{3.2}$$

若有以下边界条件：

Dirichlet 边界条件

$$u(x,t)=0,\ (x,t)\in\Gamma\times\mathbb{R}^+, \tag{3.3}$$

Neumann 边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial v}=0,\ (x,t)\in\Gamma\times\mathbb{R}^+, \tag{3.4}$$

其中 v 为 Γ 的单位外法线向量.

周期边界条件

$$\Omega=[0,L],n=1;\Omega=[0,L_1]\times[0,L_2],n=2, \tag{3.5}$$

u 对 Ω 是周期的.

还有初始条件

$$u(x,0)=u_0(x),\ x\in\Omega. \tag{3.6}$$

记 $u=\{u_1,u_2\},u_j(j=1,2)\in L^2$, $|u|_{L^2}^2=|u_1|_{L^2}^2+|u_2|_{L^2}^2$ 如 $u=u_1+iu_2,v=v_1+iv_2$，则

$$(u,v)=\{(u_1,v_1)+(u_2,v_2)\}+i\{(u_2,v_1)-(u_1,v_2)\}.$$

如 $u,v\in H^1(\Omega)$，记

$$((u,v))=\sum_{i=1}^{n}(D_iu,D_iv),\ \|u\|^2=((u,u)).$$

因此

$$((u,v))_1=(u,v)+((u,v)),\ \|u\|_1=\|u\|_{L^2}^2+\|u\|^2.$$

取 $H=L^2(\Omega)$ 且记

$$V=H_0^1(\Omega),D(A)=H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),$$

对应于(3.3)情况.

$$V=H^1(\Omega),D(A)=\{v\in H^2(\Omega),\frac{\partial v}{\partial\nu}=0,x\in\Gamma\},$$

对应于(3.4)情况.

$V=H_{\text{per}}^1(\Omega),D(A)=H_{\text{per}}^2(\Omega)$，对应于(3.5)情况. 这里

$Au=-\Delta u$,对任何 $\eta>0$,$A+\eta I$ 是一个同构:$V\to V'$ 或 $D(A)\to H$.由 Poincaré 不等式,可知对于(3.3),$\eta=0$ 也成立.

设 ω_j 和 λ_j 分别为 A 在 H 中的相互正交的特征向量和特征值.

$$A\omega_j=\lambda\omega_j,\quad j\geqslant 1, \tag{3.7}$$

$$0\leqslant\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots,\ \lambda_j\to\infty,j\to\infty. \tag{3.8}$$

对应于(3.3)的情况,$\lambda_1>0$.而对应于(3.4)和(3.5)的情况,$\lambda_1=0,\omega_1=|\Omega|^{-\frac{1}{2}},\lambda_2>0$.定义 A 的幂 $A^S(S>0)$,有 $V=D(A^{\frac{1}{2}})$,$V'=D(A^{-\frac{1}{2}})$,$H=H(A^0)$.

问题(3.1)(3.3)(或(3.1)(3.4);(3.1)(3.5))可写成如下泛函形式发展方程:

$$u_t+(\lambda+i\alpha)Au+(k+i\beta)|u|^2u-\gamma u=0. \tag{3.9}$$

初始条件(3.6)可写成

$$u(0)=u_0. \tag{3.10}$$

对于初值问题(3.9),(3.10),解的存在性、惟一性有如下定理:

定理 3.1[12] 设 $n=1$ 或 $n=2$,(3.2)成立,则对 $u_0\in H$,存在问题(3.9),(3.10)的惟一整体解

$$u\in\mathscr{C}([0,T];H)\cap L^2(0,T;V),\ \forall\, T<\infty, \tag{3.11}$$

且映照 $u_0\to u(t)$ 是连续的:$H\to H$,$\forall\, t>0$.

如 $u_0\in V$,则有

$$u\in\mathscr{C}([0,T];V)\cap L^2(0,T:D(A)),\ \forall\, T<\infty. \tag{3.12}$$

现考虑在 H 中吸收集的存在性.用 $\bar{u}$ 乘(3.1)在 Ω 上积分,利用 Green 公式并取实部得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|u|^2\mathrm{d}x+\lambda\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x+k\int_\Omega|u|^4\mathrm{d}x$$
$$-\gamma\int_\Omega|u|^2\mathrm{d}x=0,$$

或

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u|_{L^2}^2+\lambda\|u\|^2+k|u|_{L^4}^4-\gamma|u|_{L^2}^2=0. \tag{3.13}$$

(ⅰ)$\gamma\leqslant 0$,导致平凡动力系统.如 $\gamma<0$,则由(3.13)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u|_{L^2}^2-\gamma|u|_{L^2}^2\leqslant 0, \tag{3.14}$$

$$|u(t)|_{L^2}^2\leqslant|u_0|_{L^2}^2\exp(\gamma t), \tag{3.15}$$

因此

$$|u(t)|_{L^2}^2\to 0, t\to\infty, \forall u_0\in L^2(\Omega). \tag{3.16}$$

如 $\gamma=0$,(3.16)仍然成立. 事实上, 由 Hölder 不等式 $|u|_{L^2}^2\leqslant|\Omega|^{\frac{1}{2}}|u|_{L^4}^2$,从(3.13)推得

$$y_t+\frac{2k}{|\Omega|}y^2\leqslant 0, y(t)=|u(t)|_{L^2}^2,$$

因此

$$\frac{1}{y(0)}+\frac{2k}{|\Omega|}t\leqslant\frac{1}{y(t)}.$$

于是(3.16)成立.

当 $\gamma<\gamma\lambda_1$ 时,(3.16)也成立,其中 λ_1 为对应于(3.3)情况的算子 $-\Delta$ 在 Dirichlet 边界条件下的第一特征值. 对应于(3.4),(3.5)的情况,(3.16)不一定成立,因它们具有非零常数的定常解.

(ⅱ)$\gamma>0$,我们有

$$\frac{k}{2}S^4-2\gamma S^2\geqslant-\frac{2}{k}\gamma^2, S\in R, \tag{3.17}$$

$$\frac{k}{2}\int_\Omega|\varphi|^4\mathrm{d}x-2\gamma\int_\Omega|\varphi|^2\mathrm{d}x\geqslant-\frac{2}{k}\gamma^2|\Omega|, \forall\varphi\in L^4(\Omega). \tag{3.18}$$

利用此不等式于(3.13)中得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u|_{L^2}^2+2\lambda\|u\|^2+k|u|_{L^4}^2+2\gamma|u|_{L^2}^4\leqslant\frac{2\gamma^2}{k}|\Omega|. \tag{3.19}$$

由 Gronwall 引理得

$$|u(t)|_{L^2}^2\leqslant|u(0)|_{L^2}^2\exp(-\gamma t)+\frac{\gamma}{k}|\Omega|(1-\exp(-\gamma t)), \forall t\geqslant 0, \tag{3.20}$$

$$\lim_{t\to\infty}|u(t)|_{L^2}^2\leqslant\rho_0^2,\ \rho_0^2=\frac{\gamma}{k}|\Omega|. \tag{3.21}$$

因此,以 O 为中心,$\rho_0'\geqslant\rho_0$ 为半径的在 H 中的球 $B_H(0,\rho_0')$ 是半群 $S(t)$ 的正不变集.以 O 为中心,$\rho_0'>\rho_0$ 为半径在 H 中的球 $B_0=B_H(0,\rho_0')$ 是半群 $S(t)$ 在 H 中的吸收集.

如果 B 为 H 中的任何有界集,设为中心在 O,以 R 为半径,在 H 中的球 $B_H(0,R)$,则当 $t\geqslant t_0\doteq t_0(B,B_0)$ 时,$S(t)B\subset B_0$.

$$t_0=\frac{1}{\gamma}\log\frac{R^2}{(\rho_0')^2-\rho_0^2}. \tag{3.22}$$

积分(3.19)从 t 到 $t+r(r>0)$,如 $u_0\in B,t\geqslant t_0$,则

$$\int_t^{t+r}\{2\lambda\|u\|^2+k|u|_{L^4}^4+2\gamma|u|_{L^2}^2\}ds$$

$$\leqslant(\rho_0')^2+\frac{2r\gamma^2}{k}|\Omega|,\ \forall t\geqslant t_0,\forall r>0. \tag{3.23}$$

现考虑在 V 中的吸收集.

乘(3.1)以 $-\Delta\overline{u}$,在 Ω 上积分,利用 Green 公式,再取实部得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2+\lambda|\Delta u|_{L^2}^2-\gamma\|u\|^2$$

$$=\mathrm{Re}(k+i\beta)\int_\Omega|u|^2u\Delta\overline{u}\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{Re}(k+i\beta)\int_\Omega[\nabla(|u|^2u)]\nabla\overline{u}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant3(k^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}\int_\Omega|u|^2|\nabla u|^2\mathrm{d}x, \tag{3.24}$$

利用 Schwarz 不等式,上式右端表达式囿于

$$3(k^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}|u|_{L^4}^2|\nabla u|_{L^4}^2, \tag{3.25}$$

由于 Sobolev 嵌入定理和插值不等式,有 $H^{\frac{1}{2}}(\Omega)\subset L^4(\Omega)(n=1,2)$且

$$|\varphi|_{L^4(\Omega)}\leqslant C_1'|\varphi|_{L^2}^{\frac{1}{2}}(\|\varphi\|^2+|\varphi|_{L^2}^2)^{\frac{1}{4}},\ \varphi\in H^1(\Omega). \tag{3.26}$$

模 $|u|_{L^2}^2+|\Delta u|_{L^2}^2$ 是等价于 H^2 模,(3.26)对于 $\Delta\varphi$ 有

$$|\Delta\varphi|_{L^4}\leqslant C_2' \| \varphi \|^{\frac{1}{2}}(|\varphi|_{L^2}^2+|\Delta\varphi|_{L^2}^2)^{\frac{1}{4}}, \tag{3.27}$$

于是 (3.25)囿于

$$3(C_2')^2(k^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}|u|_{L^4}^2 \| u \| (|u|_{L^2}^2+|\Delta u|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\frac{\lambda}{2}|\Delta u|_{L^2}^2+\frac{\lambda}{2}|u|_{L^2}^2+C_3'|u|_{L^4}^4 \| u \|^2, \tag{3.28}$$

$$C_3'=\frac{9}{2\lambda}(C_2')^4(k^2+\beta^2).$$

将(3.25),(3.28)代入(3.24)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| u \|^2+\lambda|\Delta u|_{L^2}^2\leqslant 2(\gamma+C_3') \| u \|^2+\lambda|u|_{L^2}^2. \tag{3.29}$$

运用如下的一致 Gronwall 引理:

引理 3.2 (一致 Gronwall 引理)[12] 设 g,h,y 为三个在$[t_0,\infty]$上的正的局部可积函数,使得 y' 在$[t_0,+\infty]$上局部可积且满足

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\leqslant gy+h,\ t\geqslant t_0, \tag{3.30}$$

$$\int_t^{t+r}g(s)\mathrm{d}s\leqslant a_1,\int_t^{t+r}h(s)\mathrm{d}s\leqslant a_2,$$

$$\int_t^{t+r}y(s)\mathrm{d}s\leqslant a_3,,t\geqslant t_0, \tag{3.31}$$

其中 r,a_1,a_2,a_3 均为正常数,则

$$y(t+r)\leqslant\left(\frac{a_3}{r}+a_2\right)\exp(a_2),\ \forall\, t\geqslant t_0. \tag{3.32}$$

令 $y= \| u \|^2,g=(2\gamma+C_3'|u|_{L^4}^4),h=\lambda|u|_{L^2}^2$,

$$a_1=2r\gamma+\frac{2C_3'}{k}\left(\rho_0'^2+\frac{2r\gamma^2}{k}|\Omega|\right),$$

$$a_2=\lambda\rho_0'^2,$$

$$a_3=\frac{1}{2\lambda}\left(\rho_0'^2+\frac{2r\gamma^2}{k}|\Omega|\right).$$

则由引理 3.2 有

$$\| u(t) \|^2\leqslant\left(\frac{a_3}{r}+a_2\right)\exp(a_2),\ t\geqslant t_0+r, \tag{3.33}$$

其中 $r>0$ 是任意选取的，$u_0\in B$，$t_0=L_0(B)$在(3.22)中。$(|\varphi|_{L^2}^2+\|\varphi\|^2)$为 V 上的模，即为 H^1 模。由(3.22)，(3.23)和(3.33)可得 $S(t)$在 V 中吸收集的存在性。事实上，如 B 为 V 中的一个有界集，则它也是 H 中的有界集，$S(t)B\subset B_0,t\geqslant t_0(B,B_0)$，由(3.33)有 $S(t)B\subset B_1,t\geqslant t_0+r$，其中 B_1 为 V 中以 O 为中心，以 ρ_1 为半径的球，

$$\rho_1^2=(\rho_0')^2+\left(\frac{a_3}{r}+a_2\right)\exp(a_1), \tag{3.34}$$

因此 V 中的以 O 为中心，ρ_1 为半径的球为 $S(t)$在 V 中的吸收集.

如 $u_0\in B$，这是 B 仅在 H 中是有界的，则可作如下分析：$S(t)B\subset B_1,t\geqslant t_0(B)+r$，因 B_1 在 V 中是有界的，故 V 映射 H 中是紧的，推出：

$\bigcup_{t\geqslant t_0+r}S(t)B$ 在 H 中是相对紧的，

则利用如下定理(见[12,定理11])：

定理 3.3 设 H 是一个度量空间，算子 $S(t)$给定，满足

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=F(u(t)),\\ u(0)=u_0\end{cases} \tag{3.35}$$

和条件：

算子 $S(t)$对充分大的 t 是一致紧的，则对任何有界集 B，存在 $t_0=t_0(B)$使得

$$\bigcup_{t\geqslant t_0}S(t)B \tag{3.36}$$

在 H 中是相对紧的；或满足条件：

H 为 Banach 空间，$S(t)=S_1(t)+S_2(t)$，其中算子 $S_1(t)$对 t 充分大是一致紧的，$S_2(t)$为连续映照：$H\to H$，且对任何有界集 $C\subset H$ 有

$$r_c(t)=\sup_{\varphi\in c}|S_2(t)\varphi|_H\to 0,\quad t\to\infty, \tag{3.37}$$

且设存在一个开集 $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{U}$ 中一个有界集 B 使得 B 为 $\mathscr{U}$ 中的吸收

集.

则 B 的极限集 $\mathscr{A}=\omega(B)$ 是紧的吸引子,它吸引 $\mathscr{U}$ 中的有界集,它是在 $\mathscr{U}$ 中最大的有界吸引子,如 H 是一个 Banach 空间,$\mathscr{U}$ 是凸的和连通的,则 $\mathscr{A}$ 也是连通的.

我们得到:

定理 3.4 考虑由 Ginzburg-Landau 方程(3.1),并置以边界条件(3.3)或(3.4)或(3.5)的动力系统,其中 $\lambda>0,k>0$,则这个动力系统具有整体吸引子 $\mathscr{A}$. 它在 $L^2(\Omega)$ 中是紧的、连通的和最大的. $\mathscr{A}$ 吸引 $L^2(\Omega)$ 中的有界集,$\mathscr{A}$ 也是 $L^2(\Omega)$ 中最大的泛函不变集.

附注 3.5 以上分析对于 $\gamma\leqslant 0$,则它的所有轨线趋于 $0(t\to\infty)$,即有

$$\operatorname{dist}(S(t)B,\{0\})\to 0,\quad t\to\infty,$$

其中 $B\subset H$ 为任何有界集,因此,整体吸引子 $\mathscr{A}$ 为 $\{0\}$.

§4 一般 Ginzburg-Landau 方程的动力长度

整体吸引子 $\mathscr{A}$ 的 Lyapunov 维数 $d_L(\mathscr{A})$ 可解释为系统自由度的个数. 实际上

$$d_L(\mathscr{A})\sim\left(\frac{L}{l}\right)^d, \tag{4.1}$$

其中 L 为系统的长度,d 为空间维数,l 为最小的动力长度. 而

$$l(t)\sim\left(\frac{V}{N(t)}\right)^{\frac{1}{d}}. \tag{4.2}$$

这里 V 表示 d 维系统的体积,$N(t)$ 表示最小模的个数.

$$N^{-d}(t)\sim k_{n,r}(t)=\left(\frac{J_n}{J_r}\right)^{\frac{1}{2(n-r)}}, \tag{4.3}$$

其中

$$J_l=\|\nabla^l u\|_2^2=\int|\nabla^l u|^2\mathrm{d}x. \tag{4.4}$$

因此,为了估计 $l(t)$,必须估计 $J_l(t)$ 以及各种时间平均 L^∞ 模.

令

$$G_n = \| u \|_{2(\sigma n+1)}^{2(\sigma n+1)} = \int |u|^{2(\sigma n+1)} \mathrm{d}x,$$

$$J_n = \| \nabla^n u \|_2^2 = \int |\nabla^n u|^2 \mathrm{d}x, |\nabla^n u|^2 = \nabla^n u \cdot \nabla^n u^*,$$

$$F_n = J_n + \alpha_n G_n, n \neq 1, \alpha_n \neq 1.$$

考虑如下的一般的 Ginzburg-Landau 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Ru + (1+i\nu)\Delta u - (1+i\mu)|u|^{2\sigma}u, \tag{4.5}$$

其中 $R>0, \mu, \nu$ 为实数,$\sigma>0$.

设 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ 表示 GL 方程(4.5)具初值 u_0 所形成的半群算子,即

$$u(t) = S(t)u_0. \tag{4.6}$$

若 $\mathscr{A} \subset H$ 为紧的吸引子,泛函 $F = F(S(t)u_0)$ 定义时间渐近上界

$$\overline{F} = \sup_{u_0 \in H} \limsup_{t\to\infty} F(S(t)u_0), \tag{4.7}$$

它的时间平均为

$$\langle F \rangle = \limsup_{t\to\infty} \sup_{u\in\mathscr{A}} \frac{1}{t}\int_0^t F(S(\tau)u_0)\mathrm{d}\tau, \tag{4.8}$$

由基本的实分析易得.

引理 4.1 (时间平均的性质) (ⅰ) $\langle F \rangle \leqslant \overline{F}$,

(ⅱ) $\langle FG \rangle \leqslant (F^p)^{\frac{1}{p}} (G^q)^{\frac{1}{q}}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

(ⅲ) $\langle \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} + G \rangle = \langle G \rangle$,如 $\overline{F} < \infty$.

我们先综述一下主要结果,对于 J_n 的新的微分不等式

$$\dot{J}_n \leqslant 2RJ_n + CJ_nG_n^s - J_n\left(\frac{J_n}{J_r}\right)^{\frac{1}{n-r}}, \tag{4.9}$$

其中 $S = \dfrac{2\sigma}{2-\sigma n+2m\sigma}, \dfrac{\mathrm{d}\sigma-2}{2\sigma} < m < \infty$. (4.10)

第二个微分不等式

$$\dot{J}_n \leqslant 2RJ_n + C(G_m^{s'} + G_{\hat{m}}^{s'}) - J_n\left(\frac{J_n}{J_r}\right)^{\frac{1}{n-r}}, \tag{4.11}$$

这里

$$S' = \frac{2 + 2\sigma - \sigma d + 2n\sigma}{2 - \sigma d + 2m\sigma}, S_0' = \frac{\sigma(n+1)+1}{\sigma m + 1},$$

$$\frac{\sigma d - 2}{2\sigma} < m \leqslant n + 1. \tag{4.12}$$

对于 σ 和 d 在 μ,ν 平面上可分三个不同区域,如图 4.1.

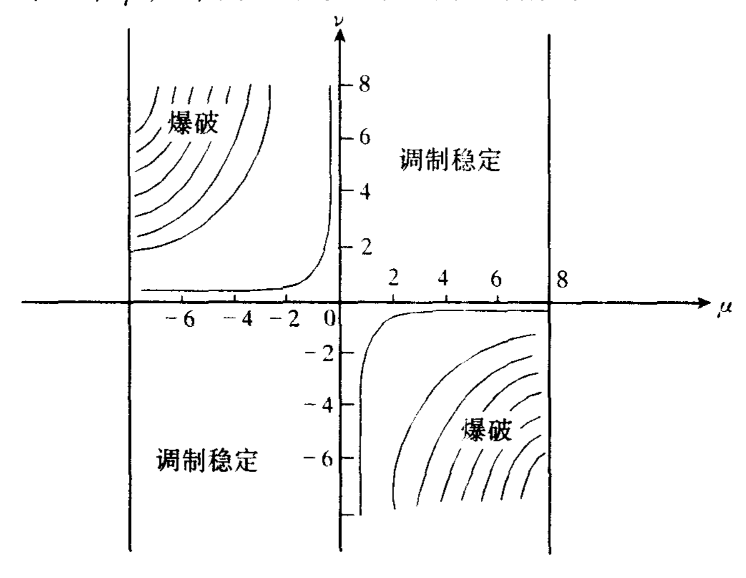


图 4.1

超临界 GL 方程,$d = 3, \sigma = 1$. 整体解 仅在一个黑暗区域的一个小区域.对于亚临界和临界情况则在整个参数平面上存在.

(ⅰ)调制稳定区:它包含在第一象限和第三象限以及第二、四象限和一对双曲线 $\mu\nu + 1 = 0$ 所夹区域,在此区域内所有旋波解是线性稳定的.

(ⅱ)"软湍流"区域(非"黑暗区"):这个区域在调制稳定区之外,为一对双曲线.

$$-\frac{1 + \mu\nu}{|\mu - \nu|} \leqslant \frac{\sqrt{2\sigma + 1}}{\sigma} \tag{4.13}$$

所界,且 $d < 2 + \frac{2}{\sigma}$. 在此区域有先验估计

$$\bar{J}_n \leqslant CR^{\frac{(1+\sigma)(2-d\sigma+2n\sigma)}{\sigma(2+2\sigma-\sigma n)}}. \tag{4.14}$$

（ⅲ）“硬湍流”区域（“黑暗区”）：估计（4.14）失败，代入以

$$\overline{J}_n < CR^{\frac{-d\sigma+(1+m\sigma)[2+2n^2\sigma+n(2+2\sigma-d\sigma)]}{(1+n)\sigma(2-d\sigma+2m\sigma)}}, \tag{4.15}$$

这是一个更弱的界，且满足约束

$$|1+i\nu| \leqslant \frac{\sigma m+1}{\sigma m}, \tag{4.16}$$

$$\frac{\sigma d-2}{2\sigma} < m \leqslant n+1. \tag{4.17}$$

在黑暗区最好选取 m 为

$$m = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{\nu^2} + \sqrt{\frac{1}{\nu^4} + \frac{1}{\nu^2}}\right), \tag{4.18}$$

更简捷一些，可用

$$m = \frac{1}{\sigma\nu} \tag{4.19}$$

代替. 不幸的是，（4.17）给出了 m 的下界，它依赖于量 σd，于是可分三种情况讨论：

（1）亚临界 $\sigma d < 2$，可取 $m = 0$；

（2）临界 $\sigma d = 2$，则任何 $m > 0$ 成立；

（3）超临界，$\sigma d > 2$，则 m 的下界严格为正，且 ν 具有上限.

$$|\nu| < \frac{2\sqrt{\sigma d-1}}{\sigma d-2}. \tag{4.20}$$

$\sigma = 1$，可得如下定性估计（见表 4.1）

表 4.1

d	区　域	$\Vert\overline{\nabla^n u}\Vert_2^2$	$\langle\Vert\nabla^n u\Vert_2^2\rangle$	$\Vert\overline{u}\Vert_\infty^2$	$\langle\Vert u\Vert_\infty^2\rangle$
1	非黑暗区	$\frac{2}{3}(2n+1)$	$\frac{2}{3}(2n+1)$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$
1	黑暗区	$2n+1$	$2n^+$	2	$\frac{4}{3}$
2	非黑暗区	$2n$	$2n$	2	2

续表

d	区　域	$\overline{\|\nabla^n u\|_2^2}$	$\langle\|\nabla^n u\|_2^2\rangle$	$\overline{\|u\|_\infty^2}$	$\langle\|u\|_\infty^2\rangle$
2	黑 暗 区	$\dfrac{n+n^2+m(1+n+n^2)}{m(1+n)}$	$\dfrac{-1+n+m(1+n)^+}{m}$	$\dfrac{1+m^+}{m}$	2
3	非黑暗区	$4n-2$	$4n-2$	4	4
3	黑 暗 区	$\dfrac{(1+m)(2+n+2n^2)-1}{(2m-1)(1+n)}$	$\dfrac{2(m+n-2+mn)^+}{2m-1}$	$\dfrac{2(1+m)^+}{2m-1}$	$\dfrac{5m-1^+}{2m-1}$

"+"表示近似值

定义 l 长度的逆为

$$l^{-1}\sim K_{n,r}=\left(\frac{J_n+\beta 2^n R^{(n+1)/\sigma}}{J_r+\beta 2^r R^{(r+1)/\sigma}}\right)^{\frac{1}{2(n-r)}},\qquad (4.21)$$

$$k_{n,r}=K_{n,r}\mid_{\beta=0},$$

则可得 $\|u\|_\infty^{2\sigma}$的时间平均和时间渐近上界估计,

$$\langle\|u\|_\infty^{2\sigma}\rangle\sim\langle K_{n,r}^2\rangle\leqslant\overline{\|u\|_\infty^{2\sigma}}\sim K_{n,r}^{-2}\leqslant k_{n,r}^{-2}.\qquad (4.22)$$

以下作一些预备性估计.直接对 GL 方程(4.1)计算可得

引理 4.2　对于复 GL 方程(4.1),G_n 和 J_n 满足如下发展方程.

$$\frac{\dot{G}_n}{2(\sigma n+1)}=RG_n-G_{n+1}+\mathrm{Re}\left[(1+i\nu)\int|u|^{2n\sigma}u^*\Delta u\,\mathrm{d}x\right],\qquad (4.23)$$

$$\frac{1}{2}\dot{J}_n=RJ_n-J_{n+1}-\mathrm{Re}\left[(1+i\mu)\int\nabla^n(u|u|^{2\sigma})\nabla^n u^*\,\mathrm{d}x\right],\qquad (4.24)$$

再估计(4.24)右端最后一项.

引理 4.3　对一切正整数 d,σ 和 n 满足如下不等式

$$\left|\int\nabla^n(u|u|^{2\sigma})\cdot\nabla^n u^*\,\mathrm{d}x\right|\leqslant C(n,p)\|\nabla^n u\|_{2p}^2\|u\|_{2\sigma r}^{2\sigma},\qquad (4.25)$$

其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{r}=1, 1\leqslant p, r\leqslant\infty$. (4.26)

证 在积分内部取绝对值,利用 $\nabla^n(u|u|^{2\sigma})$ 的 Leibniz 展开和三角不等式得

$$
\begin{aligned}
&\left|\int\nabla^n(u|u|^{2\sigma})\cdot\nabla^n u^*\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant C_1(n)\sum_{\substack{\alpha\in N^{2\sigma+1}\\|\alpha|=n}}\int|\nabla^n u|\prod_{j=1}^{2\sigma+1}|\nabla^{\alpha_j}u|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant C_1(n)\|\nabla^n u\|_{p_0}\sum_{\substack{\alpha\in N^{2\sigma+1}\\|\alpha|=n}}\prod_{j=1}^{2\sigma+1}\|\nabla^{\alpha_j}u\|_{p_j}
\end{aligned}
$$

(由 Hölder 不等式,$\sum_{j=0}^{2\sigma+1}\frac{1}{p_j}=1$)

$$
\leqslant C_2(n,p_0)\|\nabla^n u\|_{p_0}\sum_{\substack{\alpha\in N^{2\sigma+1}\\|\alpha|=n}}\prod_{j=1}^{2\sigma+1}\|\nabla^n u\|_{p_0}^{\theta_j}\|u\|_{2\sigma p_0/(p_0-2)}^{1-\theta_j}
$$

(对 $\|\nabla^{\alpha_j}u\|_{p_j}$ 插值,见以下说明)

$$
=C_3(n,p)\|\nabla^n u\|_{2p}^2\|u\|_{2\sigma r}^{2\sigma} \tag{4.27}
$$

(利用以下关系式(4.30),置 $p=\frac{p_0}{2}, r=p_0/(p_0-2)$),

其中

$$
\theta_j=\frac{\alpha_j}{n}, \tag{4.28}
$$

$$
p_j=\frac{2np_0\sigma}{-2n+np_0+\alpha_j(2-p_0+2\sigma)}. \tag{4.29}
$$

容易验证

$$
\sum_{j=1}^{2\sigma+1}\theta_j=\frac{|\alpha|}{n}=1, \tag{4.30}
$$

$$
\sum_{j=0}^{2\sigma+1}\frac{1}{p_j}=\frac{1}{p_0}+(2\sigma+1)\frac{np_0-2n}{2np_0\sigma}+|\alpha|\frac{(2-p_0+2\sigma)}{2np_0\sigma}=1. \tag{4.31}
$$

最后,我们必须验证由(4.29)定义的 p_j 满足 $1\leqslant p_j\leqslant\infty$. 由

基本运算,(4.29)的分母不为0,$\frac{\partial p_j}{\partial \alpha_j}$(当 $\alpha_j \in (0,n)$ 时)不改变符号.因此,充分考虑极端情况 $\alpha_j = 0$, $p_j = 2p_0\sigma/(p_0-2)$, $\alpha_j = n$, $p_j = p_0$,显然有 $1 \leqslant p_j \leqslant \infty$,由此断言上面 Hölder 不等式成立.

在引理4.3中,p 是自由的,今后估计中令 $p = 2 + 2\sigma$.

推论 4.4 对一切正整数 d,σ 和 n,下列不等式成立

$$\left|\int \nabla^n (u|u|^{2\sigma}) \cdot \nabla^n u^* \mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon J_{n+1} + C(\varepsilon) J_n G_m^s, \tag{4.32}$$

$$s = \frac{2\sigma}{2 - \sigma d + 2m\sigma}, \quad \frac{\sigma d - 2}{2\sigma} < m < \infty. \tag{4.33}$$

证 由内插不等式和引理4.3有

$$\begin{aligned}
&\left|\int \nabla^n (u|u|^{2\sigma}) \cdot \nabla^n u^* \mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant C_4 \| \nabla^{n+1} u \|_2^{d/r} \| \nabla^n u \|_2^{2-d/r} \| u \|_{2\sigma r}^{2\sigma} \\
&\equiv C_4 J_{n+1}^{s_1} J_n^{1-s_1} G_m^{s_2}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

(由 Young 不等式)

$$\begin{aligned}
&\leqslant \varepsilon J_{n+1} + C_5(\varepsilon)(J_n^{1-s_1} G_m^{s_2})^{\frac{1}{1-s_1}} \\
&\equiv \varepsilon J_{n+1} + C_5(\varepsilon) J_n G_m^s,
\end{aligned} \tag{4.35}$$

其中指标 $s_1 = \frac{\sigma d}{2(1+m\sigma)}$, $s_2 = \frac{\sigma}{1+m\sigma}$.

约束(4.33)来自 $s_1 < 1$,以便应用 Young 不等式 $d = 1$.引理4.3的条件 $r \geqslant 1$ 必将更加限制(4.33).故对 $\frac{1}{2} < r < 1$,我们必须补充我们的证明具有不同的插值,为了得到更一般的结果,于是估计

$$\left|\int \nabla^n (u|u|^{2\sigma}) \cdot \nabla^n u^* \mathrm{d}x\right| \leqslant C_5 \| \nabla^n u \|_\infty^2 \| u \|_\infty^{2\sigma}$$

(对最后一个因子进行插值)

$$\begin{aligned}
&\leqslant C_6 \| \nabla^n u \|_\infty^{2\lambda} \| \nabla^n u \|_\infty^{2(1-\lambda)} [(\| \nabla^{n+1} u \|_2^{s_3} \| u \|_{2\sigma r}^{1-s_3})^{2\sigma} \\
&\quad + \| u \|_{2\sigma r}^{2\sigma}] \leqslant C_7 (\| \nabla^{n+1} u \|_2^{s_4} \| u \|_{2\sigma r}^{1-s_4})^{2\lambda} \\
&(\| \nabla^{n+1} u \|_2 \| \nabla^n u \|_2)^{1-\lambda} (\| \nabla^{n+1} u \|_2^{s_3} \| u \|_{2\sigma r}^{1-s_3})^{2\sigma}
\end{aligned}$$

$$+ C_8(\| \nabla^{n+1} u \|_2^{2\lambda} (\| \nabla^{n+1} u \|_2 \| \nabla^n u \|_2)^{1-\lambda} \| u \|_{2\sigma r}^{2\sigma}. \tag{4.36}$$

最后一步我们已用了 Poincaré 不等式在具零平均函数$\nabla^n u$ 的L^2模上,这是为了吸收附加的低阶项到主要项来. Gagliardo-Nirenberg 指数 s_3、s_4 为

$$s_3 = \frac{1-r}{2\sigma rn + \sigma r + 1}, s_4 = \frac{2r\sigma n + 1}{2r\sigma n + r\sigma + 1}.$$

如选取 $\lambda = \frac{1}{r} - 1$,由(4.36)即得(4.34).

推论 4.5 对一切正整数 d, σ 和 n 有如下不等式

$$\left| \int \nabla^n (u | u |^{2\sigma}) \cdot \nabla^n u^* \mathrm{d}x \right| \leqslant C(n) J_{n+1}^{\frac{n}{n+1}} G_{n+1}^{\frac{1}{n+1}}. \tag{4.37}$$

证 由插值不等式和引理 4.3 得

$$\left| \int \nabla^n (u | u |^{2\sigma}) \cdot \nabla^n u^* \mathrm{d}x \right| \leqslant C_9 (\| \nabla^{n+1} u \|_2^{\frac{n}{n+1}}$$
$$\cdot \| u \|_{2[\sigma(n+1)+1]}^{\frac{1}{n+1}})^2 \cdot \| u \|_{2[\sigma(n+1)+1]}^{2\sigma} = C_9 J_{n+1}^{\frac{n}{n+1}} G_{n+1}^{\frac{1}{n+1}}. \tag{4.38}$$

推论 4.6 对一切正整数 d, σ 和 n,有

$$\left| \int \nabla^n (u | u |^{2\sigma}) \cdot \nabla^n u^* \mathrm{d}x \right| \leqslant \varepsilon J_{n+1} + C(\varepsilon)(G_m^s + G_m^{s_0}), \tag{4.39}$$

其中

$$s = \frac{2 + 2\sigma - d\sigma + 2n\sigma}{2 - d\sigma + 2m\sigma}, \quad s_0 = \frac{\sigma(n+1)+1}{\sigma m + 1},$$
$$\frac{\sigma d - 2}{2\sigma} < m \leqslant n + 1. \tag{4.40}$$

证 继续插值(4.38)的右端

$$J_{n+1}^{\frac{n}{n+1}} G_{n+1}^{\frac{1}{n+1}} \leqslant C_{10} J_{n+1}^{\frac{n}{n+1}} (J_{n+1}^{s_5} G_m^{s_6} + G_m^{s_0})^{\frac{1}{n+1}} \tag{4.41}$$

(由 Young 不等式)

$$\leqslant \varepsilon J_{n+1} + C_{11}(\varepsilon)(G_m^{\frac{s_6}{1-s_5}} + G_m^{s_0}) \tag{4.42}$$

$$\equiv \varepsilon J_{n+1} + C_{11}(\varepsilon)(G_m^s + G_m^{s_0}), \tag{4.43}$$

其中

$$s_5 = \frac{d(1-m+n)\sigma}{2+2n+2m\sigma-dm\sigma+2mn\sigma},$$

$$s_6 = \frac{(1+n)(2+2\sigma-d\sigma+2n\sigma)}{2+2n+2m\sigma-dm\sigma+2mn\sigma}.$$

显然需要 $0 \leqslant s_5 < 1$,由此得到推论中的限制条件.

现估计 J_n 和 G_n 的长时间界.

定理 4.7 对一切 d 和 $\sigma > 0$,如下先验估计成立:

$$\overline{G}_0 \leqslant R^{\frac{1}{\sigma}}. \tag{4.44}$$

证 由引理 4.2 中的(4.23) 或(4.24) 给出

$$\begin{aligned}\dot{G}_0 &= 2RG_0 - 2G_1 - \alpha J_1 \\ &\leqslant 2RG_0 - 2G_1\end{aligned} \tag{4.45}$$

(由 Hölder 不等式 $G_0 \leqslant \| 1 \|_{\sigma/(\sigma+1)} G_1^{\frac{1}{\sigma+1}}$),

$$\dot{G}_0 \leqslant 2RG_0 - 2G_0^{\sigma+1}, \tag{4.46}$$

解微分不等式即得(4.44).

定理 4.8 对一切 $d, \mu, \sigma > 0, m > 0$ 且满足

$$|1 + i\nu| \leqslant \frac{\sigma m + 1}{\sigma m}, \tag{4.47}$$

则有估计

$$\overline{G}_m \leqslant R^{\frac{1}{\sigma}+m}. \tag{4.48}$$

证 由引理 4.2,对 G_{m+1} 运用 Hölder 不等式,并对最后一项分部积分得

$$\begin{aligned}\frac{\dot{G}_m}{2(\sigma m+1)} \leqslant & RG_m - \frac{G_m^{m+1/m}}{G_0^{1/m}} - (\sigma m+1)\int |u|^{2\sigma m} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \\ & - \sigma m \mathrm{Re}\left[(1+i\nu)\int |u|^{2(\sigma m-1)} u^{*2} \nabla u \cdot \nabla u \mathrm{d}x\right] \\ \leqslant & RG_m - \frac{G_m^{m+1/m}}{G_0^{1/m}} - [(\sigma m+1) - \sigma m|1 \\ & + i\nu|]\int |u|^{2\sigma m} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{4.49}$$

因此,如 $\sigma m|1+i\nu|\leqslant\sigma m+1$,则上式右端最后一项非正.可以忽略,再注意到 $\overline{G}_0\leqslant R^{\frac{1}{\sigma}}$,由微分不等式(4.49)即得(4.48).

引理 4.9 对 $\sigma\geqslant 0$ 有如下不等式

$$\mathrm{Re}\left[\int|u|^{2\sigma}u^*\Delta u\mathrm{d}x\right]\leqslant-\frac{\sqrt{2\sigma+1}}{\sigma+1}\left|\int|u|^{2\sigma}u^*\Delta u\mathrm{d}x\right|, \tag{4.50}$$

$$\left|\mathrm{Im}\left[\int|u|^{2\sigma}u^*\Delta u\mathrm{d}x\right]\right|\leqslant\frac{\sigma}{\sigma+1}\left|\int|u|^{2\sigma}u^*\Delta u\mathrm{d}x\right|, \tag{4.51}$$

$$-J_2-\alpha^2G_2\leqslant-2\alpha\left|\int|u|^{2\sigma}u^*\Delta u\mathrm{d}x\right|. \tag{4.52}$$

证 分部积分得等式

$$\int|u|^{2\sigma}u^*\Delta u\mathrm{d}x=-\sigma\int\nabla u\cdot\nabla uu^{*2}|u|^{2\sigma-2}\mathrm{d}x$$
$$-(\sigma+1)\int|\nabla u|^2|u|^{2\sigma}\mathrm{d}x.$$

注意到 $|\nabla u\cdot\nabla u|\leqslant|\nabla u|^2$.考虑结构

$$z=\sigma\lambda re^{i\theta}-(\sigma+1)r, \tag{4.53}$$

其中 r 为正实数,$0\leqslant\lambda\leqslant 1$,则有

$$\mathrm{Re}z=\sigma\lambda r\cos\theta-(\sigma+1)r, \tag{4.54}$$

$$|z|^2=\sigma^2\lambda^2r^2+(\sigma+1)^2r^2-2\sigma(\sigma+1)\lambda r^2\cos\theta. \tag{4.55}$$

联合这两个方程得

$$\mathrm{Re}z=-\frac{|z|^2+[\sigma^2(1-\lambda^2)+2\sigma+1]r^2}{2(\sigma+1)r}$$
$$\leqslant-\frac{|z|^2+(2\sigma+1)r^2}{2(\sigma+1)r}.$$

对于最优的 r 即得(4.50),由等式

$$|z|^2=|\mathrm{Re}z|^2+|\mathrm{Im}z|^2,$$

即得(4.51).最后,(4.52)易从表达式的右端应用Cauchy-Schwarz不等式和 Young 不等式得到.

定理 4.10 对一切 $d,\sigma>0$ 且满足

$$-\frac{1+\mu\nu}{|\mu-\nu|}<\frac{\sqrt{2\sigma+1}}{\sigma},\tag{4.56}$$

则如下估计成立

$$\overline{F}_1\leqslant C(\mu,\nu)R^{1+\frac{1}{\sigma}}.\tag{4.57}$$

证　由引理4.2有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\dot{F}_1 &= R(J_1+\alpha^2G_1)-J_2-\alpha^2G_2+(1+\alpha^2)\\&\cdot\operatorname{Re}\left[\int|u|^{2\sigma}u^*\Delta u\mathrm{d}x\right]+(\mu-\alpha^2\nu)\operatorname{Im}\left[\int|u|^{2\sigma}u^*\Delta u\mathrm{d}x\right]\\&\quad(\text{由引理}4.9,k\in[0,1])\\&\leqslant R(J_1+\alpha^2G_1)-(1-k)(J_2+\alpha^2G_2)\\&\quad-\left[2k\alpha+(1+\alpha^2)\frac{\sqrt{2\sigma+1}}{\sigma+1}\right.\\&\quad\left.-|\mu-\alpha^2\nu|\frac{\sigma}{\sigma+1}\right]\left|\int|u|^{2\sigma}u^*\Delta u\mathrm{d}x\right|.\end{aligned}\tag{4.58}$$

上式右端最后一项的系数,可选取 α 使之非负,因而可以忽略.事实上,可设 $\mu\nu>0$,否则 $\mu\nu<0$.可设 $\mu>0,\nu>0$ 及极限情况 $k=1$,条件为

$$2\alpha+(1+\alpha^2)\frac{\sqrt{2\sigma+1}}{\sigma+1}-(\mu-\alpha^2\nu)\frac{\sigma}{\sigma+1}>0.\tag{4.59}$$

最优的 α 即为(4.56),现不等式(4.58)归结为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\dot{F}_1&\leqslant(\sigma+1)RF_1-(1-k)(J_2+\alpha^2G_2)\\&\quad(\text{对最后一项进行插值})\\&\leqslant(\sigma+1)RF_1-(1-k)C\frac{F_1^2}{G_0}.\end{aligned}\tag{4.60}$$

容易求解得到(4.57).

定理4.11　对复GL方程,σ,d 和 n 为正整数,对一切 $m\geqslant0$,$r\geqslant0$,且满足

$$\frac{\sigma d-2}{2\sigma}<m\leqslant n+1,\tag{4.61}$$

则有估计

$$\bar{J}_n \leqslant C(n,\mu)\bar{J}_r^{r_1}\bar{G}_m^{r_2} + \text{低价项}, \tag{4.62}$$

其中

$$r_1 = \frac{1}{1+n-r}, r_2 = \frac{(2+2\sigma-\sigma d+2n\sigma)(n-r)}{(2-d\sigma+2m\sigma)(1+n-r)}.$$

证 对(4.24)非线性项由推论4.6进行控制,对Laplace项作插值估计

$$J_n \leqslant J_{n+1}^{\frac{n-r}{n+1-r}} J_r^{\frac{1}{n+1-r}} \tag{4.63}$$

可得

$$\dot{J}_n \leqslant 2RJ_n + C_3(n,\mu)(G_m^s + G_m^{s_0}) - \frac{J_n^{\frac{n+1-r}{n-r}}}{J_r^{\frac{1}{n-r}}}. \tag{4.64}$$

解这个微分不等式即得(4.62),(4.61)来自推论4.6.

这个定理可应用如下:在定理4.10成立的区域,如 $d < 2 + \frac{2}{\sigma}$,可取 $r = m = 1$,如 $-\frac{1+\mu\nu}{|\mu-\nu|} < \frac{\sqrt{2\sigma+1}}{\sigma}$ 成立,得

$$\bar{J}_n \leqslant CR^{\frac{(1+\sigma)(2-d\sigma+2n\sigma)}{\sigma(2+2\sigma-d\sigma)}}. \tag{4.65}$$

当定理4.10失效,可取 $r = 0$,利用定理4.8中 G_m 的上界,可得

$$\bar{J}_n \leqslant CR^{\frac{-\sigma d+(1+m\sigma)[2+2n^2\sigma+n(2+2\sigma-\sigma d)]}{(1+n)\sigma(2-d\sigma+2m\sigma)}}, \tag{4.66}$$

其中

$$|1+i\nu| \leqslant \frac{\sigma m+1}{\sigma m}. \tag{4.67}$$

现考虑时间平均.

引理4.12 表述了某些量的时间平均永远囿于相应的时间渐近的上界,因此

$$\langle J_0\rangle \leqslant \bar{J}_0 \leqslant R^{\frac{1}{\sigma}}, \tag{4.68}$$

由时间平均方程(4.45)得

$$\langle G_1 + J_1\rangle = \langle RG_0 - \frac{1}{2}G_0\rangle. \tag{4.69}$$

利用引理4.12有

$$\langle J_1\rangle \leqslant R\langle G_0\rangle \leqslant R^{1+\frac{1}{\sigma}},$$

$$\langle G_1 \rangle \leqslant R \langle G_0 \rangle \leqslant R^{1+\frac{1}{\sigma}}. \tag{4.70}$$

当 $n > 1$ 时,没有适当的方法计算时间平均.虽然不存在最优方法,但可用插值不等式得到时间平均估计

$$\langle J_n \rangle \leqslant \langle J_s \rangle^{\frac{n-1}{s-1}} \langle J_1 \rangle^{\frac{s-n}{s-1}} \tag{4.71}$$

$$\leqslant \overline{J}_s^{\frac{n-1}{s-1}} \langle J_1 \rangle^{\frac{s-n}{s-1}}, \tag{4.72}$$

G_n 的时间平均($n > 1$)可类似得到.

最后,考虑动力长度.

设 $f(x)$ 为$[0,1]^d$ 上的充分光滑周期函数,k 为正数,作 F 氏展开.

$$f(x) = \sum_{h \in 2\pi z^d} \hat{f}_k e^{ihx} = \Big(\sum_{\| h \| \leqslant k} + \sum_{\| h \| > k} \Big) \hat{f}_k e^{ihx}, \tag{4.73}$$

这里 $\| h \| \equiv (h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_d^2)^{1/2}$,则对 $s > \dfrac{d}{2}$,可估计 $\| f \|_\infty$,即有

$$\| f \|_\infty \leqslant \sum_{\| h \| \leqslant k} | \hat{f}_{h_1} | + \sum_{\| h \| > k} \| h \|^{-s} \| h \|^s | \hat{f}_h |$$

(由 Cauchy - Schwarz 不等式)

$$\leqslant \Big(\sum_{\| h \| \leqslant k} 1^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{h \in 2\pi z^d} | \hat{f}_h |^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \Big(\sum_{\| h \| > k} \| h \|^{-2s} \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{h \in 2\pi z^d} \| h \|^{2s} | \hat{f}_h |^2 \Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.74}$$

不等式右端的第一,第三项能用和的积分近似估计,有

$$\| f \|_\infty \leqslant C_1 k^{\frac{d}{2}} \| f \|_2 + C_2 k^{\frac{d}{2}-s} \| \nabla^s f \|_2. \tag{4.75}$$

当取

$$k^s = C_3 \frac{\| \nabla^s f \|_2}{\| f \|_2}, \tag{4.76}$$

则(4.75)中二项相等,由此导出 Agmon 不等式,这里可把 k 考虑为动力截断波数,取 $f = \nabla^r u$, $n = s + r$,导致

$$N^{-d}(t) \sim k_{n,r}(t) = \left(\frac{J_n}{J_r} \right)^{\frac{1}{2(n-r)}}. \tag{4.77}$$

我们希望:

(ⅰ)$l^{-1} \sim k_{n,r}(t)$ 当 $t \to \infty$ 时保持有界;

(ⅱ)这个界在定性上是与 n, r 无关的.

令

$$\mathscr{J}_n = J_n + \beta 2^n R^{\frac{n+1}{\sigma}}, \tag{4.78}$$

$$\mathscr{K}_{n,r} = \left(\frac{\mathscr{J}_n}{\mathscr{J}_r}\right)^{\frac{1}{2(n-r)}}. \tag{4.79}$$

我们先估计 $\mathscr{K}_{n,r}^2$ 的时间平均,再叙述相应的时间渐近的界,由引理 4.2 和推论 4.4 可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathscr{J}}_n &\leqslant 2RJ_n + C_1 J_n G_m^s - J_{n+1} \\ &\leqslant 2R\mathscr{J}_n + C_1\mathscr{J}_n G_m^s - \mathscr{J}_{n+1} \\ &\leqslant 2R\mathscr{J}_n + C_1\mathscr{J}_n G_m^s - \mathscr{J}_n\left(\frac{\mathscr{J}_n}{\mathscr{J}_r}\right)^{\frac{1}{n-r}}. \end{aligned} \tag{4.80}$$

除以 $\mathscr{J}_n$,再取时间平均得.

$$\left\langle\frac{\dot{\mathscr{J}}_n}{\mathscr{J}_r} + \mathscr{K}_{n,r}^2\right\rangle \leqslant 2R + C_1\langle G_m^s\rangle. \tag{4.81}$$

由引理 4.1 和 $\mathscr{J}_n$ 具有下界可得

$$\langle\mathscr{K}_{n,r}^2\rangle \leqslant C_1\langle G_m^s\rangle. \tag{4.82}$$

固定 $m = 1$,对于亚临界和临界情况有估计

$$\begin{aligned} \langle\mathscr{K}_{n,r}^2\rangle &\leqslant C_1\langle G_1{}^{1+\frac{\sigma d-2}{2+2\sigma-d\sigma}}\rangle \\ &\leqslant C_1\langle G_1\rangle^{1+\frac{\sigma d-2}{2+2\sigma-\sigma d}} \\ &\leqslant C_2 R^{\frac{2(1+\sigma)}{2+2\sigma-\sigma d}}. \end{aligned} \tag{4.83}$$

对于超临界情况,固定 $s = 1$,有

$$\langle\mathscr{K}_{n,r}^2\rangle \leqslant C_1\langle G_{1+\frac{\sigma d-2}{2\sigma}}\rangle. \tag{4.84}$$

对于临界情况,$d\sigma = 2$,此时从(4.83),(4.84)有

$$\langle\mathscr{K}_{n,r}^2\rangle \leqslant C_1\langle G_1\rangle \leqslant C_3 R^{1+\frac{1}{\sigma}}. \tag{4.85}$$

注意到所有常数均与 β 无关,因此可选取 $\beta > 0$ 充分小,可得时间

渐近的界

$$\overline{\mathcal{K}}_{n,r}^2 \leqslant \left(\frac{\mathcal{J}_n}{\beta 2^r R^{r+\frac{1}{\sigma}}}\right)^{\frac{1}{n-r}}, \tag{4.86}$$

对 n 充分大,由(4.65)(4.66) 给出的关于 J_n 的界可得

$$\overline{\mathcal{K}}_{n,r}^2 \sim \begin{cases} \dfrac{C_5}{\beta} R^{\frac{2+2\sigma}{2+2\sigma-d\sigma}}, \text{在非黑暗区域上}, \\ \dfrac{C_6}{\beta} R^{\frac{2+2m\sigma}{2-d\sigma+2m\sigma}}, \text{在黑暗区域上}. \end{cases} \tag{4.87}$$

现考虑 L^∞ 估计

$$\langle \| u \|_\infty^{2\sigma} \rangle \leqslant C_1 \langle J_n^{r_1} G_p^{r_2} \rangle \leqslant C_1 \left\langle \left(\frac{\mathcal{J}_n}{\mathcal{J}_p}\right)^{r_1} \mathcal{J}_p^{r_1} G_p^{r_2} \right\rangle$$

(由 Hölder 不等式)

$$\leqslant C_1 \left\langle \left(\frac{\mathcal{J}_n}{\mathcal{J}_p}\right)^{\frac{1}{n-p}} \right\rangle^{r_1(n-p)} \left\langle \left(\mathcal{J}_p^{r_1} G_p^{r_2}\right)^{\frac{1}{1-r_1(n-p)}} \right\rangle^{1-r_1(n-p)}$$

$$\leqslant C_1 \langle \mathcal{K}_{n,p}^2 \rangle^{r_3} \langle \mathcal{J}_p^{r_4} \rangle^{r_5}, \tag{4.88}$$

其中

$$\mathcal{F}_n = J_n + G_n + \beta 2^n R^{n+\frac{1}{\sigma}},$$

$$r_1 = \frac{2d\sigma}{4n - 2dp\sigma + 4np\sigma}, \quad r_2 = \frac{(d-2n)\sigma}{-2n + dp\sigma - 2np\sigma},$$

$$r_3 = \frac{d(n-p)\sigma}{2n - dp\sigma + 2np\sigma}, \quad r_4 = \frac{2\sigma}{2 - d\sigma + 2p\sigma},$$

$$r_5 = \frac{n(-2 + d\sigma - 2p\sigma)}{-2n + dp\sigma - 2np\sigma}.$$

对亚临界和临界情况 $r_4 < 1$,置 $p = 1$.

$$r_3 = \frac{d(-1+n)\sigma}{2n - d\sigma + 2n\sigma}, \quad r_4 = \frac{2\sigma}{2 + 2\sigma - d\sigma},$$

$$r_5 = \frac{n(-2 - 2\sigma + d\sigma)}{-2n + d\sigma - 2n\sigma},$$

因此 $r_3 + r_5 = 1$,连同(4.83) 第一部分估计有

$$\langle \| u \|_\infty^{2\sigma} \rangle \leqslant C_2 \langle \mathcal{F}_1 \rangle^{1+\frac{d\sigma-2}{2+2\sigma-d\sigma}}. \tag{4.89}$$

对于临界和超临界情况,置 $r_4 = 1$,

$$r_3 = \frac{d(-2+2\sigma+d\sigma-2n\sigma)}{-2d+2d\sigma+d^2\sigma-4n\sigma-2dn\sigma},\ p = \frac{-2+2\sigma+d\sigma}{2\sigma},$$

$$r_5 = \frac{4n\sigma}{2d-2d\sigma-d^2\sigma+4n\sigma+2dn\sigma}.$$

因此 $r_3 + r_5 = 1$,连同估计(4.84)有

$$\langle \| u \|_\infty^{2\sigma} \rangle \leqslant C_3 \langle \mathscr{F}_{1+\frac{d\sigma-2}{2\sigma}} \rangle. \tag{4.90}$$

为了得到 L^∞ 模的时间渐近上界,我们能用插值,

$$\| u \|_\infty^{2\sigma} \leqslant CJ_n^{r_6} G_m^{r_7} + \text{低阶项}, \tag{4.91}$$

由定理 4.11 对于 J_n 的界和定理 4.8 或定理 4.10 关于 G_m 的界对充分大的 n 仍可得(4.87).

§5 一般 Ginzburg-Landau 方程解的水平集的 Hausdorff 测度

我们研究如下的复 GL 方程

$$u_t - (1+i\nu)\Delta u + (1+i\mu)|u|^2 u - au = 0, \tag{5.1}$$

其中分叉参数 $\nu \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ 和 $a \geqslant 0$ 给定. $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ 为未知函数. 考虑周期边界条件在 $\Omega = [0,1]^2$ 上,即有

$$\begin{aligned} u(x+1,y,t) &= u(x,y+1,t) \\ &= u(x,y,t),\ x,y \in \mathbb{R},\ t \in [0,\infty) \end{aligned} \tag{5.2}$$

和初始条件

$$u(x,y,0) = u_0(x,y),\ x,y \in \mathbb{R}, \tag{5.3}$$

这里 u_0 为给定的 Ω 周期的、局部平方可积函数.

这一节主要研究 GL 整体吸引子的振荡性质,即要估计 GL 方程整体吸引子零点集的 Hausdorff 测度. 为此,要用到基本的几何测度论知识,GL 方程解的 Gevrey 正则化,强挤压性等.

设 $\Omega = [0,L]^n$, $L > 0$, $n \in \mathbb{N}$. 令

$L_{\text{per}}^2(\Omega) = \left\{ f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \int_\Omega f^2 < \infty, f, \Omega \text{ 为周期的} \right\}$, 对任何 $f \in L_{\text{per}}^2(\Omega)$,具有 F 氏展开

$$f(x) = \sum_{j \in z^n} f_j e^{iqj \cdot x}, x \in \mathbb{R}^n, \tag{5.4}$$

其中 $f_j \in \mathbb{C}$ 为F氏系数,$q = 2\pi/L$,特别 $f_j = f_{-j}^*$, $\forall j \in z^n$,这里"*"号表示复数共轭.注意到

$$\| f \|_{L^2}^2 = \int_\Omega f^2 = L^n \sum_{j \in z^n} | f_j |^2,$$

$$| j | = | j_1 | + | j_2 | + \cdots + | j_n |,$$

$| j |_2 = (| j_1 |^2 + | j_2 |^2 + \cdots + | j_n |^2)^{1/2}, j = (j_1, j_2, \cdots, j_n) \in z^n.$

定义 $$\| f \|_m^2 = L^n \sum_{j \in z^n} | qj |_2^{2m} | f_j |^2, \tag{5.5}$$

对任何 $m \geqslant 0$,定义 Sobolev 空间

$$H_{\text{per}}^m(\Omega) = \{ f(x) = \sum_{j \in z^n} f_j e^{iqj \cdot x} : \| f \|_{H^m}^2 = \| f \|_m^2 + q^{2m} \| f \|_{L^2}^2 < \infty \}.$$

容易看到,如 $m \in \mathbb{N}$, $H_{\text{per}}^m(\Omega)$ 是所有这样的函数,$f \in L_{\text{per}}^2(\Omega)$,它的直到 m 阶广义导数在 Ω 上为平方可积.

现在来引入Gevrey类(实值函数),它的F氏系数指数趋于零,即令

$$\Gamma(r) = \left\{ f = \sum_{j \in z^n} f_j e^{iqj \cdot x} : \| f \|_{\Gamma(r)}^2 = L^n \sum_{j \in z^n} e^{2q|j|_2 r} | f_j |^2 < \infty \right\}, r \geqslant 0. \tag{5.6}$$

对任何在集 S 上的函数 f,以

$$N(f, S) = \{ x \in S : f(x) = 0 \}$$

表示零点(节点)集.

引理 5.1 设 f 为全纯函数在

$$\prod_\delta = \{ z \in \mathbb{C} : | \operatorname{Im} z | < \delta \}, \delta > 0$$

上,且不是0常数函数.设它满足

$$\sup_{z \in \prod_\delta} | f(z) | \leqslant M \max_{x \in [0, L]} | f(x) |, \tag{5.7}$$

其中 $M \geqslant 1, L \geqslant 0$,则

$$\mathrm{Card}[N(f,[0,L])] \leqslant \alpha_2, \alpha_2 = \alpha_2(\delta, M, L). \tag{5.8}$$

证 设 $x_1, \cdots, x_N \in [0,L]$ 为 f 在$[0,L]$上的不同零点,由 Schwartz 引理和(5.7) 推出

$$|f(x)| \leqslant \sup_{z\in \prod_\delta} \left|f(z)\right| \prod_{j=1}^{N} \left|\tanh \frac{\pi(x-x_j)}{4\delta}\right|$$

$$\leqslant M\left(\tanh \frac{\pi L}{4\delta}\right)^N \max_{y\in[0,L]} |f(y)|, \forall x \in [0,L],$$

因此

$$M\left(\tanh \frac{\pi L}{4\delta}\right)^N \geqslant 1,$$

由此得

$$N \leqslant \frac{\log M}{\log\coth(\pi L/4\delta)} \leqslant (\log M)e^{\frac{\pi L}{2\delta}} = \alpha_2.$$

上式 $M \geqslant 1$,且 $1/\log\coth x \leqslant e^{2x}, x \in$.

定理 5.2 设 $r > 0, f \in \Gamma(r)$ 且不是零函数,满足

$$\| f \|_{\Gamma(r)} \leqslant M \| f \|_{L^2}, \tag{5.9}$$

其中 $M > 0$,则存在 $\alpha_1 = \alpha_1(L, M, r, n)$ 使得

$$\mathscr{H}^{n-1}(N(f,\Omega)) \leqslant \alpha_1 = C_1 L^{n-1}(1 + \log M)e^{C_2 L/r}, \tag{5.10}$$

这里 $\mathscr{H}^{n-1}$ 表示$(n-1)$ 维 Hausdorff 测度.

在证明该定理之前,先注意 Agmon 不等式

$$\| f \|_{L^\infty} = \sup_{x\in\Omega} |f(x)| \leqslant C_3(\| f \|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \| f \|_n^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{n}{2}} \| f \|_{L^2}),$$

$$f \in H^n_{\mathrm{per}}(\Omega), \tag{5.11}$$

由(5.4),(5.5) 推出

$$\| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} \|_m^2 = L^n \sum_{j\in z^n} |qj|_2^{2m} |(iqj)^\alpha|_2^2 |f_j|^2$$

$$\leqslant L^n \sum_{j\in z^n} |qj|_2^{2(m+|\alpha|)} |f_j|^2$$

$$\leqslant \frac{L^n[2(m+|\alpha|)]!}{(2r)^{2(m+|\alpha|)}} \sum_{j\in z^n} |f_j|^2 e^{2q|j|_2 r}$$

$$\leqslant \frac{L^n(m+|\alpha|)!^2}{r^{2(m+|\alpha|)}} \sum_{j\in z^n} |f_j|^2 e^{2q|j|_2 r},$$

$$\forall \alpha \in N_0^n, m \in N_0, f \in H_{\text{per}}^{m+|\alpha|}(\Omega).$$

因此,(5.6)有

$$\left\| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} \right\|_m \leqslant \frac{(m+|\alpha|)!}{r^{m+|\alpha|}} \| f \|_{\Gamma(r)}, \alpha \in N_0^n,$$
$$m \in N_0, f \in \Gamma(r). \tag{5.12}$$

定理的证明由(5.11)和(5.12)得

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} \right\|_{L^\infty} \\
&\leqslant C_3 \left(\left\| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} \right\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} \right\|_n^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{n}{2}} \left\| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} \right\|_{L^2} \right) \\
&\leqslant \frac{C_3}{r^{|\alpha|}} \left[\frac{(|\alpha|!)^{\frac{1}{2}} [(n+|\alpha|)!]^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{n}{2}}} + q^{\frac{n}{2}} |\alpha|! \right] \| f \|_{\Gamma(r)} \\
&\leqslant \frac{C_3 |\alpha|! 2^{(n+|\alpha|)/2}}{r^{|\alpha|}} \left[\frac{(n!)^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{n}{2}}} + q^{\frac{n}{2}} \right] \| f \|_{\Gamma(r)} \\
&\leqslant \alpha_3 \frac{2^{|\alpha|} |\alpha|!}{r^{|\alpha|}} \| f \|_{\Gamma(r)},
\end{aligned} \tag{5.13}$$

其中

$$\alpha_3 = C_3 2^{\frac{n}{2}} \left(\frac{(n!)^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{n}{2}}} + q^{\frac{n}{2}} \right).$$

类似于下面(5.14)的估计,可知对任何 $x_0 \in \mathbb{R}^n$,级数 $\sum_{\alpha \in N_0^n} \left(\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} \right) (x - x_0)^\alpha$ 收敛,在任何 $x \in \mathbb{R}^n$,且 $|x - x_0| < \frac{r}{2n}$. 这就表明函数 f,除了一个零测度集外,在每点是实解析的,每点的解析半径至少为$\frac{r}{2n}$. 我们能在

$$\prod_\delta^n = \{ z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) : |\operatorname{Im} z_j| < \delta, \forall j \in \{1,2,\cdots,n\} \}$$

上延拓 f 为全纯函数 $\tilde{f}$. 其中 $\delta = \frac{r}{4n}$. 由(5.9),(5.13),对 $z \in \prod_\delta^n$ 有

$$
\begin{aligned}
|\tilde{f}(z)| &\leqslant \sum_{\alpha\in N_0{}^n}\left|\frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial x^\alpha}(\mathrm{Re}z)\right|\frac{\delta^\alpha}{\alpha!} \\
&\leqslant M\alpha_3\|f\|_{L^2}\sum_{\alpha\in N_0{}^n}\frac{2^{|\alpha|}|\alpha|!\delta^\alpha}{r^{|\alpha|}\alpha!} \\
&\leqslant ML^{\frac{n}{2}}\alpha_3\|f\|_{L^\infty}\sum_{\alpha=N_0{}^n}\frac{|\alpha|!}{(2n)^{|\alpha|}\alpha!} \\
&= ML^{\frac{n}{2}}\alpha_3\|f\|_{L^\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)^k}\sum_{|\alpha|=k}\frac{|\alpha|!}{\alpha!} \\
&= ML\frac{n}{2}\alpha_3\|f\|_{L^\infty}\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}=\alpha_4\|f\|_{L^\infty},
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

其中 $\alpha_4=2ML^{\frac{n}{2}}\alpha_3, N_0=\{0,1,2,\cdots\}$. 注意到如 $n=1$,引理 5.1 给出我们的断言,如 $n>1$,我们首先寻求 $x_0\in\Omega$ 使得

$$
|\tilde{f}(x_0)|\geqslant\frac{1}{\alpha_4}\sup_{z\in\prod_\delta^n}|\tilde{f}(z)|. \tag{5.15}
$$

利用简单的平移,能设 $x_0=0$,由[F,3;4.10]可知,存在奇性集 $S\subseteq\Omega$,具有 $\mathscr{H}^{n-1}(S)=0$ 使得 $N(f,\Omega)\setminus S$ 是可数的$(n-1)$维解析流形且具有测度

$$
\mathscr{H}^{n-1}[N(f,\Omega)]=\mathscr{H}^{n-1}(N(f,\Omega)\setminus S)<\infty
$$

集合的并集,令 $x_1=(-L,0,0,0,\cdots,0)$, $x_2=(-L,L,0,0,\cdots,0)$, $x_3=(-L,0,L,0,\cdots,0)$, $\cdots$, $x_n=(-L,0,0,\cdots,L)$. 对 $j=1,2,\cdots,n$ 和 $w\in S^{n-1}$, $l_j(w)$表示通过 x_j 具方向 w 的直线和流形$N(f,\Omega)\setminus S$ 的交点数目. 简单的几何运算可得

$$
\mathscr{H}^{n-1}(N(f,\Omega))\leqslant C_4L^{n-1}\sum_j\int_{S^{n-1}}l_i(w)\mathrm{d}w, \tag{5.16}
$$

其中 C_4 仅依赖于 n. 对固定的 $j\in\{1,2,\cdots,n\}$和 $w\in S^{n-1}$,估计 $l_j(w)$,我们仅需考虑 $w\in S^{n-1}$,对它 $l_j(w)<\infty$. 事实上,考虑函数 $g_j:\Omega\to S^{n-1}$定义为

$$
g_j(x)=\frac{x-x_j}{|x-x_j|},\quad x\in\Omega,
$$

则由[F,2,10.11]可得

$$\int_{S^{n-1}} l_j(\nu)\mathrm{d}\nu \leqslant (\mathrm{Lip}\ g_j)^{n-1}\mathscr{H}^{n-1}(N(f,\Omega)) < \infty,$$

这里 Lip g_j 为 g_j 的 Lip 常数,这就表明 $l_j(\nu)<\infty$,对于几乎处处 $\nu\in S^{n-1}$成立.因此可设

$$\phi(t)=\tilde{f}(x_j+tw),\quad t\in \mathrm{II}_\delta$$

不是零函数,由(5.15)得

$$|\phi(0)|=|f(x_j)|=|f(0)|\geqslant\frac{1}{\alpha_4}\sup_{z\in \mathrm{II}_\delta^n}|\tilde{f}(z)|$$

$$\geqslant\frac{1}{\alpha_4}\sup_{t\in \mathrm{II}_\delta}|\phi(t)|.$$

由引理 5.1 推出

$$l_j(w)\leqslant \alpha_2(\delta,\alpha_4,L\sqrt{n+3}),$$

这里$\max\limits_{x\in\Omega}\mathrm{dist}(x,\Omega)=L\sqrt{n+3}$.联系(5.16)最后得

$$\mathscr{H}^{n-1}(N(f,\Omega))\leqslant C_5L^{n-1}\alpha_2(\delta,\alpha_4,L\sqrt{n+3}).$$

定理证毕.

为了研究 GL 整体吸引子零点集的测度,我们引用一些有关 GL 方程整体吸引子,Gevrey 正则性以及挤压性的已知结果.

设 $\Omega=[0,1]^2$,H 为复值,具 Ω 周期函数,且平方可积的函数空间.对任何 $f\in H$,它的 F 氏展开为

$$f(x)=\sum_{j\in z^2} f_j e^{i2\pi jx},x\in\mathbb{R}^2,\tag{5.17}$$

其中 $f_j\in\mathbb{C}$ $(j\in z^2)$.H 为 Hilbert 空间,具内积和模

$$(f,g)=\mathrm{Re}\int_\Omega fg^*,f,g\in H,$$

$$\|f\|_{L^2}=(f,f)^{\frac{1}{2}},f\in H.$$

若 f 如(5.17),则 $\|f\|_{L^2}^2=\sum\limits_{j\in z^2}|f_j|^2$.令

$$A^s f=\sum_{j\in z^2}(|2\pi j|_2^2+1)^s f_j e^{2\pi j\cdot x},s\geqslant 0,$$

$|j|_2^2 = (j^{(1)})^2 + (j^{(2)})^2, \forall j = (j^{(1)}, j^{(2)}) \in z^2$,对一切 $s \geqslant 0$, A^s 是正定闭算子具有定义区域

$$D(A^s) = \{g = \sum_{j \in z^2} g_j e^{2\pi i j x} \in H : |A^s g|^2$$
$$= \sum_{j \in z^2} |g_j|^2 (|2\pi j|_2^2 + 1)^{2s} < \infty\}.$$

注意到 $A_f = -\Delta f + f, f \in D(A)$,即有

$$\| A^{\frac{1}{2}} f \|_{L^2} \geqslant \| f \|_{L^2}, f \in D(A^{\frac{1}{2}}).$$

设 $u' = u_t, B(u_1, u_2, u_3) = u_1 u_2 u_3^*$,能写 GL 方程具形式

$$u' + (1 + i\nu) Au + (1 + i\mu) B(u, u, u) - (a + 1 + i\nu) u = 0. \tag{5.18}$$

关于非线性项 B 具有不等式

$$|(B(u_1, u_2, u_3), u_4)| \leqslant \| u_1 \|_{L^2} \| u_2 \|_{L^\infty} \| u_3 \|_{L^\infty} \| u_4 \|_{L^2}, \tag{5.19}$$

$$|(B(u_1, u_2, u_3), u_4)| \leqslant \| u_1 \|_{L^\infty} \| u_2 \|_{L^\infty} \| u_3 \|_{L^2} \| u_4 \|_{L^2}$$

和

$$|(B(u_1, u_2, u_3), u_4)| \leqslant C_6 \prod_{j=1}^{4} \| u_j \|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \| A^{\frac{1}{2}} u_j \|_{L^2}^{\frac{1}{2}}, \tag{5.20}$$

对一切出现于右端的 u_1, u_2, u_3, u_4 的模均为有限.

已知[12]对任何 $u_0 \in H$,存在(5.18)的解 $u(t) = S(t) u_0 (t \geqslant 0)$, $u(0) = u_0$,解算子 S 具有性质:

(i) $S(t) H \subseteq H, \forall t \geqslant 0, S(t): H \to H$ 是单射和连续的;

(ii) $S(t + s) u_0 = S(t) S(s) u_0, \forall s, t \geqslant 0, u_0 \in H$;

(iii) 存在常数 ρ_1, ρ_2, ρ_3 和 t_1 仅依赖于 ν、μ 和 a 使得

$$\| S(t) u_0 \|_{L^2} \leqslant \rho_1, u_0 \in H, t \geqslant t_1,$$

$$\| A^{\frac{1}{2}} S(t) u_0 \|_{L^2} \leqslant \rho_2, u_0 \in H, t \geqslant t_1,$$

$$\| S(t) u_0 \|_{L^\infty} \leqslant \rho_3, u_0 \in H, t \geqslant t_1.$$

令 $B_{\rho_1} = \{u_0 \in H : \| u_0 \|_{L^2} \leqslant \rho_1\}$,整体吸引子 $\mathscr{A}$ 为 $\supset \mathscr{A} =$

$\bigcap_{t\geq 0} S(t)B_{\rho_1}$.

整体吸引子具有性质:

(a) $\mathscr{A}$是 $D(A^{\frac{1}{2}})$的非空的紧子集;

(b) $S(t)\mathscr{A}=\mathscr{A}, t\geq 0$;

(c) $\| u_0 \|_{L^2}\leqslant \rho_1, u_0\in \mathscr{A}$;

(d) $\lim_{t\to\infty} \sup_{\| u_0 \|_{L^2}\leqslant M} \inf_{v_0\in\mathscr{A}} \| S(t)u_0 - v_0 \|_{L^2}=0, \forall M>0$.

引入算子

$$e^{rA^{\frac{1}{2}}} f = \sum_{j\in z^2} f_j e^{(|2\pi j|_2^2+1)^{\frac{1}{2}}} e^{2\pi i j\cdot x}, r\geqslant 0,$$

对一切 $f = \sum_{j\in z^2} f_j e^{2\pi i j\cdot x} \in D(e^{rA^{\frac{1}{2}}})$

$$= \{g = \sum_{j\in z^2} g_j e^{2\pi i j\cdot x}: \| g \|_{G(r)} = \| e^{rA^{\frac{1}{2}}} g \|_{L^2}^2$$

$$= \sum_{j\in z^2} | g_j |^2 e^{2(|2\pi j|_2^2+1)^{\frac{1}{2}} r} < \infty\}.$$

集合 $D(e^{rA^{\frac{1}{2}}})$ 称为复值函数具参数 r 的 Gevrey 类,它是一个 Hilbert 空间,具有内积

$$(f,g)_{G(r)} = (e^{rA^{\frac{1}{2}}} f, e^{rA^{\frac{1}{2}}} g), f,g \in D(e^{rA^{\frac{1}{2}}}).$$

命题5.3 存在常数 $t_2 = t_2(\nu,\mu,a)$ 和 $\alpha_5 = \alpha_5(\nu,\mu,a)$ 使得以下是正确的:如 $\| A^{\frac{1}{2}} S(t)u_0 \|_{L^2} \leqslant \rho_2, \forall t\geqslant 0$,则

$$\| A^{\frac{1}{2}} u(t) \|_{G(\alpha_5 t/t_2)} \leqslant 2\rho_2, \quad 0\leqslant t\leqslant t_2,$$

$$\| A^{\frac{1}{2}} u(t) \|_{G(\alpha_5)} \leqslant 2\rho_2, \quad t\geqslant t_2.$$

命题5.4 存在 $\alpha_6 = \alpha_6(\nu,\mu,a), \alpha_7 = \alpha_7(\nu,\mu,a) > 0$ 使得以下是正确的:对任何两个解 u_1 和 u_2 满足

$$\| A^{\frac{1}{2}} u_j(t) \|_{L^2} \leqslant \rho_2, \quad t\geqslant 0, \quad j = 1,2,$$

则存在惟一的 $t_3 = t_3(\nu,\mu,a,u_1,u_2) \in [0,\infty)$ 使得

$$\| A^{\frac{1}{2}}(u_1(t) - u_2(t)) \|_{L^2} > \alpha_6 \| u_1(t) - u_2(t) \|_{L^2},$$
$$t \in [0, t_3),$$
$$\| u_1(t) - u_2(t) \|_{L^2} \leqslant \| u_1(0) - u_2(0) \|_{L^2}^{e^{-\alpha_7 t}},$$
$$t \in [0, t_3),$$

而

$$\| A^{\frac{1}{2}}(u_1(t) - u_2(t)) \|_{L^2} \leqslant \alpha_6 \| u_1(t) - u_2(t) \|_{L^2},$$
$$t \in [t_3, \infty).$$

现研究两个解的差的 Gevrey 类性质. 令 $u_k \in D(e^{rA^{\frac{1}{2}}}), k = 1,2,3,4, r > 0$:

$$u_k = \sum_{j \in z^2} u_{k,j} e^{2\pi i j \cdot x}.$$

令

$$\tilde{u}_k = \sum_{j \in z^2} \tilde{u}_{k,j} e^{2\pi i j \cdot x} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} | u_{kj} | e^{(|2\pi j|_2^2 + 1)^{1/2}} e^{2\pi i j \cdot x},$$
$$\| A^s u \|_{G(r)} = \| A^s \tilde{u}_k \|_{L^2}, s \geqslant 0, k \in \{1,2,3,4\}. \tag{5.21}$$

引理 5.5 我们有

$$| (B(u_1, u_2, u_3), u_4)_{G(r)} | \leqslant (B(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3), \tilde{u}_4).$$

证 设 $\phi(j) = (| 2\pi j |_2^2 + 1)^{1/2}$, $\forall j \in z^2$, 我们有

$$\begin{aligned}
&| (B(u_1, u_2, u_3), u_4)_{G(r)} | \\
&= \left| \mathrm{Re} \sum_{j,k,m \in z^2} u_{1,j} u_{2,j} u_{3,j}^* u_{4,j+k-m}^* e^{2\phi(j+k-m)} \right| \\
&\leqslant \sum_{j,k,m \in z^2} | u_{1,j} | | u_{2,j} | | u_{3,j}^* | | u_{4,j+k-m}^* | e^{2\phi(j+k-m)} \\
&= \sum_{j,k,m \in z^2} \tilde{u}_{1,j} \tilde{u}_{2,j} \tilde{u}_{3,j} \tilde{u}_{4,j+k-m} e^{\phi(j+k-m) - \phi(j) - \phi(k) - \phi(m)} \\
&\leqslant \sum_{j,k,m \in z^2} \tilde{u}_{1,j} \tilde{u}_{2,j} \tilde{u}_{3,j} \tilde{u}_{4,j+k-m} \\
&= (B(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3), \tilde{u}_4).
\end{aligned}$$

上面最后不等式成立,是因为 ϕ 是偶函数,且

$$\phi(j+k)=\phi(j)+\phi(k), j,k\in z^2.$$

由引理 5.5,(5.21) 和(5.20) 推出

$$|(B(u_1,u_2,u_3),u_4)_{G(r)}|\leqslant C_6\prod_{j=1}^{4}\|u_j\|_{G(r)}^{\frac{1}{2}}\|A^{\frac{1}{2}}u_j\|_{G(r)}^{\frac{1}{2}}, \tag{5.22}$$

其中 $u_1,u_2,u_3,u_4\in D(A^{\frac{1}{2}}e^{rA^{\frac{1}{2}}})$.

引理 5.6 设 u_1 和 u_2 为两个解且满足

$$\|A^{\frac{1}{2}}u_j(t)\|_{G(\alpha_5)}\leqslant 2\rho_2,\quad t\geqslant 0,\quad j=1,2, \tag{5.23}$$

$$\|u_j(t)\|_{L^\infty}\leqslant\rho_3,\quad t\geqslant 0,\quad j=1,2, \tag{5.24}$$

则存在常数 $\alpha_8=\alpha_8(\nu,\mu,a)$ 和 $t_4=t_4(\nu,\mu,a)$ 使得,如

$$\|A^{\frac{1}{2}}(u_1(t)-u_2(t))\|_{L^2}\leqslant\alpha_6\|u_1(t)-u_2(t)\|_{L^2}, t\geqslant 0, \tag{5.25}$$

则有

$$\|u_1(t)-u_2(t)\|_{G(\alpha_5)}\leqslant\alpha_8\|u_1(t)-u_2(t)\|_{L^2}, t\geqslant t_4. \tag{5.26}$$

证 令 $v=u_1-u_2$,注意到

$$v'+(1+i\nu)Av+(1+i\mu)(B(u_1,u_2,v)$$
$$+B(v,u_1+u_2,u_2))-(a+1+i\nu)v=0, \tag{5.27}$$

固定任何 $\alpha>0$,令 $\phi(t)=(v,v)_{G(\alpha t)}$,则如 $0<\alpha t<\alpha_5$,我们有

$$\frac{1}{2}\phi'(t)=(v',v)_{G(\alpha t)}+\alpha(A^{\frac{1}{2}}v,v)_{G(\alpha t)}=-(Av,v)_{G(\alpha t)}$$
$$-((1+i\mu)B(u_1,u_1,v),v)_{G(\alpha t)}-((1+i\mu)$$
$$B(v,u_1+u_2,u_2),v)_{G(\alpha t)}+(a+1)\|v\|_{G(\alpha t)}^2$$
$$+\alpha\|A^{\frac{1}{4}}v\|_{G(\alpha t)}^2,$$

其中 $(i\nu v,v)_{G(\alpha t)}=(i\nu Av,v)_{G(\alpha t)}=0$. 由(5.22)

$$\frac{1}{2}\phi'(t)+\|A^{\frac{1}{2}}v\|_{G(\alpha t)}^2\leqslant C_6(1+\mu^2)^{1/2}\|u_1\|_{G(\alpha t)}$$

$$\|A^{\frac{1}{2}}u_1\|_{G(\alpha t)}\|v\|_{G(\alpha t)}\|A^{\frac{1}{2}}v\|_{G(\alpha t)}+C_6(1+\mu^2)^{\frac{1}{2}}\|u_1$$

$$+ u_2 \|_{G(\alpha t)}^{\frac{1}{2}} \| A^{\frac{1}{2}}(u_1 + u_2) \|_{G(\alpha t)}^{\frac{1}{2}} \times \| u_2 \|_{G(\alpha t)}^{\frac{1}{2}}$$

$$\| A^{\frac{1}{2}} u_2 \|_{G(\alpha t)}^{\frac{1}{2}} \| v \|_{G(\alpha t)} \| A^{\frac{1}{2}} v \|_{G(\alpha t)} + (a+1) \| v \|_{G(\alpha t)}^2$$

$$+ \alpha \| v \|_{G(\alpha t)} \| A^{\frac{1}{2}} v \|_{G(\alpha t)} \leqslant C_6^2 (1 + \mu^2) \| u_1 \|_{G(\alpha t)}^2$$

$$\| A^{\frac{1}{2}} u \|_{G(\alpha t)}^2 \| u \|_{G(\alpha t)}^2 + \frac{1}{4} \| A^{\frac{1}{2}} v \|_{G(\alpha t)}^2 + C_6^2 (1 + \mu^2) \| u_1$$

$$+ u_2 \|_{G(\alpha t)} \| A^{\frac{1}{2}}(u_1 + u_2) \|_{G(\alpha t)} \times \| u_2 \|_{G(\alpha t)}$$

$$\| A^{\frac{1}{2}} u_2 \|_{G(\alpha t)} \| v \|_{G(\alpha t)}^2 + \frac{1}{4} \| A^{\frac{1}{2}} v \|_{G(\alpha t)}^2 + (a+1)$$

$$\| v \|_{G(\alpha t)}^2 + \frac{\alpha^2}{2} \| v \|_{G(\alpha t)}^2 + \frac{1}{2} \| A^{\frac{1}{2}} v \|_{G(\alpha t)}^2,$$

$$0 < \alpha t < \alpha_5.$$

因此(5.23)推出

$$\phi'(t) \leqslant (\alpha_9 + \alpha^2) \phi(t), t \in \left[0, \frac{\alpha_5}{\alpha}\right],$$

其中 $\alpha_9 = C_7(1 + \mu^2)\rho_2^4 + 2a + 2$,于是

$$\| v(t) \|_{G(\alpha t)}^2 \leqslant e^{(\alpha_9 + \alpha^2)t} \| v(0) \|_{L^2}^2, t \in \left[0, \frac{\alpha_5}{\alpha}\right].$$

选取 $\alpha = \alpha_9^{\frac{1}{2}}, t = \alpha_5 / \sqrt{\alpha_9}$,可得

$$\| v(t_4) \|_{G(\alpha_5)} \leqslant e^{\alpha_5 \alpha_9^{\frac{1}{2}}} \| v(0) \|_{L^2},$$

其中 $t_4 = \alpha_5 / \sqrt{\alpha_9}$,对时间平移一下,有

$$\| v(t + t_4) \|_{G(\alpha_5)} \leqslant e^{\alpha_5 \alpha_9^{\frac{1}{2}}} \| v(t) \|_{L^2}, t \geqslant 0. \tag{5.28}$$

另一方面,作(5.27)和 v 的内积,利用(5.19)得

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| v \|_{L^2}^2 = - \| A^{\frac{1}{2}} v \|_{L^2}^2 - ((1 + i\mu) B(u_1, u_2, v), v)$$

$$- ((1 + i\mu) B(v, u_1 + u_2, u_2), v) + (a+1) \| v \|_{L^2}^2$$

$$\geqslant - \alpha_6^2 \| v \|_{L^2}^2 - (1 + \mu^2)^{1/2} \| u_1 \|_{L^\infty}^2 \| v \|_{L^2}^2$$

$$- (1 + \mu^2)^{1/2} \| u_1 \|_{L^\infty} \| u_1 + u_2 \|_{L^\infty} \| v \|_{L^2}^2$$

$$+ (a+1) \| v \|_{L^2}^2$$

$$\geqslant -\left[\alpha_6^2 + 3\rho_3^2(1+\mu^2)^{1/2} - (a+1)\right]\|v\|_{L^2}^2$$

$$= -\alpha_{10}\|v\|_{L^2}^2.$$

连同(5.28)得

$$\|v(t+t_4)\|_{G(\alpha_5)} \leqslant e^{\alpha_5\alpha_9^{\frac{1}{2}}}\|v(t)\|_{L^2}$$

$$\leqslant e^{\alpha_5\alpha_9^{\frac{1}{2}}+\alpha_{10}t_4}\|v(t+t_4)\|_{L^2}, t \geqslant 0,$$

置 $\alpha_8 = e^{\alpha_5\alpha_9^{\frac{1}{2}}+\alpha_{10}t_4}$,即得引理的结论.

定理 5.7 设 $u_1^0, u_2^0 \in \mathscr{A}$,则有

$$\|u_1^0 - u_2^0\|_{G(\alpha_5)} \leqslant \alpha_8\|u_1^0 - u_2^0\|_{L^2}.$$

证 设 u_1, u_2 为GL方程分别具 $u_1(0) = u_1^0$ 和 $u_2(0) = u_2^0$ 的两个解.因 $u_1^0, u_2^0 \in \mathscr{A}$,我们设 u_1, u_2 也对 $t < 0$ 有定义.由解算子 $S(t)$ 的性质(ⅲ)可得 $\|u_j(t)\|_{L^2} \leqslant \rho_1$, $\|A^{\frac{1}{2}}u_j(t)\|_{L^2} \leqslant \rho_2$, $\|u_j(t)\|_{L^\infty} \leqslant \rho_3, t \in R, j = 1,2$.由命题 5.3 推出

$$\|A^{\frac{1}{2}}u_j(t)\|_{G(\alpha_5)} \leqslant 2\rho_2, t \in R, j = 1,2.$$

而命题 5.4 推出

$$\|A^{\frac{1}{2}}(u_1(t) - u_2(t))\|_{L^2} \leqslant \alpha_6\|u_1(t) - u_2(t)\|_{L^2}, t \in R.$$

因此,由引理 5.6 有

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{G(\alpha_5)} \leqslant \alpha_8\|u_1(t) - u_2(t)\|_{L^2}, t \in R.$$

当 $t = 0$ 时,给出我们的结论.

现考虑水平集的 Hausdorff 长度.

引理5.8 如 $\|f\|_{G(r)} \leqslant M\|f\|_{L^2}, f \in H$,则下列情况之一成立:

(ⅰ) $\|\mathrm{Re}f\|_{\Gamma(r)} \leqslant M\|\mathrm{Re}f\|_{L^2}$;

(ⅱ) $\|\mathrm{Im}f\|_{\Gamma(r)} \leqslant M\|\mathrm{Im}f\|_{L^2}$.如 $\mathrm{Re}f = 0$,则(ⅱ)成立,如 $\mathrm{Im}f = 0$,则(ⅰ)成立.

注意到 $f = \sum_{j \in Z^2} f_j e^{2\pi i j \cdot x}, f_j \in \mathbb{C}$,则

$$\mathrm{Re}f = \sum_{j\in z^2} \frac{1}{2}(f_j + f^*_{-j})e^{2\pi ij\cdot x},$$

$$\mathrm{Im}f = \sum_{j\in z^2} \frac{1}{2}i(-f_j + f^*_{-j})e^{2\pi ij\cdot x}.$$

证 我们有

$$\begin{aligned}
&\|\mathrm{Re}f\|^2_{\Gamma(r)} + \|\mathrm{Im}f\|^2_{\Gamma(r)} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{j\in z^2} e^{4\pi|j|_2 r}(|f_j + f^*_{-j}|^2 + |f_j - f^*_{-j}|^2) \\
&= \sum_{j\in z^2}|f_j|^2 e^{4\pi|j|_2 r} \leqslant \sum_{j\in z^2}|f_j|^2 e^{2(|2\pi j|_2^2+1)^{1/2} r} = \|f\|^2_{G(r)} \\
&\leqslant M^2\|f\|^2_{L^2} = M^2(\|\mathrm{Re}f\|^2_{L^2} + \|\mathrm{Im}f\|^2_{L^2}),
\end{aligned}$$

易得引理.

对任何可微函数 f, f'_w 表示 f 沿方向 $w\in S^1$ 的方向导数.

引理 5.9 令 $v_1 = \mathrm{Re}u_0, v_2 = \mathrm{Im}u_0, u_0\in \mathscr{A}$,则存在 $\alpha_{11} = \alpha_{11}(\nu,\mu,a)$使得对任何 $w\in S^1$,如$(u_0)'_w\neq 0$,有

$$\mathscr{H}^1(N(v_j)'_w,\Omega))\leqslant \alpha_{11} \tag{5.29}$$

至少对一个 $j\in\{1,2\}$成立.

证 $w\in S^1$ 是任意的,GL 方程对于空间变元的平移是不变的,因此,由定理 5.7 有

$$\frac{1}{h}\|u_0(\cdot + hw) - u_0(\cdot)\|_{G(\alpha_5)}$$

$$\leqslant \frac{\alpha_8}{h}\|u_0(\cdot + hw) - u_0(\cdot)\|_{L^2}, h\in R\setminus\{0\}.$$

当 $h\to 0$ 时,推出

$$\|(u_0)'_w\|_{G(\alpha_5)} \leqslant \alpha_8\|(u_0)'_w\|_{L^2}, \tag{5.30}$$

如$(v_1)'_w\neq 0,(v_2)'_w\neq 0$,则由引理 5.8 有

$$\|(v_j)'w\|_{\Gamma(\alpha_5)}\leqslant \alpha_8\|(v_j)'w\|_{L^2} \tag{5.31}$$

至少对一个 $j\in\{1,2\}$成立,对这个 j,由定理 5.2 给出(5.29).其中 $\alpha_{11} = \alpha_{11}(1,\alpha_8,\alpha_5,2)$.另一方面,$(v_k)'_w = 0, k\in\{1,2\}$,则(5.30)推出(5.31),$j = k$.再利用定理 5.2 给出(5.29).

定理 5.10 设 $u_0 \in \mathscr{A}$ 为一个非常数函数,则存在 $\alpha_{12} = \alpha_{12}(\nu, \mu, a)$ 使得

$$\min\{\mathscr{H}^1(N(\operatorname{Re}(u_0 - \lambda), \Omega)), \mathscr{H}^1(N(\operatorname{Im}(u_0 - \lambda), \Omega))\} \leqslant \alpha_{12}, \lambda \in \mathbb{C}. \tag{5.32}$$

推论,设 $u_0 \in \mathscr{A}$ 为一个非常数函数,则或者

$$\mathscr{H}^1(N(\operatorname{Re}(u_0 - \lambda_1), \Omega)) \leqslant \alpha_{12}, \lambda_1 \in \mathbb{R}, \tag{5.33}$$

或者

$$\mathscr{H}^1(N(\operatorname{Im}(u_0 - \lambda_2), \Omega)) \leqslant \alpha_{12}, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \tag{5.34}$$

或者两者都成立. 如 $\operatorname{Re}u_0$ 是一个常数函数,则我们有(5.34),如 $\operatorname{Im}u_0$ 是一个常数函数,则我们有(5.33).

先证推论. 设不等式(5.33)对某 $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ 失败,对任意 $\lambda_2 \in \mathbb{R}$,令 $\lambda = {}_1 + i\lambda_2$,则(5.32)推出(5.34). 类似地,我们如能证(5.34)不成立,则(5.33)成立.

现设 $\operatorname{Re}u_0$ 是常数函数,令 $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$,其中 $\lambda_1 = \operatorname{Re}u_0$,$\lambda_2$ 是任意的,则由(5.32)推出(5.34),类似地我们能证,若 $\operatorname{Im}u_0$ 是常数,则推出(5.33)成立.

在证明定理 5.10 之前,我们先引入某些符号,设 $f \in H$, $w = (w^{(1)}, w^{(2)}) \in S^1$, $w^{\perp} = (-w^{(2)}, w^{(1)}) \in S^1$. 对任何 $t \in \mathbb{R}$,用 $I(t)$ 表示 $f|_{\Omega}$ 在通过 $tw^{\perp}$ 是方向 w 的直线上零点的数目($I(t) = 0, t > \sqrt{2}$). 令

$$l(w, f) = \int I(t) \mathrm{d}t,$$

这个积分是存在的.

现证定理 5.10. 因 u_0 为非常数函数,则存在 $w_1, w_2, w_3 \in S^1$ 使得它们之间任何两个的夹角为 $2\pi/3$. $(u_0)'_{w_j}$ 为非零常数,$j \in \{1,2,3\}$,令 $u_1 = \operatorname{Re}u_0$, $u_2 = \operatorname{Im}u_0$,令 $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbb{C}$ $(\lambda_1, \lambda_2 \in R)$,我们希望找到

$$m = \min_{j=1,2} \mathscr{H}^1(N(u_j - \lambda_j, \Omega))$$

的上界. 如 $u_1 - \lambda_1$ 和 $u_2 - \lambda_2$ 均不是零函数,集合 $N(u_1 - \lambda_1, \Omega)$

和 $N(u_2-\lambda_2,\Omega)$ 由可数多解析曲线所组成，也可能有有限数的奇点，这些解析曲线的两条在每点上形成夹角至少为 $\pi/6$，这些曲线具方向 w_1, w_2 和 w_3，因此

$$m\leqslant 2(l(w_k,u_1-\lambda_1)+l(w_l,u_1-\lambda_1)) \tag{5.35}$$

和

$$m\leqslant 2(l(w_k,u_2-\lambda_2)+l(w_l,u_2-\lambda_2)) \tag{5.36}$$

对一切 $k,l\in\{1,2,3\}, k\neq l$，上述结论是正确的. 如果函数 $u_1-\lambda_1$ 或 $u_2-\lambda_2$ 之一为零函数，由(5.35)存在 $k_1,k_2\in\{1,2,3\}(k_1\neq k_2)$ 使得

$$l(w_{k_j},u_1-\lambda_1)\geqslant\frac{m}{4},\quad j=1,2.$$

而由(5.36)，存在 $k_3,k_4\in\{1,2,3\}(k_3\neq k_4)$，对它有

$$l(w_{k_j},u_2-\lambda_2)\geqslant\frac{m}{4},\quad j=3,4.$$

因此取 $k\in\{k_1,k_2\}\cap\{k_3,k_4\}$ 可得

$$l(w_k,u_j-\lambda_j)\geqslant\frac{m}{4},\quad j=1,2.$$

由 Rolle 定理，可得

$$l(w_k,(u_j)'_{w_k})\geqslant\frac{m}{4}-\sqrt{2},\quad j=1,2,$$

于是由[F,2,10.11]得

$$\mathscr{H}^1((u_j)'_{w_k},\Omega)\geqslant\frac{m}{4}-\sqrt{2},\quad j=1,2.$$

引理 5.9 最后给出 $m\leqslant 4(\alpha_{11}+\sqrt{2})=\alpha_{12}$. 定理证毕.

如果解的节点不属于整体吸引子，我们有如下结果.

定理 5.11 设 u_1 和 u_2 为 GL 方程的解，$v=u_1-u_2$，则存在 $\alpha_{13}=\alpha_{13}(\nu,\mu,a)$ 使得至少下列可能性之一成立：

(ⅰ) $\lim\limits_{t\to\infty}\|v(t)\|_{L^2}=0$,

(ⅱ) 存在 $t_5=t_5(\nu,\mu,a,u_1,u_2)$ 使得

$$\min\{\mathscr{H}^1(N(\mathrm{Re}v(t),\Omega)),\mathscr{H}^1(N(\mathrm{Im}v(t),\Omega))\}\leqslant\alpha_{13},t\geqslant t_5. \tag{5.37}$$

证 由命题 5.3 推出不等式(5.23),(5.24)成立,$t \geqslant t_1 + t_2$,设(i)不成立,则由命题 5.4 推出 $t_3 < \infty$ 和不等式(5.25),$t \geqslant t_1 + t_2 + t_3 = t_5$. 定理 5.2,引理 5.8 和引理 5.6 可推出(5.37),对适当的 α_{13}.

附注 以下举一个例子,说明很难扩展定理 5.10 的结果. 对任何 $n \in \mathbb{N}$,构造 GL 方程的解 u_n 使得

$$\mathscr{H}^1(N(u_n(\cdot,t),\Omega)) = n+1, \quad t \in [0,\infty). \tag{5.38}$$

考虑 ODE

$$\phi'(t) + (2n\pi)^2(1+i\nu)\phi(t) + (1+i\mu)|\phi(t)|^2\phi(t) - a\phi(t) = 0,$$

具初值 $\phi(0) = \phi_0$, $\phi_0 \in \mathbb{C}$ 非零,因

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\phi(t)|^2 + (2n\pi)^2|\phi(t)|^2 + |\phi(t)|^4 - a|\phi(t)|^2 = 0$$

具有上述问题的一个解 $\phi:[0,\infty) \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. 容易验证

$$u(x,y,t) = \phi(t)e^{2\pi i n x}, x, y \in \mathbb{R}, t > 0, \tag{5.39}$$

为 GL 方程满足(5.38)的一个解.

§6 二维广义(具导数项)Ginzburg-Landau 方程的整体吸引子

现考虑二维有界域上如下的广义 Ginzburg-Landau 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \rho u + (1+i\nu)\Delta u - (1+i\mu)|u|^{2\sigma}u + \alpha\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla(|u|^2 u) + \beta(\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla u)|u|^2 \tag{6.1}$$

具有初始条件

$$u(x,0) = u_0(x), x \in \Omega \tag{6.2}$$

和周期边界条件

$$\Omega = (0,L_1)\times(0,L_1), u \text{ 在 } \Omega \text{ 上是周期的}, \tag{6.3}$$

其中 $u(x,t)$ 为未知复值函数,$\sigma>0$, $\rho>0$, ν, μ, α 和 β 均为实常数,$\boldsymbol{\lambda}_1$, $\boldsymbol{\lambda}_2$ 为实向量.

1996 年,郭柏灵和王碧祥在[5]中证明了:如 $u_0 \in H^2_{\text{per}}(\Omega)$,存在 $\delta > 0$ 使得

$$3 \leqslant \sigma \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\mu-\nu\delta^2}{1+\delta^2}\right)^2}-1}, \tag{6.4}$$

则问题(6.1)—(6.3)存在惟一整体解 $u(x,t)$

$$u(x,t) \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^3(\Omega)),$$

并且具有整体吸引子及吸引子的 Hausdorff、分形维数的有限性.

现对问题(6.1)—(6.3)的解作一致先验估计.

引理 6.1 设 $u_0 \in H^2_{\text{per}}(\Omega)$,则对问题(6.1)—(6.3)的解有

$$\| u(t) \|^2 \leqslant C_1, \ \forall\, t \geqslant t_1.$$

证 作(6.1)和 u 的 L^2 内积,再取实部得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| u \|^2 = {} & \rho\int_\Omega |u|^2 \mathrm{d}x - \|\nabla u\|^2 - \int_\Omega |u|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x \\ & + \alpha \mathrm{Re}\int_\Omega (\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla(|u|^2 u))u^* \mathrm{d}x \\ & + \beta \mathrm{Re}\int_\Omega (\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla u)|u|^2 u^* \mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{6.5}$$

证 $\boldsymbol{\lambda}_2 = (a,b)$,则有

$$\begin{aligned}& \mathrm{Re}\int_\Omega (\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla u)|u|^2 u^* \mathrm{d}x \\ & = \mathrm{Re}\int_\Omega \left(a\frac{\partial u}{\partial x_1}u^* + b\frac{\partial u}{\partial x_2}u^*\right)|u|^2 \mathrm{d}x \\ & = \frac{1}{2}\int_\Omega a|u|^2 \frac{\partial}{\partial x_1}|u|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega b|u|^2\frac{\partial}{\partial x_2}|u|^2\mathrm{d}x \\ & = \frac{1}{2}\int_0^{L_2}\mathrm{d}x_2\int_0^{L_1} a|u|^2\frac{\partial}{\partial x_1}|u|^2\mathrm{d}x_1 \\ & \quad + \frac{1}{2}\int_0^{L_1}\mathrm{d}x_1\int_0^{L_2} b|u|^2\frac{\partial}{\partial x_2}|u|^2 \mathrm{d}x_2 = 0.\end{aligned} \tag{6.6}$$

$$\begin{aligned}& \mathrm{Re}\int_\Omega (\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla(|u|^2 u))u^*\mathrm{d}x \\ & = \mathrm{Re}\int_\Omega (\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla|u|^2)|u|^2 \mathrm{d}x + \mathrm{Re}\int (\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla u)|u|^2 u^* \mathrm{d}x \\ & = \int_\Omega (\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla|u|^2)|u|^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega (\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla|u|^2)|u|^2 \mathrm{d}x = 0.\end{aligned} \tag{6.7}$$

于是从(6.5)—(6.7)得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2+\|\nabla u\|^2+\int_\Omega|u|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x=\rho\int_\Omega|u|^2\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\int_\Omega|u|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x+C,\tag{6.8}$$

其中常数 C 依赖于参数 σ,ρ, 今后仍用常数 C 表示依赖于参数资料 (σ,ρ,ν,μ), 由(6.8)有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2+\|\nabla u\|^2+\frac{1}{2}\int_\Omega|u|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x\leqslant C.$$

由此得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2+\int_\Omega|u|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x\leqslant C.\tag{6.9}$$

由 Young 不等式有

$$|u|^2=|u|^2\cdot 1\leqslant|u|^{2\sigma+2}+C.\tag{6.10}$$

积分(6.10)得

$$\|u\|^2\leqslant\int|u|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x+C.\tag{6.11}$$

于是由(6.9)和(6.10)有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2+\|u\|^2\leqslant C.$$

由 Gronwall 不等式得

$$\|u(t)\|^2\leqslant\|u_0\|^2e^{-t}+C\leqslant R^2e^{-t}+C,\quad\forall t\geqslant 0,$$

$$\leqslant 2C,\quad\forall t\geqslant t_*,$$

其中 $t_*=L_n\dfrac{R^2}{C}$. 引理得证.

引理 6.2 设满足引理 6.1 的条件, 且存在 $\delta>0$ 使得(6.4)成立, 则 $\forall\varepsilon>0$, 我们有

$$\frac{1}{2(1+\sigma)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|u|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x\leqslant-\frac{1}{2}\int_\Omega|u|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x+\varepsilon\|\Delta u\|^2$$

$$+\varepsilon\|\nabla u\|^4-\frac{1}{4}\int_\Omega|u|^{2\sigma-2}[(1+2\sigma)|\nabla|u|^2|^2$$

$$-2\nu\sigma\nabla|u|^2\cdot i(u\nabla u^*-u^*\nabla u)+|u\nabla u^*$$

$$- u^* \nabla u |^2] \mathrm{d}x + C_3 + C_2(\varepsilon)(| \alpha \boldsymbol{\lambda}_1 |$$

$$+ | \beta \boldsymbol{\lambda}_2 |)^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2 - 11\sigma - 7}}, \quad \forall t \geqslant t_2,$$

这里C_3依赖于资料(σ, ρ, ν, μ), $C_2(\varepsilon)$依赖参数资料和ε, t_2依赖于参数资料和R, $\| u_0 \| \leqslant R$.

证　作(6.1)和$| u |^{2\sigma} u$的L^2内积得

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} | u |^{2\sigma} u^* \mathrm{d}x = \rho \int_\Omega | u |^{2\sigma+2} \mathrm{d}x + (1 + i\nu)$$

$$\int_\Omega \Delta u \cdot | u |^{2\sigma} u^* \mathrm{d}x - (1 + i\mu) \int_\Omega | u |^{4\sigma+2} \mathrm{d}x$$

$$+ \alpha \int_\Omega (\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla(| u |^2 u) | u |^{2\sigma} u^* \mathrm{d}x$$

$$+ \beta \int_\Omega (\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla u) | u |^{2\sigma+2} u^* \mathrm{d}x. \tag{6.12}$$

由于

$$(1 + i\nu) \int_\Omega \Delta u | u |^{2\sigma} u^* \mathrm{d}x = - (1 + i\nu) \int_\Omega | \nabla u |^2 | u |^{2\sigma} \mathrm{d}x$$

$$- (1 + i\nu) \int_\Omega \sigma | u |^{2\sigma-2} u^* \nabla u \cdot \nabla | u |^2 \mathrm{d}x, \tag{6.13}$$

取(6.12)的实部可得

$$\frac{1}{2(1+\sigma)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega | u |^{2\sigma+2} \mathrm{d}x = \rho \int_\Omega | u |^{2\sigma+2} \mathrm{d}x$$

$$- \int_\Omega | \nabla u |^2 | u |^{2\sigma} \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \sigma \int_\Omega | u |^{2\sigma-2} | \nabla | u |^2 |^2 \mathrm{d}x$$

$$+ \frac{1}{2} \nu\sigma \int_\Omega | u |^{2\sigma-2} \nabla | u |^2 \cdot i(u \nabla u^* - u^* \Delta u) \mathrm{d}x$$

$$- \int_\Omega | u |^{4\sigma+2} \mathrm{d}x + \mathrm{Re}\alpha \int (\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot (| u |^2 u) | u |^{2\sigma} u^* \mathrm{d}x$$

$$+ \mathrm{Re}\beta \int_\Omega (\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla u) | u |^{2\sigma+2} u^* \mathrm{d}x. \tag{6.14}$$

又由于

$$| u |^2 | \nabla u |^2 = \frac{1}{4} | \nabla | u |^2 |^2 + \frac{1}{4} | u \nabla u^* - u^* \nabla u |^2, \tag{6.15}$$

由此可知

$$-\int_\Omega |\nabla u|^2 |u|^{2\sigma}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\sigma\int_\Omega |u|^{2\sigma-2}|\nabla|u|^2|^2\mathrm{d}x$$
$$+\frac{1}{2}\nu\sigma\int_\Omega |u|^{2\sigma-2}\nabla|u|^2\cdot i(u\nabla u^* - u^*\nabla u)\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{1}{4}\int_\Omega |u|^{2\sigma-2}[(1+2\sigma)|\nabla|u|^2|^2$$
$$-2\nu\sigma\nabla|u|^2\cdot i(u\nabla u^* - u^*\nabla u) + |u\nabla u^*$$
$$-u^*\nabla u|^2]\mathrm{d}x, \tag{6.16}$$

$$\rho\int_\Omega |u|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x = \rho\int_\Omega |u|^{2\sigma+1}|u|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant \frac{1}{6}\int_\Omega |u|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x + \frac{3}{2}\rho^2\int_\Omega |u|^2\mathrm{d}x$$
$$\leqslant \frac{1}{6}\int_\Omega |u|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x + C, \forall t \geqslant t_1. \tag{6.17}$$

$$\left|\mathrm{Re}\beta\int_\Omega(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla u)|u|^{2\sigma+2}u^*\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant |\beta\boldsymbol{\lambda}_2|\int_\Omega |\nabla u||u|^2|u|^{2\sigma+1}\mathrm{d}x$$
$$\leqslant 3|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|\int_\Omega |\nabla u|^2|u|^4\mathrm{d}x + \frac{1}{12}\int_\Omega |u|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x$$
$$\leqslant 3|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|\,\|\nabla u\|_4^2\|u\|_8^4 + \frac{1}{12}\int_\Omega |u|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x. \tag{6.18}$$

利用 Sobolev 插值不等式

$$\|u\|_4 \leqslant K\|u\|_{H^1}^{1/2}\|u\|^{1/2}, \forall u\in H^1(\Omega), \tag{6.19}$$
$$\|u\|_8 \leqslant K\|u\|_{H^2}^{\theta}\|u\|_q^{1-\theta}, \forall u\in H^2(\Omega), \tag{6.20}$$

其中

$$\theta = \frac{8-q}{4q+8}, 1<q<8; \theta = 0, q\geqslant 8. \tag{6.21}$$

于是有

$$\|\nabla u\|_4^2 \leqslant C\|\nabla u\|_{H^1}\|\nabla u\| \leqslant C\|u\|_{H^2}\|u\|_{H^1}. \tag{6.22}$$

由(6.18)—(6.22)有

$$|\mathrm{Re}\rho\int(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla u)|u|^{2\sigma+2}u^*\mathrm{d}x| \leqslant C,$$

$$|\beta\lambda_2|^2 \|u\|_{H^2}^{4\theta+1} \|u\|_{H^1} \|u\|_q^{4(1-\theta)} + \frac{1}{12}\int_\Omega |u|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \gamma \|u\|_{H^2}^2 + C(\gamma) |\beta\lambda_2|^{\frac{4}{1-4\theta}} \|u\|_{H^1}^{\frac{2}{1-4\theta}} \|u\|_q^{\frac{8(1-\theta)}{1-4\theta}}$$

$$+ \frac{1}{12}\int_\Omega |u|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x$$

(如果 $q > 3, \forall 0 < \gamma \leqslant 1$)

$$\leqslant \gamma \|u\|_{H^2}^2 + \gamma \|u\|_{H^1}^4 + C(\gamma) |\beta\lambda_2|^{\frac{8}{1-8\theta}} \|u\|_q^{\frac{16(1-\theta)}{1-8\theta}}$$

$$+ \frac{1}{12}\int_\Omega |u|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x$$

$\left(如 \ q > \frac{14}{3}\right)$

$$\leqslant \gamma \|u\|_{H^2}^2 + \gamma \|u\|_{H^1}^4 + \frac{1}{12} \|u\|_q^q$$

$$+ C(\gamma) |\beta\lambda_2|^{\frac{8q}{q-8q\theta-16+16\theta}} + \frac{1}{12}\int_\Omega |u|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x$$

$\left(如 \ q > \frac{34}{3}\right)$

$$\leqslant \gamma \|u\|_{H^2}^2 + \gamma \|u\|_{H^1}^4 + \frac{1}{12} \|u\|_{4\sigma+2}^{4\sigma+2} + C(\gamma)$$

$$|\beta\lambda_2|^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}} + \frac{1}{12}\int_\Omega |u|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x$$

$\left(由 \ \sigma \geqslant 3, q = 4\sigma + 2 > \frac{34}{3}\right)$

$$\leqslant \gamma \|u\|_{H^2}^2 + \gamma \|u\|_{H^1}^4 + \frac{1}{6}\int_\Omega |u|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x$$

$$+ C(\gamma) |\beta\lambda_2|^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}$$

$$\leqslant \gamma C \|\Delta u\|^2 + 8\gamma \|\nabla u\|^4 + \frac{1}{6}\int_\Omega |u|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x + C$$

$$+ C(\gamma) |\beta\lambda_2|^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}. \tag{6.23}$$

由于

$$\nabla(|u|^2 u) = |u|^2 \nabla u + u \nabla |u|^2 = 2|u|^2 \nabla u + u^2 \nabla u, \tag{6.24}$$

类似地我们有

$$\left|\mathrm{Re}\alpha\int_{\Omega}(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(|u|^2u))|u|^{2\sigma}u^*\mathrm{d}x\right|\leqslant 3|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|\int_{\Omega}|\nabla u||u|^2|u|^{2\sigma+1}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\gamma C\|\Delta u\|^2+8\gamma\|\nabla u\|^4+\frac{1}{6}\int_{\Omega}|u|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x+C(\gamma)|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}. \tag{6.25}$$

由(6.14),(6.16),(6.17),(6.23),(6.25)可得

$$\frac{1}{2(1+\sigma)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}|u|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x\leqslant-\frac{1}{2}\int_{\Omega}|u|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x+\gamma C\|\Delta u\|^2+16\gamma\|\nabla u\|^4+C+C(\gamma)(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}-\frac{1}{4}\int_{\Omega}|u|^{2\sigma-2}[(1+2\sigma)|\nabla|u|^2|^2-2\gamma\sigma\nabla|u|^2\cdot i(u\nabla u^*-u^*\nabla u)+|u\nabla u^*-u^*\nabla u|^2]\mathrm{d}x.$$

当选取 γ 适当小,即得引理的结论.

引理 6.3 设引理 6.2 条件满足,则有

$$\|\nabla u\|^2\leqslant C_3+C_3(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}},\ \forall t\geqslant t_3, \tag{6.26}$$

其中 C_3 依赖于参数资料,t_3 依赖于参数资料和 R,$\|u_0\|_{H^1}\leqslant R$.

证 作(6.1)和 Δu 的 L^2 内积得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u\|^2+\|\Delta u\|^2=\rho\|\nabla u\|^2+\mathrm{Re}(1+i\mu)\int_{\Omega}|u|^{2\sigma}u\Delta u^*\mathrm{d}x-\alpha\mathrm{Re}\int_{\Omega}(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(|u|^2u))\Delta u^*\mathrm{d}x-\beta\mathrm{Re}\int_{\Omega}(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla u)|u|^2\Delta u^*\mathrm{d}x, \tag{6.27}$$

$\forall\varepsilon>0$,由 Young 不等式有

$$\rho\|\nabla u\|^2\leqslant\varepsilon\|\nabla u\|^4+C(\varepsilon), \tag{6.28}$$

$$\mathrm{Re}(1+i\mu)\int_\Omega |u|^{2\sigma}u\Delta u^*\,\mathrm{d}x = -\mathrm{Re}(1+i\mu)\int_\Omega |u|^{2\sigma}|\nabla u|^2\mathrm{d}x$$

$$-\mathrm{Re}(1+i\mu)\int_\Omega \sigma|u|^{2\sigma-2}u\nabla u^*\cdot\nabla|u|^2\mathrm{d}x$$

$$= -\int_\Omega |u|^{2\sigma}|\nabla u|^2\mathrm{d}x - \frac{\sigma}{2}\int_\Omega |u|^{2\sigma-2}|\nabla|u|^2|^2\mathrm{d}x$$

$$+\frac{1}{2}\mu\sigma\int_\Omega |u|^{2\sigma-2}\nabla|u|^2\cdot i(u^*\nabla u - u\nabla u^*)\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{4}\int_\Omega |u|^{2\sigma-2}[(1+2\sigma)|\nabla|u|^2|^2$$

$$-2\mu\sigma\nabla|u|^2 i(u^*\nabla u - u\nabla u^*)$$

$$+|u^*\nabla u - u\nabla u^*|^2]\mathrm{d}x, \tag{6.29}$$

$$\left|-\beta\mathrm{Re}\int_\Omega(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla u)|u|^2\Delta u^*\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|\int|\nabla u||u|^2|\Delta u|\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|\;\|\Delta u\|\;\|\nabla u\|_4\|u\|_8^2$$

$$\leqslant C|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|\;\|\Delta u\|\;\|\Delta u\|_{H^1}^{1/2}\|\nabla u\|^{1/2}\|u\|_{H^2}^{2\theta}\|u\|_q^{2(1-\theta)}$$

$$\leqslant C|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|\;\|u\|_{H^2}^{2\theta+\frac{3}{2}}\|\nabla u\|^{1/2}\|u\|_q^{2(1-\theta)}$$

$$\leqslant\gamma\|u\|_{H^2}^2 + C(\gamma)|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|^{\frac{4}{1-4\theta}}\|\nabla u\|^{\frac{2}{1-4\theta}}\|u\|_q^{\frac{8(1-\theta)}{1-4\theta}}$$

(如 $q>3, \forall\, 0<\gamma\leqslant 1$)

$$\leqslant\gamma\|u\|_{H^2}^2+\gamma\|\nabla u\|^4 + C(\gamma)|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|^{\frac{8}{1-8\theta}}\|u\|^{\frac{16(1-\theta)}{1-8\theta}}$$

$\left(如\ q>\dfrac{14}{3}\right)$

$$\leqslant\gamma\|u\|_{H^2}^2+\gamma\|\nabla u\|^4+\gamma\|u\|_q^q$$

$$+C(\gamma)|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|^{\frac{8q}{q-8q\theta-16+16\theta}}$$

$\left(如\ q>\dfrac{34}{3}\right)$

$$\leqslant\gamma C\|\Delta u\|^2+\gamma\|\nabla u\|^4+\gamma\|u\|_q^q$$

$$+C(\gamma)|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|^{\frac{8q}{q-8q\theta-16+16\theta}}\leqslant\gamma C\|\Delta u\|^2+\gamma\|\nabla u\|^4$$

$$+\gamma\|u\|_{4\sigma+2}^{4\sigma+2}+C(\gamma)|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}$$

$$\left(\sigma \geqslant 3, q = 4\sigma + 2 > \frac{34}{3}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\varepsilon \| \Delta u \|^2 + \frac{1}{2}\varepsilon \| \nabla u \|^4 + \frac{1}{2}\varepsilon \| u \|_{4\sigma+2}^{4\sigma+2} + C(\varepsilon) | \beta\lambda_2 |^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}. \tag{6.30}$$

类似地,由(6.24)有

$$\left| - \alpha \mathrm{Re}\int (\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla(|u|^2 u))\Delta u^* \mathrm{d}x \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\varepsilon \| \Delta u \|^2 + \frac{1}{2}\varepsilon \| \nabla u \|^4 + \frac{1}{2}\varepsilon \| u \|_{4\sigma+2}^{4\sigma+2} + C(\varepsilon) | \alpha\boldsymbol{\lambda}_1 |^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}, \tag{6.31}$$

由(6.27)—(6.31)可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| \nabla u \|^2 + \| \Delta u \|^2 \leqslant \varepsilon \| \Delta u \|^2 + 2\varepsilon \| \nabla u \|^4 + \varepsilon \| u \|_{4\sigma+2}^{4\sigma+2} + C(\varepsilon) + C(\varepsilon)(| \alpha\boldsymbol{\lambda}_1 | + | \beta\boldsymbol{\lambda}_2 |)^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}} - \frac{1}{4}\int_\Omega | u |^{2\sigma-2}[(1+2\sigma) | \nabla | u |^2 |^2 - 2\mu\sigma \nabla | u |^2 \cdot i(u^* \nabla u - u \nabla u^*) + | u^* \nabla u - u \nabla u^* |^2 \mathrm{d}x. \tag{6.32}$$

利用(6.32)和引理6.2可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\| \nabla u \|^2 + \frac{\delta^2}{1+\sigma}\int_\Omega | u |^{2\sigma+2}\mathrm{d}x \right) + \| \Delta u \|^2 + \frac{1}{2}\delta^2 \int_\Omega | u |^{4\sigma+2} \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \varepsilon(1+\delta^2) \| \Delta u \|^2 + \varepsilon(2+\delta^2) \| \nabla u \|^4 + \varepsilon \int | u |^{4\sigma+2}\mathrm{d}x + C(\varepsilon) + C(\varepsilon)(| \boldsymbol{\lambda}_1 \alpha | + | \beta\boldsymbol{\lambda}_2 |)^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}} - \frac{1}{4}\int_\Omega | u |^{2\sigma-2}[(1+2\sigma)(1+\delta^2) | \nabla | u |^2 |^2 + 2\sigma(\nu\delta^2 - \mu)\nabla | u |^2 \cdot i(u^* \nabla u - u \nabla u^*) + (1+\delta^2) | u^* \nabla u - u \nabla u^* |^2] \mathrm{d}x. \tag{6.33}$$

由于

$$\| \nabla u \|^2 = (-\Delta u, u) \leqslant \| \Delta u \| \| u \| \leqslant K \| \Delta u \|, \tag{6.34}$$

其中 K 仅依赖于参数资料,但与 ε 无关,我们有

$$\begin{aligned} &\varepsilon(1+\delta^2)\|\Delta u\|^2 + \varepsilon(2+\delta^2)\|\Delta u\|^4 \\ &\qquad \leqslant \varepsilon K_0 \|\Delta u\|^2 (K_0 \text{ 与 } \varepsilon \text{ 无关}) \\ &\qquad \leqslant \frac{1}{2}\|\Delta u\|^2 \left(\text{选取 } \varepsilon < \frac{1}{2K_0}\right). \end{aligned} \tag{6.35}$$

考察条件(6.4),推出矩阵

$$\begin{bmatrix} (1+2\sigma)(1+\delta^2) & \sigma(\nu\delta^2 - \mu) \\ \sigma(\nu\delta^2 - \mu) & 1+\delta^2 \end{bmatrix}$$

为非负定,因此在(6.33)的右端最后一项为非正的,选取 ε 充分小,使得(6.35)成立,因此由(6.33)和(6.35)推得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla u\|^2 + \frac{\delta^2}{1+\sigma}\int_\Omega |u|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\|\Delta u\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{4}\delta^2\int_\Omega |u|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x \\ &\leqslant C + C(|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{8\sigma^2-11\sigma-7}}. \end{aligned} \tag{6.36}$$

由(6.35)得

$$\|\nabla u\|^2 \leqslant K\|\Delta u\| \leqslant \|\Delta u\|^2 + \frac{1}{4}K^2, \tag{6.37}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\delta^2}{2(1+\sigma)}\int_\Omega |u|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x = \frac{\delta^2}{2(1+\sigma)}\int_\Omega |u|^{2\sigma+1}|u|\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{1}{4}\delta^2\int_\Omega |u|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x + C\int |u|^2\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{1}{4}\delta^2\int_\Omega |u|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x + C. \end{aligned} \tag{6.38}$$

由(6.36)—(6.38)得

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla u\|^2 + \frac{\delta^2}{1+\sigma}\int_\Omega |u|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x\right) + \|\nabla u\|^2 \\ &\quad + \frac{\delta^2}{1+\sigma}\int_\Omega |u|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$\leqslant C + C(|\lambda_1\alpha| + |\beta\lambda_2|)^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}, \forall t \geqslant t_*,$$

其中 $t_* = \max\{t_1, t_2\}$，t_1, t_2 已在引理 6.1 和引理 6.2 中出现.

再利用 Gronwall 不等式推得

$$\begin{aligned}
&\|\nabla u(t)\|^2 + \frac{\delta^2}{1+\sigma}\int_\Omega |u(t)|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x \\
&\leqslant \left(\|\nabla u(t_*)\|^2 + \frac{\delta^2}{1+\sigma}\int_\Omega |u(t_*)|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x\right)e^{-(t-t_*)} \\
&\quad + C + C(|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}, \forall t \geqslant t_*. \quad (6.39)
\end{aligned}$$

从问题(6.1)—(6.3) 整体解的存在性证明中易知

$$\|\nabla u(t_*)\|^2 + \frac{\delta^2}{1+\sigma}\int_\Omega |u(t_*)|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x \leqslant C(R), \quad (6.40)$$

这里 $C(R)$ 依赖了资料和 R，$\|u_0\|_{H^1} \leqslant R$.

于是，由(6.39) 和(6.40) 推得

$$\begin{aligned}
&\|\nabla u(t)\|^2 + \frac{\delta^2}{1+\sigma}\int_\Omega |u(t)|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x \\
&\leqslant C(R)e^{-(t-t_*)} + C(|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}} + C \\
&\leqslant 2C + 2C(|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}, \forall t \geqslant t_*,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
t'_* = \max\{t_*, t_* + \mathrm{Ln}C(R) \\
- \mathrm{Ln}[C + C(|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}]\},
\end{aligned}$$

这就是推出引理的结果.

引理 6.4 设引理 6.2 的条件满足，则有

$$\begin{aligned}
\|\Delta u(t)\|^2 &\leqslant C_4 + C_4(|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^{\frac{16(1+\sigma)(1+2\sigma)(7+8\sigma)}{3(6\sigma^2-11\sigma-7)}} \\
&\quad + C_4(|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^{8+\frac{240(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}, \forall t \geqslant t_4,
\end{aligned}$$

这里 C_4 依赖于参数资料，t_4 依赖于资料和 R，$\|u_0\|_{H^2} \leqslant R$.

证 作(6.1) 和 $\Delta^2 u$ 的内积，再取实部得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta u\|^2 = \rho\|\Delta u\|^2 - \|\nabla\Delta u\|^2 - \mathrm{Re}(1 + i\mu)$$

$$\int_\Omega |u|^{2\sigma}u\Delta^2 u^* \mathrm{d}x + \alpha\mathrm{Re}\int_\Omega(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(|u|^2u))\Delta^2u^*\mathrm{d}x$$

$$+\beta\mathrm{Re}\int_\Omega(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla u)|u|^2\Delta^2u^*\mathrm{d}x. \tag{6.41}$$

应用引理6.1和引理6.3等可得，$\forall t\geqslant t_*$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta u\|^2+\|\nabla\Delta u\|^2+\|\Delta u\|^2\leqslant C$$

$$+C(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^{\frac{16(1+\sigma)(1+2\sigma)(7+8\sigma)}{3(6\sigma^2-11\sigma-7)}}$$

$$+C(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^{8+\frac{240(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}. \tag{6.42}$$

由Gronwall引理推得

$$\|\Delta u(t)\|^2\leqslant\|\Delta u(t_*)\|^2e^{-(t-t_*)}+C$$

$$+C(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^{\frac{16(1+\sigma)(1+2\sigma)(7+8\sigma)}{3(6\sigma^2-11\sigma-7)}}$$

$$+C(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^{8+\frac{240(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}},\ \forall t\geqslant t_*. \tag{6.43}$$

由解的先验估计有

$$\|\Delta u(t_*)\|^2\leqslant C(R),$$

这里$C(R)$依赖于参数资料，$\|u_0\|_{H^2}\leqslant R$. 当t充分大时有

$$\|\Delta u(t)\|^2\leqslant 2C+2C(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^{\frac{16(1+\sigma)(1+2\sigma)(7+8\sigma)}{3(6\sigma^2-11\sigma-7)}}$$

$$+2C(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^{8+\frac{240(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}.$$

这样引理6.4得证.

我们注意到

$$\|u\|_{H^2}^2\leqslant C(\|\Delta u\|+\|u\|)^2$$

$$\leqslant C+C(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^{\frac{16(1+\sigma)(1+2\sigma)(7+8\sigma)}{3(6\sigma^2-11\sigma-7)}}$$

$$+C(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^{8+\frac{240(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}},\ \forall t\geqslant t_*, \tag{6.44}$$

其中C仅依赖于参数资料(σ,ρ,ν,μ).

$$\|u\|_\infty^2\leqslant C\|u\|\|u\|_{H^2}$$

$$\leqslant C+C(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|^2+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)(7+8\sigma)}{3(6\sigma^2-11\sigma-7)}}$$

$$+C(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^{4+\frac{120(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}},\ \forall t\geqslant t_*. \tag{6.45}$$

引理 6.5 设引理 6.2 的条件满足，则有

$$\| \nabla \Delta u(t) \|^2 \leqslant K, \forall t \geqslant t_*,$$

这里 K 依赖于参数资料$(\sigma,\rho,\nu,\mu,\alpha,\beta,\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2,\Omega)$，$t_*$ 依赖于$(\sigma,\rho,\nu,\mu,\alpha,\beta,\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2,\Omega)$ 和 R，$\| u_0 \|_{H^2} \leqslant R$.

证 作(6.1) 和 $\Delta^3 u$ 的内积，再取实部得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| \nabla \Delta u \|^2 = \rho \| \nabla \Delta u \|^2 - \| \Delta^2 u \|^2 \\
&+ \mathrm{Re}(1 + i\mu)\int_\Omega | u |^{2\sigma} u \Delta^2 u^* \mathrm{d}x \\
&- \mathrm{Re}\alpha\int_\Omega \boldsymbol{\lambda}_1 \cdot (\nabla | u |^2 u)\Delta^3 u^* \mathrm{d}x + \mathrm{Re}\beta\int_\Omega (\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla u) \\
&\cdot | u |^2 \Delta^3 u^* \mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{6.46}$$

应用引理 6.1,6.3 和 6.4,进行复杂的运算得

$$\begin{aligned}
&\left| \mathrm{Re}(1 + i\mu)\int_\Omega | u |^{2\sigma} u \Delta^3 u^* \mathrm{d}x \right| \leqslant K \| \Delta^2 u \| \\
&\leqslant \frac{1}{6}\| \Delta^2 u \|^2 + K,
\end{aligned} \tag{6.47}$$

$$\begin{aligned}
&\left| \alpha\int (\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla(| u |^2 u)\Delta^3 u^* \mathrm{d}x \right| \\
&\leqslant \frac{1}{6}\| \Delta^2 u \|^2 + K \| \nabla \Delta u \|^2 + K,
\end{aligned} \tag{6.48}$$

$$\begin{aligned}
&\left| \beta\int_\Omega (\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla u) | u |^2 \Delta^3 u^* \mathrm{d}x \right| \\
&\leqslant \frac{1}{6}\| \Delta^2 u \|^2 + K \| \nabla \Delta u \|^2 + K.
\end{aligned} \tag{6.49}$$

由(6.46)—(6.49) 可得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| \nabla \Delta u \|^2 &\leqslant \rho \| \nabla \Delta u \|^2 - \| \Delta^2 u \|^2 + \frac{1}{2}\| \Delta^2 u \|^2 \\
&+ K \| \nabla \Delta u \|^2 + K \leqslant (K + \rho) \| \nabla \Delta u \|^2 + K,
\end{aligned}$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| \nabla \Delta u \|^2 \leqslant K \| \nabla \Delta u \|^2 + K. \tag{6.50}$$

由(6.42) 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta u\|^2+\|\nabla\Delta u\|^2\leqslant K,\forall t\geqslant t_*. \tag{6.51}$$

积分(6.51)从 t 到 $t+1$ 得

$$\|\Delta u(t+1)\|^2-\|\Delta u(t)\|^2+\int_t^{t+1}\|\nabla\Delta u\|^2\mathrm{d}t\leqslant K,$$

$$\forall t\geqslant t_*,$$

再应用引理 6.4 有

$$\int_t^{t+1}\|\nabla\Delta u\|^2\mathrm{d}t\leqslant K,\forall t\geqslant t_*. \tag{6.52}$$

由(6.50)—(6.52)和一致 Gronwall 引理可得

$$\|\nabla\Delta u(t)\|^2\leqslant K,\forall t\geqslant t_*+1.$$

引理得证.

现建立问题(6.1)—(6.3)整体吸引子的存在性和它的 Hausdorff 分形维数的估计.由(6.44)推出球

$$B=\{u\in H^2(\Omega):\|u\|_{H^2}\leqslant K_0\}$$

是 $S(t)$ 在 $H^2(\Omega)$ 中的吸收集,由引理 6.5 可知半群 $S(t)$ 在 $H^2(\Omega)$ 对充分大的 t 是一致紧的,因此由[12]可得整体吸引子的存在性.即有

定理 6.6 设(6.4)成立,则 w 极限集

$$\mathscr{A}=w(B)=\bigcap_{s\geqslant 0}\bigcup_{t\geqslant s}\overline{S(t)B}$$

是 $S(t)$ 在 $H^2(\Omega)$ 上的紧吸引子,这里闭包是取在 $H^2(\Omega)$ 上.

下面证明整体吸引子 $\mathscr{A}$ 的维数是有限的.为此,写方程(6.1)为抽象形式

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=F(u), \tag{6.53}$$

这里 $F(u)$ 表示(6.1)的右端.

考虑问题(6.1)—(6.3)的一次变分方程

$$v_t=F'(u(t))v \tag{6.54}$$

具初值

$$v(0)=v_0\in H, \tag{6.55}$$

其中

$$F'(u(t))v = \rho v + (1+i\nu)\Delta v - (1+i\mu)(1+\sigma)|u|^{2\sigma}v$$
$$+ 2\alpha(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(|u|^2v)) + \alpha(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(u^2v^*))$$
$$-(1+i\mu)\sigma|u|^{2\sigma-2}u^2v^* + \beta(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla v)|u|^2$$
$$+\beta(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla u)(vu^*+uv^*),$$

$u(t) = S(t)u_0$ 为问题(6.1)—(6.3)的解,$u_0 \in \mathscr{A}$.

我们知道,对 $u_0 \in \mathscr{A}$,存在解 $S(t)u_0 \in H^2(\Omega)$.用标准方法能证明 $\forall v_0 \in H$,线性初值问题(6.64),(6.55)具有惟一解 $v(t)$,使得

$$v(t) \in L^2([0,T];H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H), \forall T > 0. \quad (6.56)$$

对于 $v_0 \in H$,令 $G(t)$ 表示问题(6.54),(6.55)的解,且通过复杂的计算和能量估计可以证明,对于 $\forall \omega_0, u_0 \in \mathscr{A}$:

$$\frac{\| S(t)w_0 - S(t)u_0 - G(t)(w_0-u_0)\|^2}{\| w_0 - u_0\|^2}$$
$$\leqslant K\| w_0 - u_0\|, \forall_0 \leqslant t \leqslant T,$$

其中 K 依赖于参数资料$(\sigma,\rho,\nu,\mu,\alpha,\beta,\vec{\boldsymbol{\lambda}}_1,\vec{\boldsymbol{\lambda}}_2,\Omega)$,$T$ 和 R. $\|\mathscr{A}\|_{H^2} \leqslant R$.这个不等式表明半群 $S(t)$ 在 $\mathscr{A}$ 上是一致可微的,且 $S(t)$ 在 H^2 上($u_0 \in \mathscr{A}$)的微分为算子 $L(t,u_0): v_0 \in H \to G(t)v_0 \in H$,我们考虑 $v_0 = v_{01},\cdots,v_{0m}$ 为 H 中的 m 个元素,相应的(6.54),(6.55)的解 $v(t) = v_1(t),\cdots,v_m(t)$,则由文献[12]有

$$|v_1(t)\wedge v_2(t)\wedge\cdots\wedge v_m(t)|_{\wedge^m H} = |v_{01}\wedge\cdots$$
$$\wedge v_{om}|_{\wedge^m H}\cdot\exp\int_0^t \mathrm{ReTr}F'(u(\tau))\cdot Q_m(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad (6.57)$$

这里,$Q_m(\tau) = Q_m(\tau,u_0,v_{01},\cdots,v_{0m})$ 为 H 在$\{v_1(\tau),\cdots,v_m(\tau)\}$所张空间的正交投影.设对给定时间 $\tau,\varphi_j(\tau),j\in\mathbb{N}$ 为 H 的正交基,且 $Q_m(\tau)H = \mathrm{span}\{v_1(\tau),\cdots,v_m(\tau)\}, v_j(\tau)\in H^1(\Omega)$.

$$\mathrm{ReTr}F'(u(\tau))\circ Q_m\tau = \sum_{j=1}^\infty \mathrm{Re}(F'(u(\tau))$$
$$\cdot Q_m(\tau)\varphi_j(\tau),\varphi_j(\tau))$$
$$= \sum_{j=1}^m \mathrm{Re}(F'(u(\tau))\varphi_j(\tau),\varphi_j(\tau). \quad (6.58)$$

省略 τ 可得

$$\operatorname{Re}(F'(u)\varphi_j,\varphi_j) = \rho \|\varphi_j\|^2 - \|\nabla\varphi_j\|^2 - (1+\sigma)$$

$$\int_\Omega |u|^{2\sigma}|\varphi_j|^2 dx - \operatorname{Re}(1+i\mu)\sigma\cdot\int_\Omega |u|^{2\sigma-2}u^2(\varphi_j^*)^2 dx$$

$$+ \operatorname{Re}2\alpha\int_\Omega(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(|u|^2\varphi_j)\varphi_j^*)dx$$

$$+ \operatorname{Re}\alpha\int_\Omega(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(u^2\varphi_j^*))\varphi_j^* dx$$

$$+ \operatorname{Re}\beta\int_\Omega(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla\varphi_j)|u|^2\varphi_j^* dx$$

$$+ \operatorname{Re}\beta\int_\Omega(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla u)(u^*|\varphi_j|^2 + u(\varphi_j^*)^2)dx. \quad (6.59)$$

现估计(6.59)右端各项.

$$-\operatorname{Re}(1+i\mu)\sigma\int_\Omega |u|^{2\sigma-2}u^2(\varphi_j^*)^2 dx$$

$$\leqslant \sigma|1+i\mu|\,\|u\|_\infty^{2\sigma}\|\varphi_j\|^2$$

$$\leqslant C\|\varphi_j\|^2 + C\|\varphi_j\|^2(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^{\frac{8\sigma(1+\sigma)(1+2\sigma)(7+8\sigma)}{3(6\sigma^2-11\sigma-7)}}$$

$$+ C\|\varphi_j\|^2(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^{4\sigma+\frac{120\sigma(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}, \quad (6.60)$$

$$\operatorname{Re}2\alpha\int_\Omega(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(|u|^2\varphi_j))\varphi_j^* dx$$

$$= -2\alpha\operatorname{Re}\int(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla\varphi_j^*),$$

$$|u|^2\varphi_j dx$$

$$\leqslant 2|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|\,\|u\|_\infty^2\|\nabla\varphi_j\|\,\|\varphi_j\|$$

$$\leqslant \frac{1}{8}\|\nabla\varphi_j\|^2 + C|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|^2\|u\|_\infty^4\|\varphi_j\|^2$$

$$\leqslant \frac{1}{8}\|\nabla\varphi_j\|^2 + C\|\varphi_j\|^2(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^2$$

$$+ C\|\varphi_j\|^2(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^{2+\frac{16(1+\sigma)(1+2\sigma)(7+8\sigma)}{3(6\sigma^2-11\sigma-7)}}$$

$$+ C\|\varphi_j\|^2(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^{10+\frac{240(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}, \quad (6.61)$$

$$\operatorname{Re}\beta\int_\Omega(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla\varphi_j)|u|^2\varphi_j^* dx \leqslant |\beta\boldsymbol{\lambda}_1|$$

$$\|u\|_\infty^2\|\nabla\varphi_j\|\,\|\varphi_j\| \leqslant \frac{1}{8}\|\nabla\varphi_j\|^2$$

$$+ C\|\varphi_j\|^2(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^2$$

$$+ C\|\varphi_j\|^2(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^{2+\frac{16(1+\sigma)(1+2\sigma)(7+8\sigma)}{3(6\sigma^2-11\sigma-7)}}$$

$$+ C\|\varphi_j\|^2(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^{10+\frac{240(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}, \tag{6.62}$$

$$\mathrm{Re}\beta\int_\Omega(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla u)(u^*|\varphi_j|^2+u|\varphi_j^*|^2\mathrm{d}x$$

$$\leqslant 2|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|\cdot\|u\|_\infty\cdot\|\nabla u\|\cdot\|\varphi_j\|\cdot\|\varphi_j\|_{H^1}$$

$$\leqslant\frac{1}{8}\|\varphi_j\|_{H^1}^2+C|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|^2\|u\|_\infty^2\|\nabla u\|^2\|\varphi_j\|^2$$

$$\leqslant\frac{1}{8}\|\varphi_j\|_{H^1}^2+C|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|^2\|u\|_\infty^2(-\Delta u,u)\|\varphi_j\|^2$$

$$\leqslant\frac{1}{8}\|\varphi_j\|_{H^1}^2+C|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|^2\|u\|\,\|u\|_{H^2}$$

$$\cdot\|\Delta u\|\cdot\|u\|\,\|\varphi_j\|^2$$

$$\leqslant\frac{1}{8}\|\varphi_j\|_{H^1}^2+C|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|^2\|u\|_{H^2}\|\varphi_j\|^2$$

$$\leqslant\frac{1}{8}\|\nabla\varphi_j\|^2+\frac{1}{8}\|\varphi_j\|^2+C\|\varphi_j\|^2(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^2$$

$$+ C\|\varphi_j\|^2(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^{2+\frac{16(1+\sigma)(1+2\sigma)(7+8\sigma)}{3(6\sigma^2-11\sigma-7)}}$$

$$+ C\|\varphi_j\|^2(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^{10+\frac{240(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}, \tag{6.63}$$

由(6.60)—(6.63)有

$$\mathrm{ReTr}F'(u(\tau))\circ\theta_m(\tau)\leqslant-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^m\|\nabla\varphi_j\|^2+E\sum_{j=1}^m\|\varphi_j\|^2, \tag{6.64}$$

其中

$$E=C+C(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^2$$

$$+ C(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^{\frac{8\sigma(1+\sigma)(1+2\sigma)(7+8\sigma)}{3(6\sigma^2-11\sigma-7)}}$$

$$+ C(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^{4\sigma+\frac{120\sigma(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}$$

$$+ C(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^{10+\frac{240(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}$$

$$+ C(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^{2+\frac{16(1+\sigma)(1+2\sigma)(7+8\sigma)}{3(6\sigma^2-11\sigma-7)}}. \tag{6.65}$$

令

$$\eta = \eta(x,\tau) = \sum_{j=1}^{m} |\varphi_j|^2. \tag{6.66}$$

因$\{\varphi_j\}(j = 1,\cdots,m)$在$H$中是正交的,有

$$\sum_{j=1}^{m} \|\varphi_j\|^2 = \int_\Omega \eta \mathrm{d}x = m \tag{6.67}$$

由 Sobolev-Lieb-Thirring 不等式有

$$\int_\Omega \eta^2 \mathrm{d}x \leqslant C_0 \int_\Omega \eta \mathrm{d}x + C_0 \sum_{j=1}^{m} |\nabla \varphi_j|^2 \tag{6.68}$$

其中C_0仅依赖于Ω的形状

由 Hölder 不等式有

$$\left(\int \eta \mathrm{d}x\right)^2 \leqslant |\Omega| \int \eta^2 \mathrm{d}x. \tag{6.69}$$

由(6.65)—(6.69)有

$$\begin{aligned} \mathrm{ReTr}F'(u(\tau)) \circ \theta_m(\tau) &\leqslant -\frac{m^2}{2C_0|\Omega|} + \frac{1}{2}m + Em \\ &\leqslant -\frac{m^2}{4C_0|\Omega|} + C_0|\Omega|\left(E + \frac{1}{2}\right)^2. \end{aligned} \tag{6.70}$$

对$i = 1,2,\cdots,m$和$v_{oi} \in H$,定义

$$q_m(t) = \sup_{u_0 \in \mathscr{A}} \sup_{\|v_{0i}\| \leqslant 1} \left(\frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{ReTr}F'(S(\tau)u_0) \circ Q_m(\tau)\mathrm{d}\tau\right),$$

$$q_m = \limsup_{t \to \infty} q_m(t),$$

则从(6.70)得

$$q_m \leqslant -\frac{m^2}{4C_0|\Omega|} + C_0|\Omega|\left(E + \frac{1}{2}\right)^2.$$

因此,如m满足

$$m - 1 \leqslant \sqrt{8}C_0|\Omega|\left(E + \frac{1}{2}\right) \leqslant m, \tag{6.71}$$

则$q_m < 0$,由此即得

定理 6.7 设$\mathscr{A}$为问题(6.1)—(6.3)的整体吸引子,则$\mathscr{A}$的 Hausdorff 维数$\leqslant m$,而它的分形维数$\leqslant 2m$,其中m为(6.71)所确定.

§7 二维具导数 Ginzburg-Landau 方程的 Gevrey 正则性和近似惯性流形

1996 年郭柏灵，王碧祥在[6]中考虑二维 Ginzburg-Landau 方程解的时间解析性，Gevrey 正则性以及近似惯性流形.

设有如下的 Ginzburg-Landau 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \rho u + (1+i\nu)\Delta u - (1+i\mu)|u|^{2\sigma}u + \alpha\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(|u|^2u)$$

$$+\beta(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla u)|u|^2, (x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}^+; \tag{7.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), x\in\Omega. \tag{7.2}$$

u 为 Ω 周期的，

$$\Omega = (0,L_1)\times(0,L_2), \tag{7.3}$$

其中 u 为未知复值函数，$\sigma\in N$，$\rho>0$，μ,α,β 为实常数，$\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2$ 为实向量.

在[13]中已经证明：如 $u_0\in H^2(\Omega)$，且存在 $\delta>0$，使得

$$2<\sigma\leqslant\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\mu-\nu\delta^2}{1+\delta^2}\right)^2}-1}, \quad \sigma\in\mathbb{N}, \tag{7.4}$$

这里 $\mathbb{N}$ 为自然数集合，则存在问题(7.1)－(7.3)的惟一整体解 $u(x,t)$.

$$u(x,t)\in L^\infty(0,T;H^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H^3(\Omega)),$$

$$\forall T>0, \tag{7.5}$$

且存在常数 K_1，它依赖于参数资料$(\sigma,\rho,\nu,\mu,\alpha,\beta,\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2,\delta,\Omega)$，使得

$$\|u(t)\|_{H^1}\leqslant K_1, \quad \forall t\geqslant t_1, \tag{7.6}$$

这里 t_1 依赖于参数资料$(\sigma,\rho,\nu,\mu,\alpha,\beta,\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2,\delta,\Omega)$ 和 R，$\|u_0\|_{H^1}\leqslant R$.

令 $u(t)=u_1(t)+iu_2(t)$，$u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ 为实函数，则在(7.1)中分别取实部和虚部可得

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \rho u_1 + \Delta u_1 - \nu \Delta u_2 - |u|^{2\sigma}(u_1 - \mu u_2)$$
$$+ \alpha \boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla(|u|^2 u_1) + \beta(\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla u_1)|u|^2, \quad (7.7)$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \rho u_2 + \nu \Delta u_1 + \Delta u_2 - |u|^{2\sigma}(\mu u_1 + u_2)$$
$$+ \alpha \boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla(|u|^2 u_2) + \beta(\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla u_2)|u|^2. \quad (7.8)$$

为简单计,以 $u(t)$ 表示向量$(u_1(t), u_2(t))$则(7.7),(7.8)可写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \rho u + D\Delta u - D_1 |u|^{2\sigma} u + \alpha \boldsymbol{\lambda}_1 \nabla(|u|^2 u)$$
$$+ \beta(\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla u)|u|^2,$$

其中

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -\nu \\ \nu & 1 \end{pmatrix}, D_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\mu \\ \mu & 1 \end{pmatrix},$$

即有

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + DAu(t) + R(u(t), u(t), u(t)) = 0, \quad (7.9)$$

其中 $A = -\Delta$ 为无界自共轭算子,$D(A) = \{u \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega): u$ 满足(7.3)$\}$

$$R(u, v, \omega) = -\rho\omega + D_1(uv)^\sigma \omega - \alpha \boldsymbol{\lambda}_1$$
$$\cdot \nabla((u \cdot v)\omega) - \beta(\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla \omega)(u \cdot v),$$
$$(7.10)$$

$$R: D(A) \times D(A) \times D(A) \to \mathscr{H} = H \times H.$$

对 $R(u, v, \omega)$ 可作如下估计

引理 7.1 设 $u, v, \omega \in D(A)$,则 $R(u, v, \omega) \in \mathscr{H}$,且

$$\| R(u, v, \omega) \| \leqslant \rho \| \omega \| + C \| u \|_{H^1}^{\sigma} \| v \|_{H^1}^{\sigma} \| \omega \|_{H^1}$$
$$+ C \| \omega \|_{H^1} \| u \|_{H^1} \| v \|_{H^1}$$
$$+ C \| \omega \|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \| A\omega \|^{\frac{1}{2}} \| u \|_{H^1} \| v \|_{H^1},$$

在此和今后用 C 和 $C_i(i = 1, 2, \cdots)$ 表示任何仅依赖于参数$(\sigma, \rho, \nu, \mu, \alpha, \beta, \boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \delta, \Omega)$的常数.

证　以(7.10)可得

$$\| R(u,v,\omega)\| \leqslant \rho \|\omega\| + \| D_1(u\cdot v)^\sigma\omega\| + \|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla((u\cdot v)\omega)\| + \|\beta(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla\omega)(u\cdot v)\|, \tag{7.11}$$

$$\begin{aligned}\| D_1(u\cdot v)^\sigma\omega\| &= \sqrt{1+\mu^2}\left(\int_\Omega |u|^{2\sigma}|v|^{2\sigma}|\omega|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant \sqrt{1+\mu^2}\|u\|_{8\sigma}^\sigma\|v\|_{8\sigma}^\sigma\|\omega\|_4\\ &\leqslant C_1\|u\|_{H^1}^\sigma\|v\|_{H^1}^\sigma\|\omega\|_{H^1},\end{aligned} \tag{7.12}$$

$$\begin{aligned}&\|\beta(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla\omega)(u\cdot v)\|\\ \leqslant& |\beta\boldsymbol{\lambda}_2|\left(\int_\Omega|\nabla\omega|^2|u|^2|v|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\\ \leqslant& |\beta\boldsymbol{\lambda}_2|\,\|\nabla\omega\|_4\|u\|_8\|v\|_8\\ \leqslant& C\|\nabla\omega\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\omega\|_{H^1}^{\frac{1}{2}}\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}\\ \leqslant& C\|\omega\|_{H^1}^{1/2}\|w\|_{H^2}^{1/2}\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}\\ \leqslant& C\|\omega\|_{H^1}^{\frac{1}{2}}(\|\omega\|+\|A\omega\|)^{\frac{1}{2}}\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}\\ \leqslant& C\|\omega\|_{H^1}^{\frac{1}{2}}(\|\omega\|^{\frac{1}{2}}+\|A\omega\|^{\frac{1}{2}})\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}\\ \leqslant& C_2\|\omega\|_{H^1}^{\frac{1}{2}}\|A\omega\|^{\frac{1}{2}}\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}\\ &+C_3\|\omega\|_{H^1}\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}.\end{aligned} \tag{7.13}$$

因 $\alpha\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla((u\cdot v)\omega) = \alpha(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla\omega)(u\cdot v)+\alpha(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla u)\cdot(v\cdot\omega)+\alpha(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla v)(u\cdot\omega)$,类似于(7.13)可得

$$\begin{aligned}&\|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla((u\cdot v)\omega)\|\\ \leqslant& C_4\|\omega\|_{H^1}^{\frac{1}{2}}\|A\omega\|^{\frac{1}{2}}\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}\\ &+C_5\|u\|_{H^1}^{\frac{1}{2}}\|Au\|^{\frac{1}{2}}\|v\|_{H^1}\|\omega\|_{H^1}\\ &+C_6\|v\|_{H^1}^{\frac{1}{2}}\|Av\|^{\frac{1}{2}}\|u\|_{H^1}\|\omega\|_{H^1}\\ &+C_7\|\omega\|_{H^1}\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}.\end{aligned} \tag{7.14}$$

引理 7.1 由(7.11)—(7.14)推得,作为引理 7.1 的推论有

$$\|R(u,u,u)\| \leqslant \rho\|u\|_{H^1}+C_1\|u\|_{H^1}^{2\sigma+1}$$

$$+ C_8 \| u \|_{H^1}^{\frac{5}{2}} \| Au \|^{\frac{1}{2}} + C_9 \| u \|_{H^1}^3. \tag{7.15}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
&| (R(u,u,u), Au + u) | \\
&\leqslant \| R(u) \| \| A(u) \| + \| R(u) \| \| u \| \\
&\leqslant \| R(u) \| \| Au \| + \| R(u) \| \| u \|_{H^1} \\
&\leqslant \rho \| u \|_{H^1} \| Au \| + C_1 \| u \|_{H^1}^{2\sigma+1} \| Au \| \\
&\quad + C_8 \| u \|_{H^1}^{\frac{5}{2}} \| Au \|^{\frac{3}{2}} \\
&\quad + C_9 \| u \|_{H^1}^3 \| Au \| + \rho \| u \|_{H^1}^2 + C_1 \| u \|_{H^1}^{2\sigma+2} \\
&\quad + C_8 \| u \|_{H^1}^{\frac{7}{2}} \| Au \|^{\frac{1}{2}} + C_9 \| u \|_{H^1}^4 \\
&\leqslant \varepsilon \| Au \|^2 + C_{10}(\varepsilon) \| u \|_{H^1}^{4\sigma+2} + C_{11}, \forall \varepsilon > 0,
\end{aligned} \tag{7.16}$$

由(7.16)和(7.6)可得

定理 7.2 设(7.4)成立，$u_0 \in H^2(\Omega)$，则存在 θ_0 和 T_0 使得问题(7.1)，(7.2)的解的每一个分量具有 $D(A)$ 值的解析延拓在以下复区域

$$\Delta_1 = \{ t + se^{i\theta} : t \geqslant t_1, | \theta | \leqslant \theta_0, 0 \leqslant s \leqslant T_0 \},$$

其中 t_1 在(7.6)中确定，θ_0 和 T_0 依赖于初值和 $|\theta_0| \leqslant \frac{\pi}{4}$. 此外，存在常数 K 依赖于初值使得

$$\| u(z) \|, \| A^{\frac{1}{2}} u(z) \|, \| Au(z) \| \leqslant K, \forall z \in \Delta_2, \tag{7.17}$$

这里 $\Delta_2 = \{ z : \mathrm{Re} z \geqslant a, | \mathrm{Im} z | \leqslant b \}$，$a$、$b$ 为依赖于初值和R 的常数，$\| u_0 \|_{H^1} \leqslant R$.

证 注意到(7.16)和(7.6)推出[14]中的定理 1.1 条件满足，则由定理 7.1 可得本定理.

由定理 7.2 和 Cauchy 公式可得

命题 7.3 设(7.4)成立，$u_0 \in H^2(\Omega)$，则有

$$\left\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t) \right\|, \left\| A^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t) \right\|, \left\| A \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t) \right\| \leqslant K_2, \forall t \geqslant t_2,$$

其中常数 K_2 依赖于初值，$t_2 > t_1$ 依赖于初值和 R，$\| u_0 \|_{H^1} \leqslant R$.

以下构造问题(7.1)—(7.3)的近似惯性流形.首先我们知道，由 $A = -\Delta$ 的特征向量所组成的在 H 中的正交基 $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ 使得

$Aw_j = \lambda_j w_j, 0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_j \to \infty, j \to \infty$，给定 m，$P = P_m: H \to$ 子空间 $\{w_1, \cdots, w_m\}$ 的正交投影，$Q = Q_m = I - P_m$，P_m, P_m, Q_m 作用于(7.9)有

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + DAp + P_m R(p+q, p+q, p+q) = 0, \tag{7.18}$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + DAq + Q_m R(p+q, p+q, p+q) = 0, \tag{7.19}$$

其中 $p = P_m u, q = Q_m u$，且有

$$\| A^r p \| \leqslant \lambda_m^r \| p \|, r > 0, p \in P_m D(A^r), \tag{7.20}$$

$$\| A^r q \| \geqslant \lambda_{m+1}^r \| q \|, r > 0, q \in Q_m D(A^r), \tag{7.21}$$

$$\| A^{\frac{1}{2}} u \| = \| \frac{\partial u}{\partial x} \|, u \in H^1(\Omega), \tag{7.22}$$

$$\| P_m u \| \leqslant \| u \|, \| Q_m u \| \leqslant \| u \|, \forall u \in H. \tag{7.23}$$

由(7.7)和命题 7.3 得

$$\| Au(t) \| \leqslant C, \| A \frac{d}{\mathrm{d}t} u(t) \| \leqslant C, \forall t \geqslant t_*, \tag{7.24}$$

这里 C 和 t_* 类似于命题 7.3.

由(7.21),(7.23)和(7.24)推出

$$\| q(t) \| \leqslant C\lambda_{m+1}^{-1}, \| A^{\frac{1}{2}} q(t) \| \leqslant C\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}},$$

$$\| \frac{d}{\mathrm{d}t} q(t) \| \leqslant C\lambda_{m+1}^{-1}, \quad \forall t \geqslant t_*. \tag{7.25}$$

为构造问题(7.1)—(7.3)的近似惯性流形，定义映照 Φ: $P_m H \to Q_m H$ 使得 $\forall p \in P_m H, \Phi(p) = \Psi$，由下式给定

$$DA\Psi + Q_m R(p, p, p) = 0. \tag{7.26}$$

令 $\Sigma = \mathrm{graph}(\Phi)$，我们证明 Σ 为一个近似惯性流形，我们有：

定理 7.4 设(7.4)成立，且 $u_0 \in H^2(\Omega)$，则存在常数 K 依赖于初值使得

$$\mathrm{dist}_H(u(t),\Sigma)\leqslant K\lambda_{m+1}^{-\frac{3}{2}},\quad t\geqslant t_*. \tag{7.27}$$

其中 $u(t)$ 为(7.1)—(7.3) 的解, t_* 依赖于初值和 R, $\|u_0\|_{H^1}\leqslant R$.

证 由(7.19) 和(7.26) 可得

$$D(A\Psi-Aq)=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+Q_mR(u)-Q_mR(p), \tag{7.28}$$

$$\begin{aligned}R(u)-R(p)=&-\rho q+D_1|u|^{2\sigma}u-D_1|p|^{2\sigma}p\\&-\alpha\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(|u|^2u)+\alpha\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(|p|^2p)\\&-\beta(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla u)|u|^2+\beta(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla p)|p^2|.\end{aligned} \tag{7.29}$$

估计(7.29) 中的每一项 $f(s)=s^{2\sigma}$, ξ 在 $|u|$ 和 $|p|$ 之间.

$$\begin{aligned}&\|D_1|u|^{2\sigma}u-D_1|p|^{2\sigma}p\|\leqslant\|D_1(|u|^{2\sigma}-|p|^{2\sigma})u\|\\&\quad+\|D_1|p|^{2\sigma}(u-p)\|\\&\leqslant\sqrt{1+\mu^2}\|u\|_\infty\||u|^{2\sigma}-|p|^{2\sigma}\|\\&\quad+\sqrt{1+\mu^2}\|p\|_\infty^{2\sigma}\|q\|\\&\leqslant\sqrt{1+\mu^2}\|u\|_\infty\|f'(\xi)(|u|-|p|)\|\\&\quad+\sqrt{1+\mu^2}\|p\|_\infty^{2\sigma}\|q\| \qquad (7.30)\\&\leqslant\sqrt{1+\mu^2}\|u\|_\infty\|f'(\xi)\|_\infty\|q\|\\&\quad+\sqrt{1+\mu^2}\|p\|_\infty^{2\sigma}\|q\|.\end{aligned}$$

由(7.17) 和 $C_1\|u\|_{H^2}\leqslant\|u\|+\|\Delta u\|\leqslant C_2\|u\|_{H^2}$, $\forall u\in H^2(\Omega)$, 推出

$$\|u\|_{H^2}\leqslant C,\forall t\geqslant t_*, \tag{7.31}$$

其中 t_* 依赖于初值和 R, $\|u_0\|_{H^1}\leqslant R$,由此

$$\|u\|_\infty\leqslant C\|u\|^{\frac{1}{2}}\|u\|_{H^2}^{\frac{1}{2}}\leqslant C,\forall t\geqslant t_*. \tag{7.32}$$

类似地,

$$\begin{aligned}\|p\|_\infty&\leqslant C_2\|p\|^{\frac{1}{2}}\|p\|_{H^2}^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant C_2\|p\|^{\frac{1}{2}}(\|p\|+\|Ap\|)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$\leqslant C_2 \| u \|^{\frac{1}{2}}(\| u \| + \| Au \|)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_3, \tag{7.33}$$

由(7.33)和(7.32)得

$$\| \xi \|_\infty \leqslant \| p \|_\infty + \| u \|_\infty \leqslant C, \forall t \geqslant t_*. \tag{7.34}$$

由(7.30),(7.32)—(7.34)推得

$$\| D_1 | u |^{2\sigma} u - D_1 | p |^{2\sigma} p \| \leqslant C_5 \| q \| \tag{7.35}$$

$$\begin{aligned}
&\| \beta(\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla u) | u |^2 - \beta(\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla p) | p |^2 \| \\
&\leqslant \| \beta(\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot (\nabla u - \nabla p)) | u |^2 \| + \| \beta(\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla p)(| u |^2 - | p |^2) \| \\
&\leqslant | \beta\boldsymbol{\lambda}_2 | \| u \|_\infty^2 \| \nabla q \| + \| \beta(\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla p) \cdot (u + p)(u - p) \| \\
&\leqslant | \beta\boldsymbol{\lambda}_2 | \| u \|_\infty^2 \| \nabla q \| + | \beta\boldsymbol{\lambda}_2 | \| u \\
&\quad + p \|_\infty (\int_\Omega (\nabla p)^2 | q |^2 \mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant C_6 \| \nabla q \| + C_7 \| \nabla p \|_4 \| q \|_4 \\
&\leqslant C_6 \| \nabla q \| + C_8 \| \nabla p \|^{\frac{1}{2}} \| \nabla p \|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \| q \|_{H^1} \\
&\leqslant C_6 \| A^{\frac{1}{2}} q \| + C_8 \| A^{\frac{1}{2}} u \|^{\frac{1}{2}} (\| A^{\frac{1}{2}} p \| + \| AP \|)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \cdot (\| q \| + \| A^{\frac{1}{2}} q \|) \leqslant C_6 \| A^{\frac{1}{2}} q \| + C_8 \| A^{\frac{1}{2}} u \|^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \cdot (\| A^{\frac{1}{2}} u \| + \| Au \|)^{\frac{1}{2}} (\| q \| + \| A^{\frac{1}{2}} q \|) \\
&\leqslant C_9 \| q \| + C_{10} \| A^{\frac{1}{2}} q \|,
\end{aligned} \tag{7.36}$$

$$\alpha\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla(| u |^2 u) = \alpha(\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla u) | u |^2 + 2\alpha(\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla u) uu. \tag{7.37}$$

利用(7.37),类似于(7.36)可得

$$\begin{aligned}
&\| \alpha\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla(| u |^2 u) - \alpha\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla(| p |^2 p) \| \\
&\leqslant C_{11} \| q \| + C_{12} \| A^{\frac{1}{2}} q \|.
\end{aligned} \tag{7.38}$$

由(7.29),(7.35),(7.36)和(7.38)可知,存在常数 C 使得

$$\| R(u) - R(p) \| \leqslant C \| q \| + C \| A^{\frac{1}{2}} q \|. \tag{7.39}$$

由(7.28)和(7.39)可得

$$\| D(A\Psi - Aq) \| \leqslant \| \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \| + \| R(u) - R(p) \|$$

$$\leqslant C\lambda_{m+1}^{-1} + C\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant C\lambda_2^{-\frac{1}{2}}\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}} + C\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}. \tag{7.40}$$

由关系式

$$\begin{aligned}\| D(A\Psi - Aq) \| &= \sqrt{1+\nu^2}\, \| A\Psi - Aq \| \\ &\geqslant \sqrt{1+\nu^2} \cdot \lambda_{m+1} \| \Psi - q \|,\end{aligned} \tag{7.41}$$

可知

$$\| \Psi - q \| \leqslant C\lambda_{m+1}^{-\frac{3}{2}}, \quad \forall\, t \geqslant t_*, \tag{7.42}$$

其中 t_* 如同在(7.31)中的,则有

$$\begin{aligned} d_H(u(t), \Sigma) &\leqslant \| u(t) - (p(t) + \Phi(p(t))) \| \\ &\leqslant \| \Psi(t) - q(t) \| \leqslant C\lambda_{m+1}^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

定理证毕.

现考虑问题(7.1)—(7.3)解的 Gevrey 正则性,用此改善近似惯性流形的收敛速度,设 $\Omega = (0, 2\pi)^2$,且

$$\int_\Omega u(x,t)\mathrm{d}x = 0, \forall\, t > 0. \tag{7.43}$$

引理7.5 设 $u, v, w \in D(e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A)$, $\tau > 0$,则对 $R(u,v,w)$ 有如下估计

$$\begin{aligned} (e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} R(u,v,w), e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} Ay) &\leqslant \rho \| e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} w \| \, \| e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} Ay \| \\ &+ C \| e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} u \|^{\sigma} \| e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} v \|^{\sigma} \| e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} w \| \\ &\cdot \| e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} Ay \| + C \| e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} u \|^{\sigma} \| e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} v \|^{\sigma} \\ &\cdot \| e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} w \|^{\frac{1}{2}} \| e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} Aw \|^{\frac{1}{2}} \cdot \| e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} Ay \| \\ &+ C \| e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} u \|^{\frac{1}{2}} \| e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} v \| \, \| e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} Au \| \, \| e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} w \| \\ &\cdot \| e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} Ay \| + C \| e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} u \| \, \| e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} v \| \, \| e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} Av \|^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\cdot \| e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} w \|^{\frac{1}{2}} \| e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A y \| .$$

证 令

$$u = \sum_{j \in z^2} u_j e^{ijx}, u^* = e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} u = \sum_{j \in z^2} u_j^*, u_j^* = e^{\tau |j|} u_j, \tag{7.44}$$

$$v = \sum_{j \in z^2} v_j e^{ijx}, v^* = e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} v = \sum_{j \in z^2} v_j^* e^{ijx}, v_j^* = e^{\tau |j|} v_j, \tag{7.45}$$

$$w = \sum_{j \in z^2} w_j e^{ijx}, w^* = e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} w = \sum_{j \in z^2} w_j^* e^{ijx}, w_j^* = e^{\tau |j|} w_j, \tag{7.46}$$

$$y = \sum_{j \in z^2} y_j e^{ijx}, y^* = e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} y = \sum_{j \in z^2} y_j^* e^{ijx}, y_j^* = e^{\tau |j|} y_j. \tag{7.47}$$

我们有

$$(R(u,v,w),y) = -\rho(w,y) + ((u \cdot v)^\sigma D_1 w, y) - (\alpha \boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla((u \cdot v)w), y) - \beta((\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla w)(u \cdot v), y). \tag{7.48}$$

估计(7.48)中的每一项

$$-\rho(w,y) = -\rho \int_\Omega \sum_l w_l e^{ilx} \cdot \sum_s \bar{y}_s e^{-isx} dx = 4\pi^2 \rho \sum_{l=s} w_l \cdot \bar{y}_s, \tag{7.49}$$

$$((u \cdot v)^\sigma D_1 w, y) = \int_\Omega \Big(\sum_{j_1} u_{j_1} e^{ij_1 x} \cdot \sum_{k_1} v_{k_1} e^{ik_1 x} \Big) \cdots \Big(\sum_{j_\sigma} u_{j_\sigma} e^{ij_\sigma x} \cdot \sum_{k_\sigma} v_{k_\sigma} e^{ik_\sigma x} \Big) \times \Big(D_1 \sum_l w_l e^{ilx} \cdot \sum_s \bar{y}_s e^{-isx} \Big) dx$$
$$= 4\pi^2 \sum_{j_1 + k_1 + \cdots + j_\sigma + k_\sigma + l = s} (u_{j_1} \cdot v_{k_1}) \cdots (u_{j_\sigma} \cdot v_{k_\sigma})(D_1 w_l \cdot \bar{y}_s), \tag{7.50}$$

$$-(\beta(\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla w)(u \cdot v), y) = -\beta \int_\Omega (u \cdot v)(\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla w) \bar{y} dx$$

$$= -\beta\int_\Omega \Big(\sum_j u_j e^{ijx}\cdot\sum_k v_k e^{ikx}\Big)\cdot\Big(\sum_l(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot il)w_l e^{ilx}$$

$$\cdot\sum_s \bar{y}_s e^{-isx}\Big)\mathrm{d}x$$

$$= -4\pi^2\beta\sum_{j+k+l=s}(u_j\cdot v_k)(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot il)(w_l\cdot\bar{y}_s), \tag{7.51}$$

$$-\alpha(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla((u\cdot v)w),y) = -\alpha((\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla w)(u\cdot v),y)$$

$$-\alpha((\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla u)w,y) - \alpha(((\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla u)u)w,y). \tag{7.52}$$

类似于(7.51)可得

$$-\alpha((\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla w)(u\cdot v),y)$$

$$= -4\pi^2\alpha\sum_{j+k+l=s}(u_j\cdot v_k)\cdot(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot il)(w_l\cdot\bar{y}_s) \tag{7.53}$$

$$-\alpha(((\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla u)v)w,y)$$

$$= -4\pi^2\alpha\sum_{j+k+l=s}(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot ij)\cdot(u_j\cdot v_k)(u_l\cdot\bar{y}_s)$$

$$= -\alpha\int\Big(\sum_j(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot ij)u_j e^{ijx}\cdot\sum_k v_k e^{ikx}\Big)$$

$$\times\Big(\sum_l w_l e^{ilx}\cdot\sum_s\bar{y}_s e^{-isx}\Big)\mathrm{d}x. \tag{7.54}$$

类似地,

$$-\alpha(((\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla u)u)w,y)$$

$$= -4\pi^2\alpha\sum_{j+k+l=s}(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot ik)\cdot(u_j\cdot v_k)(w_l\cdot\bar{y}_s). \tag{7.55}$$

由(7.48)—(7.55)可得

$$(R(u,v,w),y) = -4\pi^2\rho\sum_{l=s}w_l\cdot\bar{y}_s$$

$$+4\pi^2\sum_{j_1+k_1+\cdots+j_\sigma+k_\sigma+l=s}(u_{j_1}\cdot v_{k_1})\cdots(u_{j_\sigma}\cdot v_{k_\sigma})(D_1 w_l\cdot\bar{y}_s)$$

$$-4\pi^2\alpha\sum_{j+k+l=s}(u_j\cdot v_k)(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot il)(w_l\cdot\bar{y}_s)$$

$$-4\pi^2\alpha\sum_{j+k+l=s}(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot ij)(u_j\cdot v_k)(w_l\cdot\bar{y}_s)$$

$$-4\pi^2\alpha\sum_{j+k+l=s}(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot ik)(u_j\cdot v_k)(w_l\cdot\bar{y}_s)$$

$$-4\pi^2\beta\sum_{j+k+l=s}(u_j\cdot v_k)(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot il)(w_l\cdot\bar{y}_s), \tag{7.56}$$

$$(e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}R(u,v,w),e^{2\tau A^{\frac{1}{2}}}Ay) = (R(u,v,w),e^{2\tau A^{\frac{1}{2}}}Ay)$$
$$= -4\pi^2\rho\sum_{l=s}(w_l^* \cdot \overline{y}_s^*)|s|^2$$
$$+4\pi^2\sum_{j_1+k_1+\cdots+j_\sigma+k_\sigma+l=s}(u_{j_1}^* \cdot v_{k_1}^*)\cdots(u_{j_\sigma}^* \cdot v_{k_\sigma}^*)$$
$$\cdot(D_1 w_l^* \cdot \overline{y}_s^*)|s|^2 \cdot e^{\tau(|s|-|j_1|-|k_1|-\cdots-|j_\sigma|-|k_\sigma|-|l|)}$$
$$-4\pi^2\alpha\sum_{j+k+l=s}(u_j^* \cdot v_k^*)(\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot il)(w_l^* \cdot \overline{y}_s^*)$$
$$\cdot|s|^2 e^{\tau(|s|-|j|-|k|-|l|)}$$
$$-4\pi^2\alpha\sum_{j+k+l=s}(\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot i_j)(u_j^* \cdot v_k^*)(w_l^* \cdot \overline{y}_s^*)$$
$$\cdot|s|^2 e^{\tau(|s|-|j|-|k|-|l|)}$$
$$-4\pi^2\alpha\sum_{j+k+l=s}(\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot ik)(u_j^* \cdot v_k^*)(w_l^* \cdot \overline{y}_s^*)$$
$$\cdot|s|^2 e^{\tau(|s|-|j|-|k|-|l|)}$$
$$-4\pi^2\beta\sum_{j+k+l=s}(u_j^* \cdot v_k^*)(\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot il)(w_l^* \cdot \overline{y}_s^*)$$
$$\cdot|s|^2 e^{\tau(|s|-|j|-|k|-|l|)}. \tag{7.57}$$

注意到

$$|s| = |j_1+k_1+\cdots+j_\sigma+k_\sigma+l| \leqslant |j_1|+|k_1|+\cdots+|j_\sigma|+|k_\sigma|+|l|,$$

因此

$$e^{\tau(|s|-|j_1|-|k_1|-\cdots-|j_\sigma|-|k_\sigma|-|l|)} \leqslant 1. \tag{7.58}$$

类似地,对 $s=j+k+l$ 有

$$e^{\tau(|s|-|j|-|k|-|l|)} \leqslant 1, \tag{7.59}$$

则从(7.57)—(7.59)有

$$|(e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}R(u,v,w),e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Ay)| \leqslant 4\pi^2\rho\sum_{l=s}|w_l^*||\overline{y}_s^*||s|^2$$
$$+4\pi^2\sqrt{1+\mu^2}\sum_{j_1+k_1+\cdots+j_\sigma+k_\sigma+|l|=|s|}|u_{j_1}^*||v_{k_1}^*|\cdots|u_{j_\sigma}^*|$$
$$|v_{k_\sigma}^*||w_l^*||\overline{y}_s^*||s|^2$$
$$+4\pi^2\alpha|\boldsymbol{\lambda}_1|\sum_{j+k+l=s}|u_j^*||v_k^*||l||w_l^*||\overline{y}_s^*||s|^2$$

$$+4\pi^2\alpha|\boldsymbol{\lambda}_1|\sum_{j+k+l=s}|j||u_j^*||v_k^*||w_l^*||\overline{y}_s^*||s|^2$$
$$+4\pi^2\alpha|\boldsymbol{\lambda}_1|\sum_{j+k+l=s}|u_j^*|k||v_k^*||w_l^*||\overline{y}_s^*||s|^2$$
$$+4\pi^2\beta|\boldsymbol{\lambda}_2|\sum_{j+k+l=s}|u_j^*||v_k^*||l||w_l^*||\overline{y}_s^*||s|^2. \tag{7.60}$$

显然

$$4\pi^2\rho\sum_{l=s}|w_l^*||\overline{y}_s^*||s|^2=\rho\int_\Omega\xi(x)\theta(x)\mathrm{d}x, \tag{7.61}$$

其中

$$\xi(x)=\sum_l|w_l^*|e^{ilx},\theta(x)=\sum_s|s|^2|\overline{y}_s^*|e^{isx}. \tag{7.62}$$

因此

$$4\pi^2\rho\sum_{l=s}|w_l^*||\overline{y}_s^*||s|^2\leqslant\rho\left|\int_\Omega\xi(x)\theta(x)\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant\rho\|\xi\|\|\theta\|=\rho\|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}w\|\|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Ay\|, \tag{7.63}$$
$$4\pi^2\sqrt{1+\mu^2}\sum_{j_1+k_1+\cdots+j_\sigma+k_\sigma+l=s}|u_{j_1}^*||v_{k_1}^*|\cdots$$
$$|u_{j_\sigma}^*||v_{k_\sigma}^*||w_l^*||\overline{y}_s^*||s|^2$$
$$=\sqrt{1+\mu^2}\int_\Omega\varphi_{j_1}(x)\Psi_{k_1}(x)\cdots\varphi_{j_\sigma}(x)\Psi_{k_\sigma}(x)\xi(x)\theta(x)\mathrm{d}x, \tag{7.64}$$

这里 $\xi(x),\theta(x)$ 如(7.62)所示,且

$$\varphi_{j_1}=|u_{j_1}^*|e^{ij_1x},\Psi_{k_1}(x)=|v_{k_1}^*|e^{ik_1x},$$
$$\vdots$$
$$\varphi_{j_\sigma}(x)=|u_{j_\sigma}^*|e^{ij_\sigma x},\Psi_{k_\sigma}(x)=|v_{k_\sigma}^*|e^{ik_\sigma x}. \tag{7.65}$$

由(7.64)可得

$$4\pi^2\sqrt{1+\mu^2}\sum_{j_1+k_1+\cdots+j_\sigma+k_\sigma+l=s}|u_{j_1}^*|$$
$$\cdot|v_{k_1}^*|\cdots|u_{j_\sigma}^*||v_{k_\sigma}^*||w_l^*||\overline{y}_s^*||s|^2$$
$$\leqslant\sqrt{1+\mu^2}\left|\int_\Omega\varphi_{j_1}(x)\Psi_{k_1}(x)\cdots\varphi_{j_\sigma}(x)\Psi_{k_\sigma}(x)\xi(x)\theta(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \sqrt{1+\mu^2}\,\|\varphi_{j_1}\|_{4\sigma+2}\|\Psi_{k_1}\|_{4\sigma+2}\cdots\|\varphi_{j_\sigma}\|_{4\sigma+2} \\
&\quad\cdot\|\Psi_{k_\sigma}\|_{4\sigma+2}\|\xi\|_{4\sigma+2}\|\theta\| \\
&\leqslant \sqrt{1+\mu^2}\,\|\varphi_{j_1}\|_{H^1}\|\Psi_{k_1}\|_{H^1}\cdots\|\varphi_{j_\sigma}\|_{H^1} \\
&\quad\cdot\|\Psi_{k_\sigma}\|\,\|\xi\|_{H^1}\|\theta\| \\
&\leqslant C_1\|A^{\frac{1}{2}}\varphi_{j_1}\|\,\|A^{\frac{1}{2}}\Psi_{k_1}\|\cdots\|A^{\frac{1}{2}}\varphi_{j_\sigma}\|\,\|A^{\frac{1}{2}}\Psi_{k_\sigma}\| \\
&\quad\cdot\|A^{\frac{1}{2}}\xi\|\,\|\theta\| \\
&\leqslant C_2\|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}y\|^{\sigma}\|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}v\|^{\sigma}\|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}w\| \\
&\quad\cdot\|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Ay\|. \qquad (7.66)
\end{aligned}
$$

由于

$$
\begin{aligned}
&4\pi^2\alpha|\boldsymbol{\lambda}_1|\sum_{j+k+l=s}|u_j^*||v_k^*||l||w_l^*||\overline{y}_s^*||s|^2 \\
&=\alpha|\boldsymbol{\lambda}_1|\int_\Omega\varphi(x)\Psi(x)\eta(x)\theta(x)\mathrm{d}x, \qquad (7.67)
\end{aligned}
$$

其中 $\theta(x)$ 为(7.62)所定义,且

$$
\begin{aligned}
&\varphi(x)=|u_j^*|\cdot e^{ijx},\ \Psi(x)=|v_k^*|e^{ikx}, \\
&\eta(x)=|l||w_l^*|e^{ilx}, \qquad (7.68)
\end{aligned}
$$

由(7.67)可得

$$
\begin{aligned}
&4\pi^2\alpha|\boldsymbol{\lambda}_1|\sum_{j+k+l=s}|u_j^*||v_k^*||l||w_l^*||\overline{y}_s^*||s|^2 \\
&\leqslant|\alpha||\boldsymbol{\lambda}_1|\left|\int_\Omega\varphi(x)\Psi(x)\eta(x)\theta(x)\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|\,\|\varphi\|_8\|\Psi\|_8\|\eta\|_4\|\theta\| \\
&\leqslant C_3\|\varphi\|_{H^1}\|\Psi\|_{H^1}\|\eta\|^{\frac{1}{2}}\|\eta\|_{H^1}^{\frac{1}{2}}\|\theta\| \\
&\leqslant C_4\|A^{\frac{1}{2}}\varphi\|\,\|A^{\frac{1}{2}}\Psi\|\,\|\eta\|\,\|A^{\frac{1}{2}}\eta\|^{\frac{1}{2}}\|\theta\| \\
&\leqslant C_5\|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}u\|\,\|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}v\|\,\|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}w\|^{\frac{1}{2}} \\
&\quad\|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Aw\|^{\frac{1}{2}}\|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Ay\|. \qquad (7.69)
\end{aligned}
$$

类似于(7.69)有

$$4\pi^2\alpha\,|\,\lambda_1\,|\sum_{j+k+l=s}|\,j\,|\,|\,u_j{}^*\,|\,|\,v_k{}^*\,|\,|\,w_l{}^*\,|\,|\,\overline{y}_s{}^*\,|\,|\,s\,|^2$$

$$\leqslant C_6\,\|\,e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}u\,\|^{\frac{1}{2}}\cdot\|\,e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Au\,\|^{\frac{1}{2}}\,\|\,e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}v\,\|$$

$$\|\,e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}w\,\|\,\|\,e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Ay\,\|,\tag{7.70}$$

$$4\pi^2\alpha\,|\,\lambda_1\,|\sum_{j+k+l=s}|\,u_j{}^*\,|\,|\,k\,|\,|\,v_k{}^*\,|\,|\,w_l{}^*\,|\,|\,\overline{y}_s{}^*\,|\,|\,s\,|^2$$

$$\leqslant C_7\,\|\,e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}u\,\|\,\|\,e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}v\,\|^{\frac{1}{2}}\,\|\,e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Av\,\|^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\,\|\,e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}w\,\|\,\|\,e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Ay\,\|,\tag{7.71}$$

$$4\pi^2\beta\sum_{j+k+l=s}|\,u_j{}^*\,|\,|\,v_k{}^*\,|\,|\,l\,|\,|\,w_l{}^*\,|\,|\,\overline{y}_s{}^*\,|\,|\,s\,|^2$$

$$\leqslant C_8\,\|\,e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}u\,\|\cdot\|\,e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}v\,\|\,\|\,e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}w\,\|^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\,\|\,e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Aw\,\|^{\frac{1}{2}}\,\|\,e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Ay\,\|.\tag{7.72}$$

由(7.60),(7.63),(7.66)—(7.69)推得引理的结论.

由引理7.5可得

$$|\,(e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}R(u,u,u),e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Au)\,|\leqslant\rho.\|\,e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}u\,\|\,\|\,e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Au\,\|$$

$$+\,C\,\|\,e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}u\,\|^{2\sigma+1}\cdot\|\,e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Au\,\|$$

$$+\,C\,\|\,e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}u\,\|^{\frac{5}{2}}\,\|\,e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Au\,\|^{\frac{3}{2}}$$

$$\leqslant\varepsilon\,\|\,e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Au\,\|^2+C_1(\varepsilon)\,\|\,e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}u\,\|^2$$

$$+\,C_2(\varepsilon)\,\|\,e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}u\,\|^{4\sigma+2}+C_3(\varepsilon)\,\|\,e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}u\,\|^{10}$$

$$\leqslant\varepsilon\,\|\,e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Au\,\|^2+C_4(\varepsilon)\,\|\,e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}u\,\|^{4\sigma+2}$$

$$+\,C_5(\varepsilon)\,\|\,e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}u\,\|^{4\sigma+2}+C_6$$

$$\leqslant\varepsilon\,\|\,e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}Au\,\|^2+C_7(\varepsilon)\,\|\,e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}u\,\|^{4\sigma+2}+C_6.\tag{7.73}$$

定理7.6 设条件(7.4)满足,$u_0\in H^2(\Omega)$,则存在常数k依赖于初值,使得问题(7.1)—(7.3)解的每个分量具有$D(A^{\frac{1}{2}}\exp(kA^{\frac{1}{2}}))$值的解析延拓在如下复区域

$$\Delta = \{t + se^{i\theta}, t \geqslant t_*, |\theta| \leqslant \theta_0, 0 \leqslant s \leqslant T_0\}, \tag{7.74}$$

且

$$\| e^{kA^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} u(z) \| \leqslant K, z \in \Delta, \tag{7.75}$$

这里 θ_0, T_0 和 K 依赖于初值，$|\theta_0| \leqslant \frac{\pi}{4}$，$t_*$ 依赖于初值和 R，$\| u_0 \|_{H^1} \leqslant R$.

证 由(7.6)和(7.73)可知[14]的定理3.1成立，因此定理得证.

由定理7.6和Cauchy公式可得

$$\| e^{kA^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t) \| \leqslant K_1, \quad \forall t \geqslant t_1. \tag{7.76}$$

由(7.75)和(7.76)可得，当 t 充分大时有

$$\| e^{kA^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} q(t) \| \leqslant K, \| e^{kA^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q(t) \| \leqslant K_1, \tag{7.77}$$

其中 $q(t) = Q_m u(t)$. 因此当 $t \geqslant t_*$ 时

$$\| A^{\frac{1}{2}} q(t) \| \leqslant K e^{-k\lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}}}, \| q(t) \| \leqslant K \lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}} e^{-k\lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}}},$$

$$\| \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} \| \leqslant K_1 \lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}} e^{-k\lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}}}. \tag{7.78}$$

应用(7.78)代替(7.25)，类似于定理7.4有

定理7.7 设(7.4)成立，$u_0 \in H^2(\Omega)$，则存在常数 E 依赖于初值，使得

$$\mathrm{dist}_H(\Sigma, u(t)) \leqslant E \lambda_{m+1}^{-1} e^{-k\lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}}}, t \geqslant t_*, \tag{7.79}$$

其中，$u(t)$ 为问题(7.1)—(7.3)的解，Σ 为它的近似惯性流形，t_* 依赖于初值和 R，$\| u_0 \|_{H^1} \leqslant R$.

§8 无界域上广义 Ginzburg-Landau 方程的整体吸引子

前面已提到，郭柏灵和王碧祥在[5]中考虑了如下的二维具

导数 Ginzburg-Landau 方程:

$$u_t = \rho u + (1 + i\nu)\Delta u - (1 + i\mu) |u|^{2\sigma} u + \alpha \boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla(|u|^2 u) + \beta(\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla u) |u|^2, \tag{8.1}$$

其中 $\rho > 0, \alpha, \beta, \nu, \mu$ 均为实数, $\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2$ 为实常数向量. 他们证明了方程(8.1) 具周期条件整体吸引子的有限维性质. 对方程的参数作了如下的假定

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu - \nu\delta^2}{1 + \delta^2}\right)^2} - 1} \geqslant \sigma \geqslant 3 \tag{8.2}$$

之后, 高洪俊, 段金桥在[15] 中证明了(8.1) 解的存在性. 他们证明 Cauchy 问题

$$u_t = \alpha_0 u + \alpha_1 \Delta u + \alpha_2 |u|^2 u_x + \alpha_3 |u|^2 u_y + \alpha_4 u^2 u_x + \alpha_5 u^2 u_y - \alpha_6 |u|^{2\sigma} u, \tag{8.3}$$

H^2 整体解的存在性, 其中 $\alpha_0 > 0$, $\alpha_j = a_j + ib_j$, $1 \leqslant j \leqslant 6, a_1 > 0, a_6 > 0, \sigma > 0$. 他们假设当 $b_1 b_6 > 0$ 时, $\sigma \geqslant \frac{1 + \sqrt{10}}{2}$ 或者如 $b_6 = 0$ 或 $b_1 b_6 < 0$, 则存在一个正数 $\delta > 0$, 使得

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(b_1\delta - b_6)^2}{(1 + \delta)(a_1\delta + a_4)}} - 1} \geqslant \sigma \geqslant \frac{1 + \sqrt{10}}{2}. \tag{8.4}$$

郭柏灵、李用声在[16] 中对参数更为广泛的条件和初值更弱的条件下证明整体解的存在性.

在[16] 中, 郭柏灵、李用声考虑二维具导数 Ginzburg-Landau 方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_t = \gamma u + (1 + i\nu)\Delta u - (1 + i\mu)|u|^{2\sigma} u + \boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla(|u|^2 u) \\ \qquad + (\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla u) |u|^2, t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^2; & (8.5) \\ u(x,0) = u_0(x), x \in \mathbb{R}^2; & (8.6) \end{cases}$$

其中 $\gamma > 0, \nu, \mu$ 为实数, $\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2$ 为具复分量的常数向量. 我们研究问题(8.5), (8.6) 的长时间行态, 关于 σ, ν, μ 的主要假设为

(A)(ⅰ) $\sigma>2$,(ⅱ) $-1-\nu\mu<\frac{\sqrt{2\sigma+1}}{\sigma}|\nu-\mu|$.

得到主要定理如下.

定理 8.1 设 σ,ν,μ 满足(A),则 GL 方程的 Gauchy 问题(8.5),(8.6)形成一个半群 $S(t)$,它具有整体吸引子 $\mathscr{A}\subset H_{lu}^1$,具有性质

(1)(不变性) $S(t)\mathscr{A}=\mathscr{A},\forall t\geqslant 0$;

(2)(紧性) $\mathscr{A}$ 在 H_{lu}^2 中有界,在空间 H_ρ^1 中紧;

(3)(吸引性)对任何有界集 $B\subset H_{lu}^1$

$\lim\limits_{t\to\infty}\mathrm{dist}_\rho(S(t)B,\mathscr{A})=\lim\limits_{t\to\infty}\sup\limits_{v\in B}\mathrm{dist}_\rho(S(t)v,\mathscr{A})=0$.

附注(ⅰ) 加权空间 H_ρ^m,H_{lu}^m 的定义即将在下面给出,dist_ρ 表示在空间 H_ρ^1 中的距离,$\mathscr{A}$ 常称之为(H_{lu}^1,H_ρ^1)吸引子.

(ⅱ) 在(ν,μ)平面上区域

$$|\nu|<\frac{\sqrt{2\sigma+1}}{\sigma},\quad |\mu|<\frac{\sqrt{2\sigma+1}}{\sigma}$$

是被包含在(A)(ⅱ)的双曲线区域的.

(ⅲ) 当 $\sigma=2$ 时,如设 $|\boldsymbol{\lambda}_1|,|\boldsymbol{\lambda}_2|$ 适当小,则主要定理仍成立.

先给出局部解的存在性.

设 $\rho>0$ 为适当加权函数,满足

$$|\nabla\rho(x)|,|\Delta\rho(x)|\leqslant\rho_0\rho(x),\int\rho(x)\mathrm{d}x=\rho_0<+\infty. \tag{8.7}$$

例如可取 $\rho=\frac{1}{\cosh|x|}$ 或 $\rho=e^{-|x|}$,令 $T_y\rho(x)=\rho(x-y)$,加权 L^p 模为

$$\|u\|_{p,\rho}=\left(\int\rho|u|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}},\quad 1<p<\infty.$$

一致局部模 $\|u\|_{p,lu}=\sup\limits_{y\in R^2}\|u\|_{p,T_y\rho}$.

L_ρ^p 表示加权 L^p 空间,$\|u\|_{p,\rho}<+\infty$,L_{lu}^p 表示一致局部空间

$$\| u \|_{p,lu} < +\infty, \quad \| T_y u - u \|_{p,lu} \to 0, \quad y \to 0.$$

易知空间 L^p_ρ, L^p_{lu} 为 Banach 空间,定义加权 Sobolev 空间 $W^{m,p}_\rho$

$$\| u \|_{W^{m,p}_\rho} = \left(\sum_{k \leqslant m} \| D^k u \|^p_{p,\rho} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

一致局部 Sobolev 空间 $W^{m,p}_{lu}$ 为 C^∞_b 空间在模 $\| u \|_{W^{m,p}_{lu}} = \sup\limits_{y \in R^2} \| u \|_{W^{m,p}_{T_y \rho}}$ 的完备化,特别 $H^m_\rho = W^{m,2}_\rho, H^m_{lu} = W^{m,2}_{lu}$.

对任何加权函数 ρ^* 具有性质(8.7),ρ_0模为 k,则有

$$\| u \|_{p,\rho^*} \leqslant C(\rho_0, k) \| u \|_{p,lu}.$$

可以得到广义的 Gdgliardo-Nirenberg 型插值不等式,

$$\| u \|_{W^{j,r}_{lu}} \leqslant C \| u \|^{1-\theta}_{L^q_{lu}} \| u \|^\theta_{W^{m,p}_{lu}}, u \in L^q_{lu} \cap W^{m,p}_{lu}(R^n),$$

其中 $\frac{1}{r} - \frac{j}{n} = \theta\left(\frac{1}{p} - \frac{m}{n}\right) + \frac{1-\theta}{q}, 1 < p, q, r < \infty, j, m$ 为整数,$0 \leqslant j \leqslant m, \frac{j}{m} \leqslant \theta \leqslant 1$. 常数 C 依赖于 ρ 仅通过它的积分 ρ_0. 我们有紧嵌入

$$W^{m,p}_{lu}(R^n) \rightarrowtail W^{j,r}_\rho(R^n), \frac{1}{r} > \frac{1}{p} - \frac{m-j}{n},$$

$1 < p, r < \infty$. 我们注意到由于平移不变性,嵌入 $W^{m,p}_{lu}(R^n) \to W^{j,r}_{lu}(R^n)$ 不是紧的.

对任何 $1 < p < \infty, X_p = L^p_{lu}$,定义线性算子 $A_p: D(A_p) \subset X_p \to X_p$,

$$A_p u = (1 + i\nu)\Delta u, D(A_p) = W^{2,p}_{lu}.$$

能证明[16]当 $p \geqslant 2, A_p$ 具有如下性质:

存在 $C_0(\nu) > 0, C_1(\nu, p) > 0$ 使得

$$\| (Z - A_p) f \|_{p,lu} \leqslant \frac{C_1}{|Z - \bar{R}|} \| f \|_{p,lu}, \forall f \in L^p_{lu}. \tag{8.8}$$

对每个 Z 在扇形

$$S(\nu, \bar{R}) = \{ Z \in C \mid Z \neq \bar{R}, |\arg(Z - R)| \leqslant \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2} |\arg(1 + i\nu)| \}, \tag{8.9}$$

其中 $\tilde{R}=C_0(\nu)\rho_0^2$，从(8.8)中可知

$$\|(Z-A_p)f\|_{p,\rho}\leqslant\frac{C_1}{|Z-\tilde{R}|}\|f\|_{p,\rho},\ \forall f\in L_\rho^p. \tag{8.10}$$

我们将证明上述估计对于 A_p 的预解式也成立，$1<p<2$. 注意到 L_ρ^p 对偶空间为 $L_\rho^{p'}$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,1<p,p'<\infty$，对偶内积为

$$(u,v)_\rho=\int\rho u\bar{v}\mathrm{d}x,\ u\in L_\rho^p,v\in L_\rho^{p'}.$$

因此，L_ρ^p 为自反 Banach 空间，对任何 $u\in L_\rho^p,1<p<2$，存在一个非零函数 $f\in L_\rho^{p'}$，使得

$$\langle u,f\rangle_\rho=\|u\|_{p,\rho}\|f\|_{p',\rho}.$$

注意到当 $Z\in S(\nu,\tilde{k})$ 时，(8.8)，(8.10) 对 $\overline{Z},\overline{A}_{p'}=(1-i\nu)/\Delta$ 也成立，因此存在 $v\in W_\rho^{2,p'}$ 使得

$$(\overline{Z}-\overline{A}_{p'})v=f.$$

于是$\langle u,(\overline{Z}-\overline{A}_{p'})v\rangle_\rho=\|u\|_{p,\rho}\|(\overline{Z}-\overline{A}_{p'})v\|_{p',\rho}$，由分部积分得

$$\begin{aligned}
&\|u\|_{p,\rho}\|(\overline{Z}-\overline{A}_{p'})v\|_{p',\rho}=\langle u,(\overline{Z}-\overline{A}_{p'})v\rangle_p\\
&=\langle(Z-A_p)u,v\rangle_\rho+2\int(1+i\nu)\nabla\rho\nabla\bar{v}u\mathrm{d}x\\
&\quad+\int(1+i\nu)\Delta\rho u\bar{v}\mathrm{d}x\\
&\leqslant\langle(Z-A_p)u,v\rangle_p+2\rho_\nu\|u\|_{p,\rho}\|v\|_{W_\rho^{1,p}},
\end{aligned}\tag{8.11}$$

其中 $\rho_\nu=\rho_0\sqrt{1+\nu^2}$，由插值得

$$\begin{aligned}
&\|v\|_{W_\rho^{1,p'}}\leqslant\varepsilon\|\overline{A}_{p'}v\|_{p',\rho}+C(\varepsilon)\|v\|_{p',\rho}\\
&\leqslant\varepsilon\|(\overline{Z}-\overline{A}_{p'})v\|_{p',\rho}\\
&\quad+(\varepsilon|Z|+C(\varepsilon))\|v\|_{p',\rho},\ \forall\varepsilon>0.
\end{aligned}$$

选取 ε 充分小，使 $\varepsilon\rho_\nu<\frac{1}{4}$，将上面不等式代入(8.11)得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|u\|_{p,\rho}\|(Z-A_{p'})v\|_{p',\rho}\leqslant&\langle(Z-A_p)u,v\rangle_\rho\\
&+2\rho_\nu(\varepsilon|Z|+C(\varepsilon))\|u\|_{p,\rho}\|v\|_{p',\rho}.
\end{aligned}$$

从 $\overline{A}_{p'}$ 的预解式估计(8.10)有

$$\| (\overline{Z}-\overline{A}_{p'})v \|_{p',\rho} \geqslant \frac{|Z-\tilde{R}|}{C_1} \| v \|_{p',\rho},$$

由此可得

$$\frac{|Z-\tilde{R}|}{2C_1} \| u \|_{p,\rho} \| v \|_{p',\rho} \leqslant \langle (Z-A_p)u, v\rangle_\rho$$

$$+2\rho_\nu(\varepsilon|Z|+C(\varepsilon)) \| u \|_{p,\rho} \| v \|_{p',\rho}$$

$$\leqslant \langle (Z-A_p)u, v\rangle_\rho + 2\rho_\nu(\varepsilon|Z-\tilde{R}|$$

$$+\varepsilon\tilde{R}+C(\varepsilon)) \| u \|_{p,\rho} \| v \|_{p',\rho}.$$

选取 $\varepsilon=\min\left\{\frac{1}{4\rho_\nu}, \frac{1}{8C_1\rho_\nu}\right\}$,则有

$$\frac{|Z-\tilde{R}|}{4C_1} \| u \|_{p,\rho} \| v \|_{p',\rho} \leqslant \langle (Z-A_p)u, v\rangle_\rho$$

$$+\frac{R_0}{4C_1} \| u \|_{p,\rho} \| v \|_{p',\rho}, \tag{8.12}$$

其中 $R_0=8C_1\rho_\nu(\varepsilon\tilde{R}+C(\varepsilon))$. 取 $R_1=\tilde{R}+2\sqrt{2}R_0$,则对任何 $Z\in S(\nu,R_1)$, $|Z-\tilde{R}|\geqslant 2R_0$.(注意扇形 $S(\nu,R_1)$ 的半角小于$\frac{3\pi}{4}$),因此

$$|Z-R_1| \leqslant |Z-\tilde{R}|+R_1-\tilde{R} \leqslant |Z-\tilde{R}|(1+\sqrt{2})R_0,$$

或

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}|Z-R_1| \leqslant |Z-\tilde{R}|.$$

于是

$$|Z-\tilde{R}|-R_0 \geqslant \frac{1}{2}|Z-\tilde{R}| \geqslant \frac{1}{2(\sqrt{2}+1)}|Z-R_1|.$$

因此,从上面和(8.12)有

$$\frac{|Z-R_1|}{C_2} \| u \|_{p,\rho} \| v \|_{p',\rho} \leqslant \langle (Z-A_p)u, v\rangle_\rho$$

$$\leqslant \| (Z-A_p)u \|_{p,\rho} \| v \|_{p',\rho},$$

这里 $C_2=8(\sqrt{2}+1)C_1$ 与 ρ 无关,故

$$\frac{|Z-R_1|}{C_2}\|u\|_{p,\rho}\leqslant\|(Z-A_p)u\|_{p,\rho},$$

$$\forall Z\in S(\nu,R_1).\tag{8.13}$$

以 $T_y\rho$ 代替 ρ,再在 $y\in\mathbb{R}^2$ 上取上界有

$$\frac{|Z-R_1|}{C_2}\|u\|_{p,lu}\leqslant\|(Z-A_p)u\|_{p,lu},$$

$$\forall Z\in S(\nu,R_1).\tag{8.14}$$

因此我们得到 $A_p(1<p<2)$ 预解式的估计

$$\|(Z-A_p)^{-1}u\|_{p,\rho}\leqslant\frac{C_2}{|Z-R_1|}\|u\|_{p,\rho},$$

$$\forall Z\in S(\nu,R_1),\tag{8.15}$$

$$\|(Z-A_p)^{-1}u\|_{p,lu}\leqslant\frac{C_2}{|Z-R_1|}\|u\|_{p,lu},$$

$$\forall Z\in S(\nu,R_1),\tag{8.16}$$

这是 A_p 形成一个在 L_{lu}^p 上的解析半群的重要条件.

令 $B_p=A_p-(R_1+1)$,则 $0\in S(\nu,-1)$ 包含在 B_p 的预解式中,且 B_p 在 X_p 上形成解析半群 $e^{B_pt}(t\geqslant 0)$,具有性质:

$$\|e^{B_pt}u\|_{X_p}\leqslant Me^{-\omega t}\|u\|_{X_p},\ \forall u\in X_p,t\geqslant 0,\tag{8.17}$$

$$\|e^{B_pt}u\|_{W_{lu}^{s,p}}\leqslant Mt^{-s/2}e^{-\omega t}\|u\|_{X_p},$$

$$\forall u\in X_p,s=0,1,2,t>0,\tag{8.18}$$

$$\|e^{B_qt}u\|_{W_{lu}^{s+1},q}\leqslant Mt^{-\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)}e^{-\omega t}\|u\|_{W_{lu}^{s,p}},$$

$$\forall u\in W_{lu}^{s,p},\quad 1<p\leqslant q,\quad t>0,\tag{8.19}$$

其中 M 和 ω 为某正数.上面最后不等式由插值得到的,令

$$F(u)=(\gamma+R_1+1)u+(1+i\mu)|u|^{2\sigma}u$$

$$+(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla)(|u|^2u)+(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla u)|u|^2.\tag{8.20}$$

我们能写问题(8.5),(8.6)为泛函形式

$$u_t=B_pu+F(u),u(0)=u_0.\tag{8.21}$$

不难看到，非线性映照 $F(u)$是一个局部 Lipschitz 连续的：$D(B_2^{\frac{1}{2}})=H_{lu}^1\to X_p, p=\frac{3}{2}$.(8.21)的解能写成积分方程形式

$$u(t)=e^{B_pt}u_0+\int_0^t e^{B_p(t-s)}F(u(s))\mathrm{d}s. \tag{8.22}$$

设 $u_0\in H_{lu}^1$，定义映照 $\mathcal{T}:C([0,T];H_{lu}^1)\ni\varphi\to u(t)=\mathcal{T}_\varphi$ 为

$$u(t)=e^{B_pt}u_0+\int_0^t e^{B_p(t-s)}F(\varphi(s))\mathrm{d}s, t\in[0,T].$$

如我们能证明，$\exists\, T>0$，$\mathcal{T}$在 $C([0,T];H_{lu}^1)$上是压缩的，则 $\mathcal{T}$的不动点为(8.22)的局部解，事实上，对任何 $\varphi\in C([0,T];H_{lu}^1)$，

$$L=\sup_{[0,T]}\|\varphi\|_{H_{lu}^1},$$

$$\|F(\varphi)\|_{L_{lu}^{\frac{3}{2}}}\leqslant C(\|\varphi\|_{lu}^{\frac{3}{2}}+\|\varphi\|_{H_{lu}^1}^{2\sigma+1}$$
$$+\|\varphi\|_{H_{lu}^1}^2\|\nabla\varphi\|_{L_{lu}^2})\leqslant C(L^{2\sigma+1}+1).$$

由(8.22) 和不等式(8.19) 可得

$$\|\mathcal{T}\varphi(t)\|_{H_{lu}^1}\leqslant Me^{-wt}\|u_0\|_{H_{lu}^1}$$
$$+\int_0^t\|e^{B_p(t-s)}F(\varphi(s))\|_{H_{lu}^1}\mathrm{d}s$$
$$\leqslant Me^{-wt}\|u_0\|_{H_{lu}^1}+\int_0^t M(t-s)^{-\frac{2}{3}}e^{-w(t-s)}$$
$$\|F(\varphi(s))\|_{L_{lu}^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}s$$
$$\leqslant Me^{-wt}\|u_0\|_{H_{lu}^1}+\int_0^t CM(t-s)^{-\frac{2}{3}}e^{-w(t-s)}(L^{2\sigma+1}+1)\mathrm{d}s$$
$$\leqslant Me^{-wt}\|u_0\|_{H_{lu}^1}+CMT^{\frac{1}{3}}(L^{2\sigma+1}+1).$$

于是 $\mathcal{T}\varphi\in C([0,T];H_{lu}^1)$，对 $L>0,\varphi,\psi\in C([0,T];H_{lu}^1)$具有 $\sup_{[0,T]}\|\varphi\|_{H_{lu}^1}\leqslant L$，$\sup_{[0,T]}\|\psi\|_{H_{lu}^1}\leqslant L$，

$$\|F(\varphi(s)-F(\psi(s))\|_{L_{lu}^{\frac{3}{2}}}$$
$$\leqslant C(L^{2\sigma}+1)\|\varphi(s)-\psi(s)\|_{H_{lu}^1}.$$

于是

$$\|\mathcal{T}\varphi(t)-\mathcal{T}\psi(t)\|_{H_{lu}^1}$$

$$\leqslant \int_0^t \| e^{B_p(t-s)}(F(\varphi(s)) - F(\psi(s))) \|_{H^1_{lu}} ds$$

$$\leqslant \int_0^t M(t-s)^{-\frac{2}{3}} e^{-w(t-s)} \| F(\varphi(s)) - F(\psi(s)) \|_{L^{\frac{3}{2}}_{lu}} ds$$

$$\leqslant \int_0^t MC(t-s)^{-\frac{2}{3}} e^{-w(t-s)} (L^{2\sigma} + 1) \| \varphi(s) - \psi(s) \|_{H^1_{lu}} ds$$

$$\leqslant CMT^{\frac{1}{3}}(L^{2\sigma} + 1) \sup_{[0,T]} \| \varphi(t) - \psi(t) \|_{H^1_{lu}}.$$

因此,当 $CMT^{\frac{1}{3}}(L^{2\sigma}+1) \leqslant \frac{1}{2}$,$\mathcal{T}$在 $C([0,T];H^1_{lu})$ 上是压缩的,我们有

定理 8.2(局部存在性) 如 $u_0 \in H^1_{lu}$,则存在抽象 Cauchy 问题(8.21)在区间$[0,T_*)$上的惟一解.

$u(t) \in C([0,T_*),H^1_{lu}) \cap C([0,T_*),H^2_{lu})$,若 $T^* < \infty$,则

$$\lim_{t \to T^*} \| u(t) \|_{H^1_{lu}} = +\infty.$$

由下面光滑性证明可知 $u(t) \in C([0,T_*),H^2_{lu})$.

以下作解的加权估计.

引理 8.3 设(A)成立且

$$2 \leqslant p < \frac{2\sqrt{1+\nu^2}}{\sqrt{1+\nu^2}-1}, \tag{8.23}$$

则存在常数 C 与 R 无关和 $t_0(R) > 0$ 使得当 $\| u_0 \|_{p,\rho} \leqslant R$ 时有

$$\| u \|_{p,\rho}^p \leqslant C, t \geqslant t_0(R).$$

证 直接计算得

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt} \| u \|_{p,\rho}^p = \mathrm{Re}\int \rho |u|^{p-2} \overline{u} u_t dx$$

$$= \mathrm{Re}\int \rho |u|^{p-2} \overline{u} [\gamma u + (1+i\nu)\Delta u - (1+i\mu)|u|^{2\sigma} u$$

$$+ (\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla)(|u|^2 u) + (\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla u)|u|^2] dx$$

$$= \gamma \| u \|_{p,\rho}^p - \| u \|_{p+2\sigma,\rho}^{p+2\sigma} + I_1 + I_2, \tag{$*$}$$

其中 $I_1 = \mathrm{Re}\int (1+i\nu)\rho |u|^{p-2} \overline{u} \Delta u dx$,

$$I_2 = \mathrm{Re}\int \rho |u|^{p-2}\overline{u}((\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla)(|u|^2 u)$$
$$+ (\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla u)|u|^2)\mathrm{d}x.$$

分部积分得:

$$I_1 = -\mathrm{Re}\int (1+i\nu)\nabla\rho |u|^{p-2}\overline{u}\nabla u \mathrm{d}x - \mathrm{Re}\int (1+i\nu)$$
$$\rho\nabla(|u|^{p-2}\overline{u})\nabla u \mathrm{d}x$$
$$= -\mathrm{Re}\int (1+i\nu)\nabla\rho |u|^{p-2}\overline{u}\nabla u \mathrm{d}x$$
$$-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int \rho |u|^{p-4}[p|u|^2|\nabla u|^2 + (1+i\nu)$$
$$(p-2)\overline{u}^2(\nabla u)^2]\mathrm{d}x$$
$$= -\mathrm{Re}\int (1+i\nu)\nabla\rho |u|^{p-2}\overline{u}\nabla u \mathrm{d}x$$
$$-\frac{1}{4}\int \rho |u|^{p-4}\sum_{j=1}^{2}(\overline{u}\partial_j u, u\partial_j\overline{u})M(\nu,p)\begin{pmatrix} u\partial_j\overline{u} \\ \overline{u}\partial_j u \end{pmatrix}\mathrm{d}x, \tag{8.24}$$

这里

$$M(\nu,p) = \overline{M(\nu,p)}^{tr} = \begin{pmatrix} p & (1+i\nu)(p-2) \\ * & p \end{pmatrix}. \tag{8.25}$$

当(8.23)满足时,$M(\nu,p)$的最小特征值

$$\lambda_M(\nu,p) = p - |p-2|\sqrt{1+\nu^2} > 0. \tag{8.26}$$

因此 $M(\nu,p)$是正定的,我们有

$$I_1 < \rho_\nu\int \rho |u|^{p-1}|\nabla u|\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\lambda_M(\nu,p)\int \rho |u|^{p-2}|\nabla u|^2\mathrm{d}x$$
$$\leqslant \frac{2\rho_\nu{}^2}{\lambda_M(\nu,p)}\int \rho |u|^p\mathrm{d}x - \frac{1}{8}\lambda_M(\nu,p)\int \rho |u|^{p-2}|\nabla u|^2\mathrm{d}x.$$

由 Cauchy 不等式

$$|I_2| \leqslant (3|\boldsymbol{\lambda}_1| + |\boldsymbol{\lambda}_2|)\int \rho |u|^{p+1}|\nabla u|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant \frac{1}{8}\lambda_M(\nu,p)\int \rho |u|^{p-2}|\nabla u|^2\mathrm{d}x$$
$$+ \frac{2(3|\boldsymbol{\lambda}_1| + |\boldsymbol{\lambda}_2|)^2}{\lambda_M(\nu,p)}\int \rho |u|^{p+4}\mathrm{d}x,$$

因 $\sigma > 2$,由 Hölder 不等式有

$$\frac{2(3|\boldsymbol{\lambda}_1|+|\boldsymbol{\lambda}_2|)^2}{\lambda_M(\nu,p)}\int\rho|u|^{p+4}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\frac{2(3|\boldsymbol{\lambda}_1|+|\boldsymbol{\lambda}_2|)^2}{\lambda_M(\nu,p)}\left(\int\rho|u|^{p}\mathrm{d}x\right)^{1-\frac{2}{\sigma}}\left(\int\rho|u|^{p+2\sigma}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{\sigma}}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\|u\|_{p+2\sigma,\rho}^{p+2\sigma}+C_1\|u\|_{p,\rho}^{p},$$

其中

$$C_1=\frac{\sigma-2}{\sigma}\left(\frac{\sigma}{4}\right)^{\frac{2(\sigma-2)}{\sigma^2}}\left(\frac{2(3|\boldsymbol{\lambda}_1|+|\boldsymbol{\lambda}_2|)^2}{\lambda_M(\nu,p)}\right)^{\frac{2\sigma}{\sigma-2}},$$

于是可得

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{p,\rho}^{p}\leqslant C_2\|u\|_{p,\rho}^{p}-\frac{1}{2}\|u\|_{p+2\sigma,\rho}^{p+2\sigma}$$

$$\leqslant-\frac{C_2}{p}\|u\|_{p,\rho}^{p}+\frac{C_3}{p},$$

这里 $C_2=\gamma+\dfrac{2\rho^2}{\lambda_M(\nu,\rho)}+C_1, C_3=\sigma_{\rho_0}\left(\dfrac{2C_2(p+1)}{p+2\sigma}\right)^{\frac{p+2\sigma}{2\sigma}}$.

由 Gronwall 不等式有

$$\|u\|_{p,\rho}^{p}\leqslant\|u_0\|_{p,\rho}^{p}e^{-C_2t}+\frac{C_3}{C_2},\quad t\geqslant 0.$$

引理得证.

附注 当 $\sigma=2$ 时,设 $6|\boldsymbol{\lambda}_1|+2|\boldsymbol{\lambda}_2|<\lambda_M(\nu,p)$,则引理仍然成立.

引理 8.4 在假设(A)下,存在常数 C 与 R 无关和 $t_1(R)>0$,使得当 $\|u_0\|_{H_\rho^1}\leqslant R$ 时,

$$\|\nabla u(t)\|_{2,\rho}^{2}\leqslant C,\quad t\geqslant t_1(R).$$

证 由方程(8.5)和分部积分得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\rho|\nabla u|^2\mathrm{d}x=\mathrm{Re}\int\rho\nabla\overline{u}\nabla u_t\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{Re}\int\rho\nabla\overline{u}\nabla[\gamma u+(1+i\nu)\Delta u-(1+i\mu)|u|^{2\sigma}u$$

$$+(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla)(|u|^2u)+(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla u)|u|^2]\mathrm{d}x$$

$$=\gamma\|\nabla u\|_{2,\rho}^2-\|\Delta u\|_{2,\rho}^2-\mathrm{Re}\int(1+i\nu)\nabla\rho\nabla\overline{u}\Delta u\mathrm{d}x$$

$$+\mathrm{Re}\int(1+i\mu)\rho|u|^{2\sigma}u\Delta\overline{u}\mathrm{d}x$$

$$+\mathrm{Re}\int(1+i\mu)\nabla\rho\Delta\overline{u}|u|^{2\sigma}u\mathrm{d}x$$

$$-\mathrm{Re}\int\rho\Delta\overline{u}((\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla)(|u|^2u)+(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla u)|u|^2)\mathrm{d}x$$

$$-\mathrm{Re}\int\nabla\rho\nabla\overline{u}[(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla)(|u|^2u)+(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla u)|u|^2]\mathrm{d}x$$

$$=\gamma\|\nabla u\|_{2,\rho}^2-\|\Delta u\|_{2,\rho}^2+\sum_{k=3}^{7}I_k, \tag{8.27}$$

其中 $|I_3|=|-\mathrm{Re}\int(1+i\nu)\nabla\rho\nabla\overline{u}\Delta u\mathrm{d}x|\leqslant\rho_\nu\int\rho|\nabla u||\Delta u|\mathrm{d}x,$

$$I_4=\mathrm{Re}\int\rho(1-i\mu)|u|^{2\sigma}\overline{u}\Delta u\mathrm{d}x,$$

$$|I_5|=|-\mathrm{Re}\int(1+i\mu)\nabla\rho\nabla\overline{u}|u|^{2\sigma}\Delta u\mathrm{d}x|$$

$$\leqslant\rho_\mu\int\rho|u|^{2\sigma+1}|\nabla u|\mathrm{d}x,$$

$$|I_6|=|-\mathrm{Re}\int\nabla\rho\nabla\overline{u}[(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla)(|u|^2u)$$

$$+(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla u)|u|^2]\mathrm{d}x|$$

$$\leqslant(3|\boldsymbol{\lambda}_1|+|\boldsymbol{\lambda}_2|)\rho_0\int\rho|u|^2|\nabla u|^2\mathrm{d}x,$$

$$|I_7|=|-\mathrm{Re}\int\rho\Delta\overline{u}[(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla)(|u|^2u)+(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla u)|u|^2]\mathrm{d}x|$$

$$\leqslant(3|\boldsymbol{\lambda}_1|+|\boldsymbol{\lambda}_2|)\int\rho|u|^2|\nabla u||\Delta u|\mathrm{d}x.$$

令 $\delta>0$(待定),定义

$$V_\delta(u(t))=\int\rho\left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2+\frac{\delta}{2\delta+2}|u|^{2\sigma+2}\right)\mathrm{d}x, \tag{8.28}$$

从(8.27)和(*)具 $p=2\sigma+2$ 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V_\delta(u(t))=\gamma(\|\nabla u\|_{2,\rho}^2+\delta\|u\|_{2\sigma+2,\rho}^{2\sigma+2})$$

$$-(\|\Delta u\|_{2,\rho}^2+\delta\|u\|_{4\sigma+2,\rho}^{4\sigma+2})$$

$$
\begin{aligned}
&+(\delta I_1+I_4)+I_3+I_5+I_6+\delta I_2+I_7 \\
\leqslant\ & \gamma(\|\nabla u\|_{2,\rho}^2+\delta\|u\|_{2\sigma+2,\rho}^{2\sigma+2}) \\
&-(\|\Delta u\|_{2,\rho}^2+\delta\|u\|_{4\sigma+2,\rho}^{4\sigma+2}) \\
&+\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int\rho(|u|^{2\sigma}u,\Delta u)\cdot N_0\cdot\begin{pmatrix}|u|^{2\sigma}\overline{u}\\ \Delta u\end{pmatrix}\mathrm{d}x \\
&+\rho_\nu\int\rho|\nabla u||\Delta u|\mathrm{d}x+\rho_\mu\int\rho|u|^{2\sigma+1}|\nabla u|\mathrm{d}x \\
&+(3|\boldsymbol{\lambda}_1|+|\boldsymbol{\lambda}_2|)\rho_0\int\rho|u|^2|\nabla u|^2\mathrm{d}x \\
&+\delta(3|\boldsymbol{\lambda}_1|+|\boldsymbol{\lambda}_2|)\int\rho|u|^{2\sigma+3}|\nabla u|\mathrm{d}x \\
&+(3|\boldsymbol{\lambda}_1|+|\boldsymbol{\lambda}_2|)\int\rho|u|^2|\nabla u||\Delta u|\mathrm{d}x,
\end{aligned}\tag{8.29}
$$

其中

$$
N_0=\overline{N_0}^{tr}=\begin{pmatrix}0 & 1+\delta-i(\delta\nu-\mu)\\ * & 0\end{pmatrix}.
$$

类似于(8.24)—(8.26),对任何 α

$$
|\alpha|<\frac{\sqrt{2\sigma+1}}{\sigma},
$$

$M(\alpha,2\sigma+2)$ 的特征值 $\lambda_M(\alpha,2\sigma+2)$ 是正的,因此,$M(\alpha,2\sigma+2)$ 是正定的,于是我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\int(1+i\alpha)\rho|u|^{2\sigma}\overline{u}\Delta u\mathrm{d}x \\
=&-\mathrm{Re}\int(1+i\alpha)\nabla\rho|u|^{2\sigma}\overline{u}\nabla u\mathrm{d}x \\
&-\int\rho|u|^{2\sigma-2}\sum_{j=1}^{2}(\overline{u}\partial_j u,u\partial_j\overline{u})M(\alpha,2\sigma+2)\begin{pmatrix}u\partial_j\overline{u}\\ \overline{u}\partial_j u\end{pmatrix}\mathrm{d}x \\
\leqslant&-\lambda_M(\alpha,p)\int\rho|u|^{2\sigma}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\rho_\alpha\int\rho|u|^{2\sigma+1}|\nabla u|\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

等价地有

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\int(1+i\alpha)\rho|u|^{2\sigma}\overline{u}\Delta u\mathrm{d}x+\lambda_M(\alpha,2\sigma)\int\rho|u|^{2\sigma}|\nabla u|^2\mathrm{d}x \\
&-\rho_\alpha\int\rho|u|^{2\sigma+1}|\nabla u|\mathrm{d}x\leqslant 0.
\end{aligned}\tag{8.30}
$$

乘(8.30)以 $-\eta(\eta>0$ 待定)再和(8.29)相加得

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V_\delta(u(t)) \leqslant & \gamma\left(\|\nabla u\|_2^2+\delta\|u\|_{2\sigma+2}^{2\sigma+2}\right) \\
& -(1-k)\left(\|\nabla u\|_2^2+\delta\|u\|_{4\sigma+2}^{4\sigma+2}\right) \\
& -\eta\lambda_M(\alpha,2\sigma+2)\int\rho|u|^{2\sigma}|\nabla u|^2\mathrm{d}x \\
& +\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int\rho(|u|^{2\sigma}u,\Delta u)\cdot N\cdot\begin{pmatrix}|u|^{2\sigma}\overline{u}\\ \Delta\overline{u}\end{pmatrix}\mathrm{d}x \\
& +(\rho_\mu+\eta\rho_\alpha)\int\rho|u|^{2\sigma+1}|\nabla u|\mathrm{d}x+\rho_\nu\int\rho|\nabla u||\Delta u|\mathrm{d}x \\
& +(3|\boldsymbol{\lambda}_1|+|\boldsymbol{\lambda}_2|)\rho_0\int\rho|u|^2|\nabla u|^2\mathrm{d}x \\
& +\delta(3|\boldsymbol{\lambda}_1|+|\boldsymbol{\lambda}_2|)\int\rho|u|^{2\sigma+3}|\nabla u|\mathrm{d}x \\
& +(3|\boldsymbol{\lambda}_1|+|\boldsymbol{\lambda}_2|)\int\rho|u|^2|\nabla u||\Delta u|\mathrm{d}x, \quad (8.31)
\end{aligned}
$$

其中 $0\leqslant k<1$ 给定.

$$
N=\overline{N}^{tr}=\begin{pmatrix}-2\delta k & 1+\delta-\eta-i(\delta\nu-\mu-\alpha\eta)\\ * & -2k\end{pmatrix}.
$$

对矩阵 N 有

断言 当 σ、ν 和 μ 满足(A),我们能选取 δ,η 为正的,$k\in(0,1)$,$|\alpha|<\dfrac{\sqrt{2\sigma+1}}{\sigma}$,使得 N 为非正,即有

$$
\mathrm{Re}\int\rho(|u|^{2\sigma}u,\Delta u)\cdot N\cdot\begin{pmatrix}|u|^{2\sigma}\overline{u}\\ \Delta u\end{pmatrix}\mathrm{d}x\leqslant 0.
$$

(8.31) 最后 5 个积分能为如下控制

$$
\begin{aligned}
& (\rho_\mu+\eta\rho_\alpha)\int\rho|u|^{2\sigma+1}|\nabla u|\mathrm{d}x \\
\leqslant & \frac{1}{8}(1-k)\int\rho|u|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x+\frac{2(\rho_\mu+\eta\rho_\alpha)^2}{1-k}\int\rho|\nabla u|^2\mathrm{d}x, \\
& \rho_\nu\int\rho|\nabla u||\Delta u|\mathrm{d}x \\
\leqslant & \frac{1}{8}(1-k)\int\rho|\Delta u|^2\mathrm{d}x+\frac{2\rho_\mu^2}{1-k}\int\rho|\nabla u|^2\mathrm{d}x, \\
& (3|\boldsymbol{\lambda}_1|+|\boldsymbol{\lambda}_2|)\rho_0\int\rho|u|^2|\nabla u|^2\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$= (3|\boldsymbol{\lambda}_1|+|\boldsymbol{\lambda}_2|)\rho_0\int \rho^{\frac{1}{\sigma}}|u|^2|\nabla u|^{\frac{2}{\sigma}}\rho^{1-\frac{1}{\sigma}}|\Delta u|^{2-\frac{2}{\sigma}}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant (3|\boldsymbol{\lambda}_1|+|\boldsymbol{\lambda}_2|)\rho_0\left(\int \rho|u|^{2\sigma}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\sigma}}\left(\int \rho|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{1-\frac{1}{\sigma}}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\eta\lambda_M(\alpha,2\sigma+2)\int \rho|u|^{2\sigma}|\nabla u|^2\mathrm{d}x$$

$$+\frac{(\sigma-1)[(3|\boldsymbol{\lambda}_1|+|\boldsymbol{\lambda}_2|)\rho_0]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}}{\sigma}\left(\frac{2}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\int \rho|\nabla u|^2\mathrm{d}x,$$

$$\int \rho|u|^2|\nabla u||\Delta u|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \varepsilon_1\int \rho|\Delta u|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{4\varepsilon_1}\int \rho|u|^4|\nabla u|^2\mathrm{d}x,$$

$$\int \rho|u|^{2\sigma+3}|\nabla u|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \varepsilon_2\int \rho|u|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x+\frac{1}{4\varepsilon_2}\int \rho|u|^4|\nabla u|^2\mathrm{d}x,$$

其中 $\varepsilon_1>0,\varepsilon_2>0$ 为任意,因 $\sigma>2$,由 Young 不等式有

$$\int \rho|u|^4|\nabla u|^2\mathrm{d}x=\int \rho|u|^4|\nabla u|^{\frac{4}{\sigma}}|\nabla u|^{2\left(1-\frac{2}{\sigma}\right)}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \varepsilon_3\int \rho|u|^{2\sigma}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{\sigma-2}{\sigma}\left(\frac{2}{\sigma\varepsilon_3}\right)^{\frac{2}{\sigma-2}}\int \rho|\nabla u|^2\mathrm{d}x,\quad \forall\varepsilon_3>0.$$

现选取 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3>0$,使得

$$\varepsilon_1(3|\boldsymbol{\lambda}_1|+|\boldsymbol{\lambda}_2|)\leqslant\frac{1}{2}(1-k),$$

$$\varepsilon_1\delta(3|\boldsymbol{\lambda}_1|+|\boldsymbol{\lambda}_2|)\leqslant\frac{1}{2}(1-k),$$

$$\varepsilon_3\left(\frac{1}{4\varepsilon_1}+\frac{\delta}{4\varepsilon_2}\right)(3|\boldsymbol{\lambda}_1|+|\boldsymbol{\lambda}_2|)\leqslant\frac{1}{2}\eta\lambda_M(\alpha,2\sigma+2).$$

因此得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V_\delta(u(t))\leqslant(\gamma+C_4)\|\nabla u\|_{2,\rho}^2+\delta\gamma\|u\|_{2\sigma+2,\rho}^{2\sigma+2}$$

$$-\frac{1}{2}(1-k)\left(\|\Delta u\|_2^2+\delta\|u\|_{4\sigma+2,\rho}^{4\sigma+2}\right),\tag{8.32}$$

其中 C_4 为出现在上面不等式中 $\int\rho|\nabla u|^2\mathrm{d}x$ 的系数之和,注意到存在 $C_5 = C_5(\gamma,\sigma,k) > 0$ 使得

$$\begin{aligned}
&\delta\gamma\|u\|_{2\sigma+2,\rho}^{2\sigma+2} - \frac{1}{2}(1-k)\|u\|_{4\sigma+2,\rho}^{4\sigma+2}\\
&\leqslant \delta\int\rho\left(C_5 - \frac{2\gamma}{2\sigma+2}|u|^{2\sigma+2}\right)\mathrm{d}x\\
&= \frac{-2\delta\gamma}{2\sigma+2}\|u\|_{2\sigma+2,\rho}^{2\sigma+2} + \delta C_5\rho_0.
\end{aligned}$$

利用分部积分和 Cauchy 不等式,

$$\begin{aligned}
&\|\nabla u\|_{2,\rho} = \int\rho\nabla u\nabla\bar{u}\mathrm{d}x = -\int\nabla\rho\nabla u\bar{u}\mathrm{d}x - \int\rho\Delta u\bar{u}\mathrm{d}x\\
&\leqslant \rho_0\|u\|_{2,\rho}\|\nabla u\|_{2,\rho} + \|u\|_{2,\rho}\|\Delta u\|_{2,\rho}\\
&\leqslant \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{2,\rho}^2 + \frac{1-k}{4(2\gamma+C_4)}\|\Delta u\|_{2,\rho}^2\\
&\quad + \left(\frac{\rho_0^2}{2} + \frac{(2\gamma+C_4)}{1-k}\right)\|u\|_{2,\rho'}^2.
\end{aligned}$$

由引理 8.3, $\|u\|_{2,\rho} \leqslant C_0$,于是

$$\begin{aligned}
&(\gamma + C_4)\|\nabla u\|_{2,\rho} \leqslant C_6 + \frac{1}{2}(1-k)\|\Delta u\|_{2,\rho}^2\\
&\quad - \gamma\|\nabla u\|_{2,\rho}^2,
\end{aligned}$$

其中 $C_6 = [\rho_0^2(2\gamma + C_4) + \frac{2(2\gamma+C_4)^2}{1-k}]C_0$,我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V_\delta(u(t)) \leqslant -2\gamma V_\delta(u(t)) + \delta C_5\rho_0 + C_6. \tag{8.33}$$

由 Gronwall 不等式,有

$$V_\delta(u(t)) \leqslant V(u_0)e^{-2\gamma t} + \frac{\delta C_5\rho_0 + C_6}{2\gamma}, t \geqslant 0. \tag{8.34}$$

引理证毕.

推论 8.5 在引理 8.4 的相同假设下,且 $\|u_0\|_{H_{lu}^1} \leqslant R$,则

$$\|u_{(t)}\|_{H_{lu}^1} \leqslant C, t \geqslant t_1(R),$$

其中常数 C 与 R 无关.

附注 当 $\sigma = 2$ 时$(3|\boldsymbol{\lambda}_1|+|\boldsymbol{\lambda}_2|)$充分小,引理 8.4 和推

论 8.5 也是正确的.

现证明整体吸引子和整体解的存在性.

定理 8.6(整体存在性)　设(A)成立,则对任何 $u_0 \in H^1_{lu}$,问题(8.5)和(8.6)具有惟一解,

$$u(t) \in C([0,\infty);H^1_{ln}) \cap C((0,+\infty);H^2_{lu}).$$

由 GL 方程形成的半群算子 $S(t)$ 在 H^1_{lu} 中是连续的($t>0$),存在常数 L_1 和 $t_1(R)>0$ 使得

$$\| u(t) \|_{H^1_{lu}} \leqslant L_1, t \geqslant t_1(R).$$

此时 $\| u_0 \|_{H^1_{lu}} \leqslant R$. 即 $B(0,L_1)$ 为 H^1_{lu} 中的一个吸收集,更进一步,对任何 $q>2$,存在常数 L_2 和 $t_*(R)>0$ 使得

$$\| u(t) \|_{W^{1,q}_{lu}} \leqslant L_2, t \geqslant t_*(R).$$

我们首先证明解的 H^2_{lu} 的正则性. 因 $1<p<2, M_1 = \sup_{t \geqslant 0} \| u(t) \|_{H^1_{lu}} < \infty$,

$$\| F(u(t)) \|_{L^p_{lu}} \leqslant C(p)(M_1 + M_1^{2\sigma+1} + M_1^3) \triangleq M_2, t \geqslant 0.$$

因此,对任何 $q>2$,由插值(设 $p = \frac{2q}{1+q} \in (1,2), \theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{2q} \in (,1)$)和(8.19)

$$\begin{aligned}
&\| e^{B_q(t-s)} F(u(s)) \|_{W^{1,q}_{lu}} \\
&\leqslant (\| e^{B_p(t-s)} F(u(s)) \|_{L^p_{lu}})^{1-\theta} (\| e^{B_p(t-s)} F(u(s)) \|_{W^{2,p}_{lu}})^\theta \\
&\leqslant M(t-s)^{-\theta} e^{-\omega(t-s)} \| F(u(s)) \|_{L^p_{lu}} \\
&\leqslant MM_2(t-s)^{-\theta} e^{-\omega(t-s)}, t > s \geqslant 0.
\end{aligned}$$

由 $u(t) = e^{B_q t} u(0) + \int_0^t e^{B_q(t-s)} F(u(s)) \mathrm{d}s$,可得

$$\begin{aligned}
\| u(t) \|_{W^{1,q}_{lu}} &\leqslant Mt^{-\frac{1}{2}} e^{-\omega t} \| u(0) \|_{L^q_{lu}} \\
&\quad + \int_0^t \| e^{B_p(t-s)} F(u(s)) \|_{W^{1,q}_{lu}} \mathrm{d}s \\
&\leqslant CMt^{-\frac{1}{2}} e^{-\omega t} \| u_0 \|_{H^1_{lu}} + \int_0^t MM_2(t-s)^{-\theta} e^{-w(t-s)} \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

$$\leqslant MM_1 t^{-\frac{1}{2}} e^{-wt} + \frac{MM_2 \Gamma\left(\frac{1}{2q}\right)}{w}, t > 0.$$

特别有 $\| u(t) \|_{W_{lu}^{1,4}} \leqslant M_3(t_0), \forall t \geqslant t_0, t_0 > 0$ 任意固定,因此可得

$$\| F(u(t)) \|_{H_{lu}^1} \leqslant C(\| u(t) \|_{H_{lu}^1}$$

$$+ \| u(t) \|_{W_{lu}^{1,4}}^{2\sigma+1} + \| u(t) \|_{W_{lu}^{1,4}}^{2} \| u(t) \|_{H_{lu}^2})$$

$$\leqslant C(M_3 + 1)^{2\sigma+1}(1 + \| u(t) \|_{H_{lu}^2})$$

$$\leqslant M_4(1 + \| u(t) \|_{H_{lu}^2}), t \geqslant t_0.$$

由解的积分表达式有

$$\| u(t) \|_{H_{lu}^2} \leqslant \| e^{B_2(t-t_0)} u(t_0) \|_{H_{lu}^2}$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \| e^{B_2(t-s)} F(u(s)) \|_{H_{lu}^2} ds$$

$$\leqslant M(t - t_0)^{-\frac{1}{2}} e^{-w(t-t_0)} \| u(t_0) \|_{H_{lu}^1}$$

$$+ \int_0^t M(t-s)^{-\frac{1}{2}} e^{-w(t-s)} \| F(u(s)) \|_{H_{lu}^1} ds$$

$$\leqslant M(t - t_0)^{-\frac{1}{2}} e^{-w(t-s)} \| u(t_0) \|_{H_{lu}^1}$$

$$+ \int_{t_0}^{t} MM_4(t-s)^{-\frac{1}{2}} e^{-w(t-s)}(1 + \| u(s) \|_{H_{lu}^2}) ds, t > t_0.$$

因此,由带奇性的 Gronwall 不等式,对任何 $T > 0$ 有

$$\| u(t) \|_{H_{lu}^2} \leqslant M_5(t - t_0)^{-\frac{1}{2}}, \quad t_0 < t \leqslant T.$$

因 $t_0 > 0$ 为任意的,故对 $t > 0, u(t) \in H_{lu}^2$ 是连续的.

其次,我们证明存在 $t_* > 0$ 使得 $u(t)$ 在 $W_{lu}^{1,q}$ 中一致有界 ($\| u_0 \|_{H_{lu}^1} \leqslant R$),由此推出 $B(0, L_2)$(这球在 $W_{lu}^{1,q}$ 中具半径 L_2) 为 H_ρ^1 中 $S(t)$ 的紧的吸收集.

因 $\sup\limits_{t \geqslant t_1(R)} \| u(t) \|_{H_{lu}^1} \leqslant L_1, 1 < p < 2$,则

$$\| F(u(t)) \|_{L_{lu}^p} \leqslant C(p)(L_1 + L_1^{2\sigma+1} + L_1^3) \equiv C_1(p),$$

$t \geqslant t_1(R)$, 这里 $C_1(p)$ 与 R 无关,类似于上面,对任何 $q > 2$,由

插值($p=\dfrac{2q}{1+q},\theta=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{p}=1-\dfrac{1}{2q}$) 和(8.19)有

$$
\begin{aligned}
\| e^{B_q(t-s)}F(u(s)) \|_{W_{lu}^{1,q}} &\leqslant \left(\| e^{B_p(t-s)}F(u(s)) \|_{L_{lu}^p} \right)^{1-\theta} \\
&\quad \cdot \left(\left\| e^{B_p^{(t-s)}}F(u(s)) \right\|_{W_{lu}^{2,p}} \right)^{\theta} \\
&\leqslant M(t-s)^{-\theta}e^{-\omega(t-s)} \| F(u(s)) \|_{L_{lu}^p} \\
&\leqslant MC_1(p)t^{-\theta}e^{-\omega t},\ t>s\geqslant t_1.
\end{aligned}
$$

由 $u(t)=e^{B_q(t-t_1)}u(t_1)+\int_{t_1}^{t}e^{Bq(t-s)}F(u(s))\mathrm{d}s$ 可得

$$
\begin{aligned}
\| u(t) \|_{W_{lu}^{1,q}} &\leqslant M(t-t_1)^{-\frac{1}{2}}e^{-\omega(t-t_1)} \| u(t_1) \|_{L_{lu}^q} \\
&\quad + \int_{t_1}^{t} MC_1(p)(t-s)^{-\theta}e^{-\omega(t-s)}\mathrm{d}s \\
&\leqslant M(t-t_1)^{-\frac{1}{2}}e^{-\omega(t-t_1)} \| u(t_1) \|_{H_{lu}^1} + \frac{MC_1(p)\Gamma\left(\frac{1}{2q}\right)}{\omega},\ t>t_1.
\end{aligned}
$$

取 $t_*=t_1+1+\dfrac{1}{\omega}\log(ML_1)$,则有

$$
\| u(t) \|_{W_{lu}^{1,q}} \leqslant L_2 = 1+\frac{MC_1(p)\Gamma\left(\frac{1}{2q}\right)}{\omega},\ t\geqslant t_*(R).
$$

主要定理8.1来自 H_{lu}^2 到H_ρ^1 的紧嵌入,整体吸引子 $\mathscr{A}$可表为GL 方程(8.5) 的半群 $S(t)$ 的 ω 极限集

$$
\mathscr{A}=\omega(B(0,L_1))=\bigcap_{S\geqslant 0}\overline{\bigcup_{t\geqslant s}S(t)B(0,L_1)},
$$

这里的闭包是取 H_ρ^1 中的拓扑,$\mathscr{A}$具有如下性质:

(1) $\mathscr{A}$是平移不变的;

(2) $\mathscr{A}$是旋转不变的;

(3) 如 σ 是一个整数,且权重函数 ρ 是光滑的,$|D^m\rho(x)|\leqslant \rho_m\rho(x)$, $\forall\, m\geqslant 1$,则

$$
\mathscr{A}\subset\bigcap_{m=1}^{\infty}H_{lu}^m.
$$

§9 广义 Ginzburg-Landau 方程的时间周期解

考虑如下二维广义具非齐次项的 GL 方程

$$u_t = \rho u + (1+i\nu)\Delta u - (1+i\mu)|u|^{2\sigma}u + \alpha\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(|u|^2 u)$$
$$+\beta(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla u)|u|^2 + f(x,t),(x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}^+; \quad (9.1)$$
$$u(x+L,t) = u(x,t),(x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}^+; \quad (9.2)$$

其中 $\Omega=[0,L]\times[0,L]$, ρ,σ,L 为正数, α、β、ν、μ 为实数, $\boldsymbol{\lambda}_1$、$\boldsymbol{\lambda}_2$ 为实向量, $f(t)$ 为 w 周期函数, 即 $f(t+w)=f(t)$, $\forall t\geqslant 0$. 我们要证明问题(9.1),(9.2)在一定条件下具有对时间的周期解.

令

$$L^2_{\text{per}}(\Omega) = \{u\in L^2(\Omega), u \text{ 为}\Omega\text{ 周期函数}\},$$
$$H^k_{\text{per}}(\Omega) = \{u\in H^k(\Omega), u \text{ 为}\Omega\text{ 周期函数}\}.$$

设 X 为 Banach 空间,让

$$C^k(w,X) = \{f:(0,\infty)\to X, f^{(j)}\text{是连续函数}, j=0,1,\cdots,k,$$
$$f\text{ 为 }w\text{ 周期函数}\}.$$

记 $C^0(\omega,X)=C(\omega,X)$,令

$$A = -[(1+i\nu)\Delta + d],$$
$$D(A) = H^2_{\text{per}}, N(u) = (\rho-d)u - (1+i\mu)|u|^{2\sigma}u$$
$$+\alpha\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(|u|^2u) + \beta(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla u)|u|^2,$$

这里 d 为实数. 问题(9.1),(9.2)能写成泛函形式

$$\begin{cases} u_t + Au = N(u) + f, \\ u(\cdot,t) = u(\cdot,t+w). \end{cases} \quad (9.3)$$

我们采用 Galerkin 方法,设 $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ 为 H^2_{per}的标准正交基, ϕ_j 为算子A 的特征函数,令近似解

$$u_n(t) = \sum_{k=1}^{n} d_{kn}(t)\phi_k \quad (9.4)$$

依 Galerkin 方法,问题(9.3)的近似解 $u_n(t)$必须满足如下非线性常微分方程组

$$(u_{nt} + Au_n, \phi_j) = (N(u_n) + f, \phi_j), \quad j=1,2,\cdots,n. \quad (9.5)$$

为了证明近似解 $u_n(t)$ 的存在性，我们应用 Leray-Schauder 不动点原理，定义映照 $F_\lambda: v_n \to u_n$ 为

$$(u_{nt} + Au_n, \phi_j) = (\lambda(N(v_n) + f), \phi_j), j = 1, \cdots, n, \quad (9.6)$$

$0 \leqslant \lambda \leqslant 1$，易知 F_λ 为空间 $C^1(w, H_n)$ 的连续紧映象. $\lambda = 0$ 时，显然可解. 为证(9.5)可解，$F_\lambda u_n = u_n, \lambda = 1$，仅需证明成立以下不等式：

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant w} \| u_n(t) \| \leqslant K_1, \quad (9.7)$$

其中常数 K_1 与 λ 无关，仅依赖于系数 $\alpha, \beta, \nu, \mu, \sigma, \boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2$.

引理 9.1 设 $F_\lambda u_n = u_n, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, d < 0, f \in C(\omega, L^2)$ 则存在常数 C_1 使得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| u_n \|^2 + \| \nabla u_n \|^2 - d \| u_n \|^2 \leqslant C_1,$$

这里常数 C_1 与 n, λ 无关，仅依赖于 $\alpha, \beta, \rho, \mu, \nu, \sigma, \boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, L$ 和 $\| f \|$

证 由 $F_\lambda u_n = u_n$ 有

$$(u_{nt} + Au_n, u_n) = (\lambda(N(u_n) + f), u_n).$$

两边取实部得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| u_n \|^2 + \| \nabla u_n \|^2 - d \| u_n \|^2 + \lambda\int_\Omega | u_n |^{2\sigma+2}\mathrm{d}x \\
&= \lambda(\rho - d)\| u_n \|^2 + \lambda\alpha\mathrm{Re}\int_\Omega (\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla(| u_n |^2 u_n))\overline{u}_n \mathrm{d}x \\
&\quad + \lambda\beta\mathrm{Re}\int_\Omega (\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla u_n) | u_n |^2 \overline{u}_n \mathrm{d}x + \lambda\mathrm{Re}(f, u_n). \quad (9.8)
\end{aligned}$$

注意到 u_n 是 Ω 周期的，有

$$\mathrm{Re}\int_\Omega (\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla(| u_n |^2 u_n))\overline{u}_n \mathrm{d}x = 0,$$

$$\mathrm{Re}\int_\Omega (\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla u_n) | u_n |^2 \overline{u}_n \mathrm{d}x = 0.$$

用 D 表示一常数，它依赖于 $\alpha, \beta, \rho, \mu, \nu, \sigma, L, \boldsymbol{\lambda}_1$ 和 $\boldsymbol{\lambda}_2$，但与 n, λ 无关. 于是有

$$|u_n|^2 = |u_n|^2 \cdot 1 \leqslant |u_n|^{2\sigma+2} + D,$$

$$|u_n|^2 \leqslant \int_\Omega |u_n|^{2\sigma+2} \mathrm{d}x + D.$$

因此,对 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 有

$$\begin{aligned}
\lambda \mathrm{Re}(f, u_n) &\leqslant \lambda \| f \| \| u_n \| \\
&\leqslant \frac{1}{2} \| f \|^2 + \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |u_n|^{2\sigma+2} \mathrm{d}x + D \\
&\leqslant \frac{1}{2} \int_\Omega |u_n|^{2\sigma+2} \mathrm{d}x + D.
\end{aligned} \tag{9.9}$$

因

$$\begin{aligned}
|u_n|^2 &= \frac{1}{2(\rho - d)} |u_n|^2 \cdot 2(\rho - d) \\
&\leqslant \frac{1}{2(\rho - d)} |u_n|^{2\sigma+2} + D,
\end{aligned} \tag{9.10}$$

由(9.8),(9.9) 可得

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| u_n \|^2 + \| \nabla u_n \|^2 - d \| u_n \|^2 + \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |u_n|^{2\sigma+2} \mathrm{d}x$$
$$\leqslant \lambda(\rho - d) \| u_n \|^2 + D.$$

由(9.10) 可知存在常数 C_1 使得

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| u_n \|^2 + \| \nabla u_n \|^2 - d \| u_n \|^2 \leqslant C_1.$$

由引理 9.1 可得不等式(9.7),事实上,因

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| u_n \|^2 - d \| u_n \|^2 \leqslant C_1, \tag{9.11}$$

注意到 u_n 为 w 对 t 周期函数,有

$$-d \int_0^w \| u_n \|^2 \mathrm{d}t \leqslant C_1 w.$$

因此存在 $t^* \in [0, w]$,使得

$$\| u_n(t^*) \|^2 \leqslant -C_1 / d.$$

由不等式(9.11),对 t 积分从 t^* 到 $t \in [t^*, t^* + w]$ 可得

$$\begin{aligned}
\| u_n(t) \|^2 &\leqslant 2C_1 w + \| u_n(t^*) \|^2 \\
&\leqslant 2C_1 w - C_1 / d.
\end{aligned}$$

定理 9.2 设 $f\in C(w,L^2)$,则问题(9.5)具有近似解 $u_n(t)\in C^1(w,H_n)$.

引理 9.3 设存在 $\delta>0$ 使得

$$\frac{7}{3}\leqslant\sigma\leqslant\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\mu-\nu\delta^2}{1+\delta^2}\right)^2}-1}, \tag{9.12}$$

则对任何 $\varepsilon>0$,存在常数 K_2 和 K_3(它们依赖方程的系数、L 和 $\|f\|_{L^2}$,K_2 还依赖于 ε)使得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2(1+\sigma)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega |u_n|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x\\
&\leqslant\frac{1}{2}\int_\Omega |u_n|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x+\varepsilon\|\Delta u_n\|^2+\varepsilon\|\nabla u_n\|^4\\
&\quad-\frac{1}{2}\int_\Omega |u_n|^{2\sigma+2}[(1+2\sigma)|\nabla|u_n|^2|^2-2\nu\sigma\nabla|u_n|^2\\
&\quad\cdot i(u_n\nabla\overline{u}_n-\overline{u}_n\nabla u_n)+|u_n\nabla\overline{u}_n-\overline{u}_n\nabla u_n|^2]\mathrm{d}x\\
&\quad+K_2+K_3+\mathrm{Re}(f,|u_n|^{2\sigma}u_n),
\end{aligned} \tag{9.13}$$

其中 $F_\lambda u_n=u_n$.

证 类似于[5]中的引理 2.2.

引理 9.4 设引理 9.3 的条件满足,则存在常数 K_4 使得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant w}\|\nabla u_n\|\leqslant K_4,$$

这里 K_4 与 n,λ 无关.

证 由(9.5)可得

$$(u_{nt}+Au_n,\Delta u_n)=(N(u_n)+f,\Delta u_n).$$

上式取实部,且注意到 u_n 为 Ω 周期函数得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u_n\|^2+\|\Delta u_n\|^2\\
&=\mathrm{Re}(1+i\mu)\int|u_n|^{2\sigma}u_n\Delta\overline{u}_n\mathrm{d}x\\
&\quad-\alpha\mathrm{Re}\int(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(|u_n|^2u_n))\Delta\overline{u}_n\mathrm{d}x\\
&\quad-\beta\mathrm{Re}\int(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla u_n)|u_n|^2\Delta\overline{u}_n\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$+\operatorname{Re}(f,\Delta u_n)+\rho\|\nabla u_n\|^2.$$

因

$$|u_n|^2|\nabla u_n|^2=\frac{1}{4}|\nabla|u_n|^2|^2+\frac{1}{4}|u_n\nabla\overline{u}_n-\overline{u}_n\nabla u_n|^2,$$

我们有

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}(1+i\mu)\int_\Omega|u_n|^{2\sigma}u_n\Delta\overline{u}_n\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{4}\int_\Omega|u|^{2\sigma-2}[(1+2\sigma)|\nabla|u_n|^2|^2+|u_n\nabla\overline{u}_n-\overline{u}_n\nabla u_n|^2\\&\quad-2\mu\sigma\nabla|u_n|^2\cdot i(\overline{u}_n\nabla u_n-u_n\nabla\overline{u}_n)]\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{9.14}$$

我们以下要用到如下 Sobolev 插值不等式

$$\|u\|_4\leqslant K\|u\|_{H^1}^{\frac{1}{2}}\|u\|^{\frac{1}{2}},\forall u\in H^1(\Omega),\tag{9.15}$$

$$\|u\|_8\leqslant K\|u\|_{H^2}^{\theta}\|u\|_q^{1-\theta},\forall u\in H^2(\Omega),\tag{9.16}$$

其中 $\theta=\frac{8-q}{4q+8},1<q<8;\theta=0,q\geqslant 8,K$ 为 Sobolev 常数.

为了简化运算,我们列举以下一些不等式:

$$\|\Delta u\|\ \|\nabla u\|_{H^1}^{\frac{1}{2}}\|u\|_{H^2}^{2\theta}\leqslant\|u\|_{H^2}^{2\theta+\frac{3}{2}},\tag{9.17}$$

$$D\|u\|_{H^2}^{2\theta+\frac{3}{2}}J(u)\leqslant\gamma\|u\|_{H^2}^2+\tilde{D}(\gamma)J(u)^{\frac{4}{1-4\theta}},\tag{9.18}$$

$\forall\gamma\in(0,1],D,\tilde{D}(\nu)$ 均为正常数,$J(u)$ 为任意非负函数,如置 $\theta=\frac{8-q}{4q+3}$,因 $\frac{2}{\left(2\theta+\frac{3}{2}\right)}>1,q>3$,

$$D\|\nabla u\|^{\frac{2}{1-4\theta}}J(u)\leqslant\gamma\|\nabla u\|^4+\tilde{D}(\gamma)J(u)^{\frac{2-8\theta}{1-8\theta}},\tag{9.19}$$

若置 $\theta=\frac{8-q}{4q+8}$,因 $\frac{4}{\left(\frac{2}{1-4\theta}\right)}>1,q>\frac{14}{3}$,

$$D\|u\|_q^{\frac{16(1-\theta)}{1-8\theta}}J(u)\leqslant\gamma\|u\|_q^8+\tilde{D}(\gamma)J(u)^{\frac{8q}{1-8\theta q-16+16\sigma}},\tag{9.20}$$

$$\theta=\frac{8-q}{4q+8},q\Big/\left(\frac{16(1-\theta)}{1-8\theta}\right)>1,q>\frac{34}{3}.$$

我们也用如下的 Agmon 不等式

$$\| u \|_{\infty} \leqslant C \| u \|^{\frac{1}{2}} \| u \|_{H^2}^{\frac{1}{2}}, \forall u \in H^2(\Omega), \tag{9.21}$$

$$\| u \|_{H^2} \leqslant C \| u \| + \| \Delta u \|, \forall u \in H^2(\Omega). \tag{9.22}$$

利用上述不等式有

$$\begin{aligned}
& \left| -\beta \mathrm{Re}\int_{\Omega} (\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla u_n) | u_n |^2 \Delta \bar{u}_n \mathrm{d}x \right| \\
\leqslant & | \beta \boldsymbol{\lambda}_2 | \int_{\Omega} | \nabla u_n | | u_n |^2 | \Delta u_n | \mathrm{d}x \\
\leqslant & D \| \Delta u_n \| \| \nabla u_n \|_4 \| u_n \|_8^2 \quad (\text{由}(9.15),(9.16)) \\
\leqslant & D \| \Delta u_n \| \| \nabla u_n \|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \| \nabla u_n \|^{\frac{1}{2}} \| u_n \|_{H^2}^{2\theta} \| u_n \|_q^{2(1-\theta)} \\
\leqslant & D \| u_n \|_{H^2}^{2\theta + \frac{3}{2}} \| \nabla u_n \|^{\frac{1}{2}} \| u_n \|_q^{2(1-\theta)} (\text{由}(9.17)) \\
\leqslant & \gamma \| u_n \|_{H^2}^2 + \tilde{D}(\gamma) \| \nabla u_n \|^{\frac{2}{1-4\theta}} \| u_n \|_q^{\frac{8(1-\theta)}{1-4\theta}} \\
& (\text{利用}(9.18), J(u) = \| \nabla u_n \|^{\frac{1}{2}} \| u_n \|_q^{2(1-\theta)}, \\
& \quad q > 3, 0 < \gamma \leqslant 1) \\
\leqslant & \gamma \| u_n \|_{H^2}^2 + \gamma \| \nabla u_n \|^4 + \tilde{D}(\gamma) \| u_n \|_q^{\frac{16(1-\theta)}{1-8\theta}} \\
& (\text{利用}(9.19), J(u) = \| u_n \|_q^{\frac{8(1-\theta)}{1-4\theta}}, q > \frac{14}{3}, 0 < \gamma \leqslant 1) \\
\leqslant & \gamma \| u_n \|_{H^2}^2 + \gamma \| \nabla u_n \|^4 + \gamma \| u_n \|_q^q + \tilde{D}(\gamma) \ (\text{由}(9.20), \\
& \quad q > \frac{14}{3}, 0 < \gamma \leqslant 1) \\
\leqslant & \gamma C \| \Delta u_n \|^2 + \gamma \| \nabla u_n \|^4 + \gamma \| u_n \|_q^q + \tilde{D}(\gamma) \ (\text{利用} \\
& (9.20)) \\
= & \gamma C \| \Delta u_n \|^2 + \gamma \| \nabla u_n \|^4 + \gamma \| u_n \|_{4\sigma+2}^{4\sigma+2} + \tilde{D}(\gamma) \\
& \quad (q = 4\sigma + 2 > \frac{34}{3}) \\
\leqslant & \frac{\varepsilon}{2} (\| \Delta u_n \|^2 + \| \nabla u_n \|^4 + \| u_n \|_{4\sigma+2}^{4\sigma+2}) + \tilde{D}(\varepsilon) \\
& \quad (0 < \varepsilon < 1, \sigma > \frac{7}{3}).
\end{aligned} \tag{9.23}$$

类似地有

$$\nabla(|u_n|^2 u_n) = |u_n|^2 \nabla u_n + u_n \nabla |u_n|^2$$

$$= 2|u_n|^2 \nabla u_n + u_n{}^2 \nabla u_n,$$

$$\left|-\alpha \mathrm{Re}\int_\Omega (\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla(|u_n|^2 u_n))\Delta \overline{u}_n \mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2}(\|\Delta u_n\|^2 + \|\nabla u_n\|^4 + \|u_n\|_{4\sigma+2}^{4\sigma+2}) + \tilde{D}(\varepsilon),$$

$$0 < \varepsilon \leqslant 1 \tag{9.24}$$

和

$$\rho\|\nabla u_n\|^2 \leqslant \varepsilon\|\nabla u_n\|^4 + C(\varepsilon). \tag{9.25}$$

因此可得不等式

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u_n\|^2 + \|\Delta u_n\|^2 \leqslant \varepsilon\|\Delta u_n\|^2 + 2\varepsilon\|\nabla u_n\|^4$$

$$+ \varepsilon\|u_n\|_{4\sigma+2}^{4\sigma+2} - \frac{1}{4}\int_\Omega |u_n|^{2\sigma-2}[(1+2\sigma)|\nabla|u_n|^2|^2$$

$$+ |\overline{u}_n\nabla u_n - u_n\nabla\overline{u}_n|^2$$

$$-2\mu\sigma\nabla|u_n|^2 \cdot i(\overline{u}_n\nabla u_n - u_n\nabla\overline{u}_n)]\mathrm{d}x + \tilde{D}(\varepsilon). \tag{9.26}$$

用 δ^2 乘以引理 9.1 中的不等式(9.13),再和(9.26) 相加:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla u_n\|^2 + \frac{\delta^2}{1+\sigma}\int_\Omega |u_n|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x\right) + \|\Delta u_n\|^2$$

$$+ \frac{1}{2}\delta^2\int_\Omega |u_n|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \varepsilon(1+\delta^2)\|\Delta u_n\|^2 + \varepsilon(2+\delta^2)\|\nabla u_n\|^4$$

$$+ \varepsilon\int_\Omega |u_n|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x + \tilde{D}(\varepsilon) + \mathrm{Re}(f, |u_n|^{2\sigma}u_n) + \mathrm{Re}(f, \Delta u_n)$$

$$- \frac{1}{4}\int_\Omega |u_n|^{2\sigma-2}[(1+2\sigma)(1+\delta^2)|\nabla|u_n|^2|^2$$

$$+ 2\sigma(\delta^2 - \mu)\nabla|u_n|^2 \cdot i(\overline{u}_n\nabla u_n - u_n\nabla\overline{u}_n)$$

$$+ (1+\delta^2)|\overline{u}_n\nabla u_n - u_n\nabla\overline{u}_n|^2]\mathrm{d}x. \tag{9.27}$$

由于 $\mathrm{Re}(f, |u_n|^{2\sigma}u_n) \leqslant \varepsilon\int_\Omega i(\overline{u}_n\nabla u_n)|u_n|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x + \frac{1}{4\varepsilon}\int_\Omega |f|^2\mathrm{d}x$

$$\leqslant \varepsilon\int_\Omega |u_n|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x + \tilde{D}(\varepsilon),$$

$$\mathrm{Re}(f,\Delta u_n)\leqslant \varepsilon\|\Delta u_n\|^2+\tilde{D}(\varepsilon),$$

$$\|\nabla u_n\|^2=(-\Delta u_n,u_n)$$

$$\leqslant\|\Delta u_n\|\|u_n\|\leqslant K_1\|\Delta u_n\|,$$

选取 ε 充分小使得

$$\varepsilon(1+\delta^2)+\varepsilon(2+\delta^2)+\varepsilon<\frac{1}{2},$$

$$2\varepsilon<\frac{1}{4}\delta^2.$$

记(9.27)右端最后积分为 I,则(9.27)为

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla u_n\|^2+\frac{\delta^2}{1+\sigma}\int_\Omega|u_n|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x\right)$$

$$+\frac{1}{2}\|\Delta u_n\|^2+\frac{1}{4}\delta^2\int_\Omega|u_n|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x\leqslant\tilde{D}+I.$$

显然,如矩阵

$$E=\begin{pmatrix}(1+2\sigma)(1+\delta^2) & \sigma(\nu\delta^2-\mu)\\ \sigma(\nu\delta^2-\mu) & 1+\delta^2\end{pmatrix}$$

为非负的,则 $I\leqslant 0$. 当满足条件(9.12)时,矩阵 E 为非负,于是可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla u_n\|^2+\frac{\delta^2}{1+\sigma}\int_\Omega|u_n|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x\right)$$

$$+\frac{1}{2}\|\Delta u_n\|^2+\frac{1}{4}\delta^2\int_\Omega|u_n|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x\leqslant\tilde{D}.$$

因

$$\|\nabla u_n\|^2\leqslant K_1\|\Delta u_n\|\leqslant\|\Delta u_n\|^2+\frac{1}{4}K_1{}^2,$$

又由于 $\|u_n(t)\|\leqslant K$,有

$$\frac{\delta^2}{2(1+\sigma)}\int_\Omega|u_n|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{4}\delta^2\int_\Omega|u_n|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x+\tilde{D}.$$

因此

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla u_n\|^2+\frac{\delta^2}{1+\sigma}\int_\Omega|u_n|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\|\nabla u_n\|^2+\frac{\delta^2}{1+\sigma}\int_\Omega|u_n|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x\right)\leqslant\tilde{D}.\qquad(9.28)$$

对 t 从 0 到 ω 积分得

$$\int_0^{\omega}\left(\|\nabla u_n\|^2+\frac{\delta^2}{1+\sigma}\int_{\Omega}|u_n|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t\leqslant\tilde{D}\,\omega$$

因此存在 $t^*\in[0,\omega]$,使得

$$\|\nabla u_n(t^*)\|^2+\frac{\delta^2}{1+\sigma}\int_{\Omega}|u_n(t^*)|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x\leqslant C.$$

(9.28) 对 t 从 t^* 到 t 积分,$t\in[t^*,t^*+w]$,我们有

$$\|\nabla u_n(t)\|^2+\frac{\delta^2}{1+\sigma}\int_{\Omega}|u_n(t)|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x\leqslant\tilde{C}.$$

故存在常数 K_4 与 n 无关,使得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant w}\|\nabla u_n(t)\|\leqslant K_4.$$

引理 9.5 设引理 9.1 条件满足且设 $f\in(w,H^1)$,则存在正常数 K_5,与 n 无关,仅依赖于方程(9.1)的系数和 $\|f\|_{H^1}$,使得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant w}\|\nabla u_n(t)\|\leqslant K_5. \tag{9.29}$$

证 由 Galerkin 积分等式(9.5)可得

$$(u_{nt}+Au_n,\Delta^2u_n)=(N(u_n)+f,\Delta^2u_n),$$

上式取实部可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta u_n\|^2=\rho\|\Delta u_n\|^2-\|\nabla\Delta u_n\|^2-\mathrm{Re}(1+i\mu)$$

$$\cdot\int|u_n|^{2\sigma}u_n\Delta^2\overline{u}_n\mathrm{d}x+\alpha\mathrm{Re}\int_{\Omega}(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(|u_n|^2u_n))\Delta^2\overline{u}_n\mathrm{d}x$$

$$+\beta\mathrm{Re}\int_{\Omega}(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla u_n)|u_n|^2\Delta^2\overline{u}_n\mathrm{d}x+\mathrm{Re}(f,\Delta^2u_n).$$

利用不等式(9.7) 和引理 9.4 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta u_n\|^2+\|\nabla\Delta u_n\|^2+\|\Delta u_n\|^2\leqslant\hat{C}+\|f\|_{H^1}^2, \tag{9.30}$$

其中常数 $\hat{C}$ 与 n 无关,由此可得

$$\int_0^{\omega}\|\Delta u_n\|^2\mathrm{d}t\leqslant(\hat{C}+\sup_{0\leqslant t\leqslant w}\|f(\cdot\,t)\|_{H^1}^2)\omega.$$

应用积分平均值定理,存在 $t^{**} \in [0,\omega]$ 使得

$$\|\Delta u_n(t^{**})\|^2 \leqslant (\hat{C} + \sup_{0\leqslant t\leqslant \omega} \|f(\cdot,t)\|_{H^2}^2). \tag{9.31}$$

由不等式(9.30)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta u_n\|^2 \leqslant \hat{C} + \|f\|_{H^1}^2, \tag{9.32}$$

对(9.32)从 t^{**} 到 $t \in [t^{**}, t^{**}+\omega]$ 积分可得

$$\|\Delta u_n(t)\|^2 \leqslant \|\Delta u_n(t^{**})\|^2 + (\hat{C} + \sup_{0\leqslant t\leqslant \omega}\|f(\cdot,t)\|_{H^1}^2)\omega.$$

令 $K_5 = (\hat{C} + \sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|f(\cdot,t)\|_{H^1}^2)(\omega+1)$ 有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|\Delta u_n(t)\| \leqslant K_5.$$

引理证毕.

附注 9.6 在引理 9.5 条件下,存在正常数 K_6 与 n 无关,使得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|u_n(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leqslant K_6. \tag{9.33}$$

引理 9.7 设引理 9.5 条件满足,则存在常数 K_7 与 n 无关,使得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|u_{nt}(t)\| \leqslant K_7. \tag{9.34}$$

证 由 Galerkin 积分等式(9.5)可得

$$(u_{nt} + Au_n, u_{nt}) = (N(u_n) + f, u_{nt}).$$

上式取实部得

$$\|u_{nt}\|^2 \leqslant \sqrt{1+\nu^2}\|u_n\|\|u_{nt}\| + \|N(u_n) + f + du_{nt}\|\|u_{nt}\|, \tag{9.35}$$

因 $\|u_n\|_\infty \leqslant K_6$ 和 $N(u_n)$ 的表达式可得

$$\|N(u_n) + f + du_{nt}\| \leqslant \rho K_6 + K_6^{2\sigma+1} + |\alpha\lambda_1| \cdot 3K_6^2\|\nabla u_n\| + |\beta\lambda_2|K_6^2\|\nabla u_n\| + \|f\| \leqslant D.$$

由不等式(9.34)可得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|u_{nt}\| \leqslant K_7,$$

其中常数 K_7 与 n 无关.

下面可得到我们的主要定理.

定理 9.8 设 $f(x,t) \in C^1(\omega, H^1_{per})$,且满足条件

$$\frac{7}{3} \leqslant \sigma \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\mu-\nu\delta^2}{1+\delta^2}\right)^2}-1},$$

则存在二维 GL 方程周期问题(9.1),(9.2) 的时间周期解 $u(x,t)$,

$$u(x,t) \in L^\infty(\omega, H^2_{per}) \cap C^1(w, L_2).$$

证 由以上关于近似解 $u_n(t)$ 的一致先验估计,可知存在子序列 $u_{n_k}(x,t)$,

$$u_{n_k}(\cdot,t) \to u(x,t), \text{依 } L^\infty(\omega, H^2) \text{ 弱收敛},$$

$$u_{n_k t}(\cdot,t) \to u_t(x,t), \text{依 } L^\infty(\omega, L^2) \text{ 弱收敛},$$

$$|u_n|^{2\sigma}u_n \to |u|^{2\sigma}u, \text{依 } L^\infty \text{ 一致收敛},$$

$$\nabla u_n \to \nabla u, \text{依 } L^\infty(\omega, L^2) \text{ 强收敛}.$$

从(9.5) 中,令 $k \to \infty$ 可知

$$(u_t + Au, v) = (N(u) + f, v), \forall v \in \text{span}\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}.$$

由于 $\text{span}\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ 在 L^2_{per} 中是稠密的,因此有

$$u_t + Au = N(u) + f, u \in C^1(w, H^2_{per}).$$

故 u 为周期问题(9.1),(9.2) 的解.

§ 10 Ginzburg-Landau 方程逼近 NLS 方程

考虑如下 GL 方程

$$\partial_t u = (a + i\nu)\Delta u - (b + i\mu)|u|^{2\sigma}u, (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \tag{10.1}$$

其中 u 为 $x \in \mathbb{R}^n, t \in (0,\infty)$ 的复值函数,设 $\sigma > 0, a > 0, b > 0, \nu > 0, \mu$ 为实参数,当 $a = b = 0$ 时,(10.1) 变为非线性 Schrödinger(NLS) 方程

$$i\partial_t v = -\nu\Delta v + \mu|v|^{2\sigma}v. \tag{10.2}$$

很自然地,要去考虑 $a \to 0, b \to 0$ 时的极限问题,即 GL 方程的解是否逼近于 NLS 方程的解? 其逼近程度如何?

定理 10.1 设 $u_0 = u(x,0) \in L^2(\quad ^n)$,则 GL 方程(10.1)具初值 u_0存在整体解 u 满足

$$u \in C([0,\infty);L^2) \cap L^2_{loc}([0,\infty);H^1)$$
$$\cap L^{2\sigma+2}_{loc}([0,\infty);L^{2\sigma+2}) \tag{10.3}$$

和 $u(0) = u_0$,更进一步,u 满足能量关系

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L^2} + a\int_0^t \|\nabla u(t')\|^2_{L^2}dt'$$
$$+ b\int_0^t \|u(t')\|^{2\sigma+2}_{L^{2\sigma+2}}dt' = \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2}, \forall t \in [0,\infty). \tag{10.4}$$

这个定理已在§2 中由 J. Ginbre 和 G. Velo 所证,也可由 Fado-Galerkin 方法或黏性消去法证明. 对于解在(10.3)中惟一性也在§2 中证明. 条件是

$$|1 + i\mu/b| \leqslant \frac{\sigma+1}{\sigma}. \tag{10.5}$$

(10.5)的假设,对于考虑我们的极限问题也是重要的,GL 方程的 H^1 解在§2 中也已证明.

定理 10.2 设或者 $\mu \geqslant 0$ 或$(n-2)\sigma < 2$,且如 $n\sigma > 2$,

$$\left|1 + i\frac{\nu}{a}\right| \leqslant \frac{n\sigma}{n\sigma - 2},$$

$u_0 \in H^1(R^n) \cap L^{2\sigma+2}(R^n)$,则 GL 方程(10.1)具有惟一解 u 满足

$u \in C([0,\infty);H^1 \cap L^{2\sigma+2}) \cap L^2_{loc}([0,\infty);H^2) \cap L^{4\sigma+2}_{loc}([0,\infty);L^{4\sigma+2})$, $u(0) = u_0$,且 u 满足(10.4).

关于 NLS 方程在 L^2, H^1, H^2 的结果已有许多研究,我们有

定理 10.3 设$(n-2)\sigma \leqslant 2$, $n \geqslant 3$,则对任何 $v_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$,存在 $T^* = T^*(\|v_0\|_{H^1}) > 0$ 和方程(10.2)的解 v 在$[0,T^*]$上使得

$$v \in C([0,T^*);H^1) \cap C^1([0,T^*);H^1)$$
$$\cap L^{2\sigma+2}_{loc}([0,T^*);L^{2\sigma+2}), v(0) = v_0.$$

更进一步,对任何 $t < T^*$ 有

$$E(v(t))=E(v_0),\ \|v(t)\|_{L^2}=\|v_0\|_{L^2}, \tag{10.6}$$

其中 $E(v)$ 为 Hamilton

$$E(v)=\frac{\nu}{2}\|\nabla v\|_{L^2}^2+\frac{\mu}{2\sigma+2}\|v\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2}. \tag{10.7}$$

附之,在不聚焦情况($\mu\geqslant 0$)或在 L^2 亚临界聚焦情况($\mu<0$ 和 $\sigma<\frac{2}{n}$)或在 L^2 临界聚焦情况($\mu<0,\sigma=\frac{2}{n}$),具小初值 $\|v_0\|_{L^2}$,局部解是整体的(即 $T^*=\infty$).

定理 10.4 设$(n-4)\sigma\leqslant 2,n\geqslant 5$,则对任何 $v_0\in H^2(\mathbb{R}^n)$,存在 $T^*=T^*(\|v_0\|_{H^2})>0$ 和 NLS 方程(10.2)的惟一解 $v\in C([0,T^*);H^2),v(0)=v_0$.更进一步,对任何 $T<T^*$,有

$$\|v(t)\|_{H^2}\leqslant K\|v_0\|_{H^2},t\leqslant T, \tag{10.8}$$

这里常数 K 依赖于 T 和 $\sup\{\|u(t)\|_{H^1},t<T\}$.

附之,在不聚焦情况($\mu\geqslant 0$)下或在 L^2 亚临界聚焦情况($\mu<0,\sigma<\frac{2}{n}$)下或在 L^2 临界聚焦情况($\mu<0,\sigma=\frac{2}{n}$)下,对于小初值 $\|v_0\|_{H^2}$,局部解实际上是整体的($T^*=\infty$).

引理 10.5 如$\frac{1}{p}\geqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{n}$,则有

$$\|v\|_{L^p}\leqslant C(p)\|\nabla v\|_{L^2}^{\theta}\|v\|_{L^2}^{1-\theta},\theta=n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right), \tag{10.9}$$

其中 $C(p)$ 为某常数.

对于$(n-2)\sigma\leqslant 2,p=2\sigma+2$,则由引理 10.5 有

$$\|v\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2}\leqslant C(\sigma)\|\nabla v\|_{L^2}^{n\sigma}\|v\|_{L^2}^{2\sigma+2-n\sigma}.$$

现考虑方程(10.1)的无黏极限.$v_0\in L^2$,可得到两个无黏极限结果.首先,$v_0\in H^1(\mathbb{R}^n)$,NLS 方程的解 $v\in H^1(\mathbb{R}^n)$,能量具有意义.其次,得到了 $v_0\in H^2$ 最优收敛率.

先给出第一个无黏极限结果.

定理 10.6 设 $\sigma\leqslant 2/(n-2)$ $(n\geqslant 3)$,如 $\mu\geqslant 0,\sigma\leqslant\frac{2}{n}$或$\mu<0,b,\mu$ 满足

$$\left|1+i\frac{\mu}{b}\right|\leqslant\frac{\sigma+1}{\sigma},\tag{10.10}$$

让 $u_0\in L^2(\mathbb{R}^n)$, $v_0\in H^1(\mathbb{R}^n)$(如 $\mu<0,\sigma=\frac{2}{n}$, $\|v_0\|_{L^2}$充分小).

考虑差

$$W(x,t)=u(x,t)-v(x,t),$$

这是 GL 方程(10.1)满足 $u(x,0)=u_0$ 的解 u 和 NLS 方程满足 $v(x,0)=v_0$ 的解 v 之差,则 W 满足估计

$$\begin{aligned}\|u(t)-v(t)\|_{L^2}^2&\leqslant\|u_0-v_0\|_{L^2}^2+a\mathscr{F}(v_0)t\\&+C_1(\sigma)b^{\frac{(2\sigma+1)}{(2\sigma+2)}}(1+b)\varphi(v_0)t\\&+C_2(\sigma)b^{\frac{(2\sigma+1)}{(2\sigma+2)}}\|u_0\|_{L^2}^2,\end{aligned}\tag{10.11}$$

其中 C_1,C_2 为仅依赖于 σ 的常数,$\mathscr{F}(v_0)$和 $\varphi(v_0)$(与 a,b 无关)为含有 v_0 的 $\|\nabla v\|_{L^2}^2$、$\|v\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2}$的有界项.

特别,如 $\|u_0-v_0\|_{L^2}^2$具有阶 $O(a)+O(b^{\frac{(2\sigma+1)}{(2\sigma+2)}})$,则对于小的 a,b

$$\|u-v\|_{L^2}=O(\sqrt{a})+O(b^{\frac{(2\sigma+1)}{(2\sigma+2)}}).\tag{10.12}$$

为了证明定理 10.6, 我们需要 NLS 方程 $\|\nabla v\|_{L^2}$, $\|v\|_{L^{2\sigma+2}}$的估计.

命题 10.7 设 $\sigma>0,\sigma\leqslant2/(n-2),n\geqslant3(\mu\leqslant0)$; $\sigma\leqslant2/n$ $(\mu<0)$. $v_0\in H^1(\mathbb{R}^n)$(若 $\mu<0,\sigma=\frac{2}{n}$, $\|v_0\|_{L^2}$充分小),则 NLS 方程(10.2)具初值 v_0 的解 v 满足

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla v|^2\mathrm{d}x\leqslant\mathscr{F}(v_0),\tag{10.13}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n}|v|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x\leqslant\varphi(v_0),\tag{10.14}$$

这里 $\mathscr{F}(v_0)$和 $\varphi(v_0)$由初值 v_0 所定,与 a,b 无关.

证 证明(10.13),(10.14)的想法是利用能量和 L^2 守恒律,但我们必须区分 $\mu\geqslant0$ 和 $\mu<0$ 的情况.

对 $\mu\geqslant0$,由守恒律易控制 H^1 模和 $L^{2\sigma+2}$模,事实上,由引理 10.5

$$\| \nabla v \|_{L^2}^2 \leqslant \frac{2}{\nu} E(v_0),$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |v|^{2\sigma+2} \mathrm{d}x \leqslant C(\sigma) \| \nabla v \|_{L^2}^{n\sigma} \| v \|_{L^2}^{2\sigma+2-n\sigma}$$

$$\leqslant C(\sigma) \left(\frac{E(v_0)}{\nu} \right)^{\frac{n\sigma}{2}} \| v_0 \|_{L^2}^{2\sigma+2-n\sigma},$$

其中常数 $C(\sigma)$ 仅依赖于 σ.

对 $\mu<0$, 我们仍能得到 L^2 亚临界 ($\sigma<2/n$) 和 L^2 临界 $\left(\sigma=\frac{2}{n}\right)$, $\| v_0 \|_{L^2}$ 充分小的界, 事实上, 由引理 10.5,

$$\begin{aligned} E(v_0) &= \frac{\nu}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 \mathrm{d}x + \frac{\mu}{2\sigma+2} \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{2\sigma+2} \mathrm{d}x \\ &\geqslant \frac{\nu}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 \mathrm{d}x + C(\sigma)\mu\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{n\sigma}{2}} \\ &\quad \| v \|_{L^2}^{2\sigma+2-n\sigma}. \end{aligned} \tag{10.15}$$

如 $n\sigma=2$, $\| v_0 \|_{L^2}$ 充分小, 若

$$\frac{\nu}{2} + C(\sigma)\mu \| v_0 \|_{L^2}^{2\sigma+2-n\sigma} > 0,$$

则由(10.15)可得

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 \mathrm{d}x \leqslant \left[\frac{\nu}{2} + C(\sigma)\mu \| v_0 \|_{L^2}^{2\sigma+2-n\sigma} \right]^{-1} E(v_0).$$

若 $n\sigma<2$, 可用如下引理.

引理 10.8 设 P, Q 和 $\beta<2$ 为正常数, 如 $y\geqslant 0$ 满足

$$y^2 - Py^\beta \leqslant Q,$$

则 y 是有界的,

$$y \leqslant \max\{(2P)^{\frac{1}{(2-\beta)}}, \sqrt{2Q}\}.$$

应用引理 10.8 于(10.15)可得

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 \mathrm{d}x \\ &\leqslant \max\{ [C(\sigma)\nu^{-1}(-\mu) \| v_0 \|_{L^2}^{2\sigma+2-n\sigma}]^{\frac{2}{(2-n\sigma)}}, \\ &\quad 4\nu^{-1}E(v_0) \}. \end{aligned}$$

如果我们用$\mathscr{F}(v_0)$和$\varphi(v_0)$表示$\int |\nabla v|^2 \mathrm{d}x$, $\int |v|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x$的界对于$\mu \geqslant 0$或$\mu < 0$情况，我们即得命题(10.7).

引理10.8的证明：证明是容易的，反之则有

$$y > (2P)^{\frac{1}{2-\beta}}, \quad y > \sqrt{2Q}.$$

由$y > (2P)^{\frac{1}{2-\beta}}$推出$Py^{\beta-2} < \frac{1}{2}$，因此

$$y^2 \leqslant Py^\beta + Q \leqslant Py^{\beta-2}y^2 + Q \leqslant \frac{1}{2}y^2 + Q,$$

它和$y > \sqrt{2Q}$矛盾.

定理10.6的证明：设u为GL方程的解，v为NLS方程(10.2)的解，则差$W = u - v$满足

$$\partial_t W = (a + i\nu)\Delta W + a\Delta v - (b + i\mu)(f(u) - f(v)) - bf(v), \tag{10.16}$$

其中$f(u) = |u|^{2\sigma}u$.

取非负、光滑截断函数ϕ, $\phi(x) \equiv 1$, $|x| \leqslant 1$; $\phi(x) \equiv 0$, $|x| \geqslant 2$.

$$\phi_k(x) = \phi\left(\frac{x}{k}\right), k > 0.$$

以$2\overline{W}\phi_k{}^2$乘方程(10.16)，对x积分可得

$$\begin{aligned}
\partial_t \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 |W|^2 \mathrm{d}x &= 2\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^n} \phi_k{}^2 \partial_t W\, \overline{W} \mathrm{d}x \\
&= 2\mathrm{Re}[(a + i\nu)(\phi_k{}^2\Delta W, W)] + 2a\mathrm{Re}(\phi_k{}^2\Delta v, W) \\
&\quad - 2\mathrm{Re}[(b + i\mu)(\phi_k{}^2(f(u) - f(v)), W)] \\
&\quad - 2b\mathrm{Re}(\phi_k{}^2 f(v), W),
\end{aligned} \tag{10.17}$$

这里$(F, G) = \int_{\mathbb{R}^n} F\overline{G}\mathrm{d}x$, $\overline{G}$表示G的复数共轭，Re表示实部.

为简单起见，令(10.17)右端的四个积分为Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，因此

$$\begin{aligned}
|\mathrm{I}| &\leqslant a\|\phi_k \nabla W\|_{L^2}^2 + 4\frac{a^2 + \nu^2}{a}\|W\nabla\phi_k\|_{L^2}^2 \\
&\quad - 2a\|\phi_k\nabla W\|_{L^2}^2, \\
|\mathrm{II}| &\leqslant (a + \varepsilon)\|\phi_k\nabla v\|_{L^2}^2 + 4a^2\varepsilon^{-1}\|W\nabla\phi_k\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

$$+a\|\phi_k\nabla W\|_{L^2}^2,$$

$\varepsilon>0$ 充分小，$|\mathrm{I}|+|\mathrm{II}|$ 的估计，利用 $\|\nabla\phi_k\|_{L^\infty}\leqslant k^{-1}\|\nabla\phi\|_{L^\infty}$ 可得

$$|\mathrm{I}|+|\mathrm{II}|\leqslant(a+\varepsilon)\|\phi_k\nabla v\|_{L^2}^2+\left(4\cdot\frac{a^2+\nu^2}{a}+4a^2\varepsilon^{-1}\right)k^{-2}\|\nabla\phi\|_{L^\infty}^2\|W\|_{L^2}^2.\quad(10.18)$$

利用假设 $\left|1+i\frac{\mu}{b}\right|\leqslant\frac{\sigma+1}{\sigma}$，能证

$$\mathrm{III}=-2\mathrm{Re}[(b+i\mu)(\phi_k^2(f(u)-f(v)),W)]\leqslant 0.\quad(10.19)$$

事实上，注意到 $f(u)=|u|^{2\sigma}u$ 和

$$f(u)-f(v)=\int_0^1[(\sigma+1)(u-v)|z|^{2\sigma}+\sigma(\overline{u}-\overline{v})z^2|z|^{2\sigma-2}]d\lambda,$$

其中 $z=\lambda u+(1-\lambda)v$，写 III 为

$$\begin{aligned}\mathrm{III}&=-2\mathrm{Re}\left\{(b+i\mu)\int_0^1\mathrm{d}\lambda\int_{\mathbb{R}^n}\phi_k^2[(\sigma+1)|W|^2|Z|^{2\sigma}+\sigma W^2Z^2|Z|^{2\sigma-2}]\mathrm{d}x\right\}\\&\leqslant 2\sigma b\max\left\{0,\left|1+i\frac{\mu}{b}\right|-\frac{\sigma+1}{\sigma}\right\}\int_0^1\mathrm{d}\lambda\int_{\mathbb{R}^n}\phi_k^2|W|^2|Z|^2\mathrm{d}x=0.\end{aligned}$$

对于第四项 IV，利用 Young 不等式，

$$AB\leqslant(A^p/p)+(B^q/q),\quad A,\quad B\geqslant 0,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

可得($f(v)=|v|^{2\sigma}v$)

$$\begin{aligned}|\mathrm{IV}|&=2b|(\phi_k^2f(v),W)|\\&\leqslant\frac{2\sigma+1}{\sigma+1}b^{(2\sigma+1)/(2\sigma+2)}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\phi_k^{\frac{2}{(2\sigma+1)}}|v|\right)^{2\sigma+2}\mathrm{d}x\\&\quad+\frac{1}{\sigma+1}b^{(2\sigma+1)/(2\sigma+2)}b\int_{\mathbb{R}^n}|W|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x.\end{aligned}\quad(10.20)$$

联系(10.18)，(10.19)，(10.20)，让 $k\to\infty$，$\varepsilon\to 0$，可得

$$\partial_t\int_{\mathbb{R}^n}|W|^2\mathrm{d}x\leqslant a\|\nabla v\|_{L^2}^2+\frac{2\sigma+1}{\sigma+1}b^{\frac{2\sigma+1}{2\sigma+2}}\int_{\mathbb{R}^n}|v|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x+\frac{1}{\sigma+1}b^{\frac{2\sigma+1}{2\sigma+2}+1}\int_{\mathbb{R}^n}|W|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x.$$

利用命题 10.7 的估计,上式对 t 积分得

$$\| W \|_{L^2}^2 \leqslant \| u_0 - v_0 \|_{L^2}^2 + a\mathscr{F}(v_0) + C_1(\sigma) b^{\frac{2\sigma+1}{2\sigma+2}}(1+b)\varphi(v_0)t$$

$$+ C_2(\sigma) b^{(2\sigma+1)/(2\sigma+2)}\left(b\int_0^t \| u(t') \|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} \mathrm{d}t'\right), \quad (10.21)$$

这里常数 C_1, C_2 仅与 σ 有关,要求的估计(10.11)由应用(10.4)于(10.21)的最后一项即得.

如 $v_0 \in H^2$, NLS 方程(10.2)具初值 v_0 的解 $v \in C([0,T); H^2)$ 由定理 10.4 满足估计(10.8),此时可估计Ⅱ,Ⅳ为

$$\begin{cases} |\,\mathrm{II}\,| = 2a\,|\,\Re\mathrm{e}(\phi_k^2 \Delta v, W)\,| \\ \qquad \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 |W|^2 \mathrm{d}x + a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 |\Delta v|^2 \mathrm{d}x, \\ |\,\mathrm{IV}\,| = 2b \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 |f(v)|\,|W| \mathrm{d}x \\ \qquad \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 |W|^2 \mathrm{d}x + b^2 \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{4\sigma+2} \mathrm{d}x. \end{cases} \quad (10.22)$$

应用 Gagliardo-Nirenberg 不等式于 $\int_{\mathbb{R}^n} |v|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x$ 有

$$\| v \|_{L^{4\sigma+2}} \leqslant C(\sigma) \| \Delta v \|_{L^2}^{\theta} \| v \|_{L^2}^{1-\theta},$$

其中常数 $C(\sigma)$ 依赖于 σ, $\theta \geqslant 0$ 为

$$\theta = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4\sigma+2}\right).$$

设 $\sigma \leqslant 2/(n-4)$,则 $\theta \leqslant 1$,估计Ⅰ,Ⅲ没有改变,联系这些估计并令 $k \to \infty$ 得

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^n} |W|^2 \mathrm{d}x \leqslant 2\int_{\mathbb{R}^n} |W|^2 \mathrm{d}x + a^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta v|^2 \mathrm{d}x$$

$$+ b^2 C(\sigma) \| \Delta v \|_{L^2}^{n\sigma} \| v_0 \|_{L^2}^{4\sigma+2-n\sigma}. \quad (10.23)$$

为求 $\| \Delta v \|_{L^2}$ 的界,利用(10.8),对 $t \leqslant T$

$$\| \Delta v(t) \|_{L^2} \leqslant K^2 \| \Delta v_0 \|_{H^2}^2 \equiv \mathscr{A}(v_0), \quad (10.24)$$

这里 K 为 T 和 $\mathscr{F}(v_0)$ 的上界,令

$$\mathscr{D}(v_0) \equiv C(\sigma)\mathscr{A}(v_0)^{n\sigma/2} \| v_0 \|_{L^2}^{4\sigma+2-n\sigma}, \quad (10.25)$$

积分(10.23)可得.

定理 10.9 设 $\sigma>0,\sigma\leqslant 2/(n-4),n\geqslant 5,\mu\leqslant 0;\sigma\leqslant\frac{2}{n},\mu<0$,设 b,μ 满足条件(10.10),让 $u_0\in L^2(\mathbb{R}^n)$ 和 $v_0\in H^2(\mathbb{R}^n)$ ($\|v_0\|_{L^2}$充分小,$\mu<0,\sigma=\frac{2}{n}$).考虑差

$$W(x,t)=u(x,t)-v(x,t),$$

它为 GL 方程(10.1)具 $u(x,0)=u_0(x)$的解 $u(x,t)$和 NLS 方程(10.2),$v(x,0)=v_0$的解 $v(x,t)$之差,则 $W(x,t)$具有估计

$$\|u(t)-v(t)\|_{L^2}^2\leqslant\|u_0-v_0\|_{L^2}^2e^{2t}+\frac{1}{2}a^2\mathscr{A}(v_0)(e^{2t}-1)$$
$$+\frac{1}{2}b^2\mathscr{D}(v_0)(e^{2t}-1),$$

对 $t<T,T<\infty$成立,其中 $\mathscr{A}(v_0)$为 $\|v\|_{C([0,T];H^2)}$作为 v_0的界(见(10.24),$\mathscr{D}(v_0)$为(10.25)所给定).

特别,对于小的 a 和b,$\|u_0-v_0\|_{L^2}=O(a)+O(b)$,则

$$\|u-v\|_{L^2}=O(a)+O(b).$$

现考虑 $L^{2\sigma+2}$无黏极限.

定理 10.10 $\sigma\leqslant 2/(n-4)(n\geqslant 5),\mu\geqslant 0$ 和 $\sigma\leqslant\frac{2}{n},\mu<0$,且

$$(2\sigma+1)(2\sigma+2)\leqslant\frac{2n}{n-4},n\geqslant 5. \tag{10.26}$$

又设 a,ν 和b,μ 满足

$$\left|1+i\frac{\nu}{a}\right|\leqslant\frac{\sigma+1-\delta}{\sigma},\left|1+i\frac{\mu}{b}\right|\leqslant\frac{\sigma+1}{\sigma}, \tag{10.27}$$

其中 $\delta\in(0,1)$为任意参数,$u_0\in L^2(\mathbb{R}^n)\cap L^{2\sigma+2}(\mathbb{R}^n)$,$v_0\in H^2(\mathbb{R}^n)$($\|v_0\|_{L^2}$充分小,$\mu<0,\sigma=\frac{n}{2}$),则差

$$W=u-v$$

为 GL 方程(10.1)具 $u(0)=u_0$的解和 NLS 方程(10.2)具 $v(0)=v_0$的解 $v(x,t)$之差,满足 $L^{2\sigma+2}$估计

$$\|W(t)\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2}\leqslant\|u_0-v_0\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2}e^{C(\sigma)t}$$

$$+ C_1(\sigma) b^{2\sigma+2} \mathscr{H}(v_0)(e^{C(\sigma)t} - 1)$$

$$+ C_2(\sigma)(a\delta^{-1})^{\sigma+1} \mathscr{K}(v_0)(e^{C(\sigma)t} - 1) \tag{10.28}$$

对任何 $T<\infty, t\leqslant T$ 成立,其中 C_1, C_2, C 为仅依赖于 $\sigma, \mathscr{H}, \mathscr{K}$ 的界,而与 a, b 无关.

特别,(10.28)表示 $L^{2\sigma+2}$的收敛率具有阶 $O(\sqrt{a})+O(\sqrt{b})$,如 δ 接近于 1.

证 令 $W=u-v$,则满足方程

$\partial_t W=(a+i\nu)\Delta W+a\Delta v-(b+i\mu)(f(u)-f(v))-bf(v)$,其中 $f(u)=|u|^{2\sigma}u$,让 $\phi_k(x)$为如前的截断函数,可得

$$\frac{1}{2(\sigma+1)}\partial_t \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 |W|^{2\sigma+2} dx = \mathrm{Re}(a+i\nu)\int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2$$

$$|W|^{2\sigma}\Delta W\,\overline{W} dx + a\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 |W|^{2\sigma}(\Delta v)\overline{W} dx$$

$$-\mathrm{Re}(b+i\mu)\int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 |W|^{2\sigma}[f(u)-f(v)]\overline{W} dx$$

$$-b\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 |W|^{2\sigma} f(v)\overline{W} dx.$$

为简单计,令上式右端的四项积分为 Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ,分部积分得:

$$\mathrm{I} = -\mathrm{Re}(a+i\nu)\int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 [(\sigma+1)|W|^{2\sigma}|\nabla W|^2$$

$$+\sigma|W|^{2\sigma-2}(\overline{W}\nabla W)^2] dx$$

$$-\mathrm{Re}(a+i\nu)\int_{\mathbb{R}^n} \phi_k |W|^{2\sigma}\overline{W}\nabla W \phi_k dx.$$

选取 $\varepsilon>0$ 使得

$$|1+i\nu/a| \leqslant \frac{\sigma+1-\varepsilon-\delta}{\sigma}.$$

分 Ⅰ 为 I_1 和 I_2,

$$\mathrm{I}_1 = -\mathrm{Re}(a+i\nu)\int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 [(\sigma+1-\varepsilon-\delta)|W|^{2\sigma}|\nabla W|^2$$

$$+\sigma|W|^{2\sigma-2}(\overline{W}\cdot\nabla W)^2] dx.$$

容易验证

$$|\mathrm{I}_1| \leqslant \sigma a \max\left\{0, |a+i\nu| - \frac{\sigma+1-\delta-\varepsilon}{\sigma}\right\}$$

$$\cdot \int_{R^n} \phi_k^2 |W|^{2\sigma} |\nabla W|^2 \mathrm{d}x = 0,$$

$$\mathrm{I}_2 = -a(\delta + \varepsilon) \int_{R^n} \phi_k^2 |W|^{2\sigma} |\nabla W|^2 \mathrm{d}x - \mathrm{Re}(a + i\nu)$$

$$\cdot \int_{R^n} \phi_k^2 |W|^{2\sigma} \overline{W} \nabla W \nabla \phi_k \mathrm{d}x.$$

对 I_2 第二项应用 Young 不等式得

$$|\mathrm{I}_2| \leqslant -a\delta \int_{R^n} \phi_k^2 |W|^{2\sigma} |\nabla W|^2 \mathrm{d}x$$

$$+ \frac{|a + i\nu|^2}{4a\varepsilon} \int_{R^n} |W|^{2\sigma+2} |\nabla \phi_k|^2 \mathrm{d}x.$$

分部积分Ⅱ可得

$$\mathrm{II} = -a\mathrm{Re} \int_{R^n} \phi_k^2 [(\sigma + 1)|W|^{2\sigma} \nabla v \nabla \overline{W}$$

$$+ \sigma |W|^{2\sigma-2} \overline{W}^2 \nabla v \nabla W] \mathrm{d}x$$

$$-2a\mathrm{Re} \int_{R^n} \phi_k |W|^{2\sigma} \nabla \phi_k \nabla v \overline{W} \mathrm{d}x.$$

应用 Young 不等式有

$$|\mathrm{II}| \leqslant C_1(\sigma) \int_{R^n} \phi_k^2 |W|^{2\sigma+2} \mathrm{d}x + C_2(\sigma)(a\delta^{-1})^{\sigma+1}$$

$$\int_{R^n} |\nabla v|^{2\sigma+2} \mathrm{d}x + a\delta \int_{R^n} \phi_k^2 |W|^{2\sigma} |\nabla W|^2 \mathrm{d}x$$

$$+ a \int_{R^n} |\nabla \phi_k| |W|^{2\sigma+2} \mathrm{d}x + a \int_{R^n} |\nabla \phi_k| |\nabla v|^{2\sigma+2} \mathrm{d}x.$$

注意到 $\|\nabla \phi_k\|_{L^\infty} \leqslant k^{-1} \|\nabla \phi\|_{L^\infty}$,

$$|\mathrm{I} + \mathrm{II}| \leqslant C_1(\sigma) \int_{R^n} \phi_k^2 |W|^{2\sigma+2} \mathrm{d}x + [C_2(\sigma)(a\delta^{-1})^{\sigma+1}$$

$$+ ak^{-1} \|\nabla \phi\|_{L^\infty}] \int_{R^n} |\nabla v|^{2\sigma+2} \mathrm{d}x$$

$$+ \left[\frac{|a + i\nu|^2}{4a\varepsilon} k^{-2} \|\nabla \phi\|_{L^\infty}^2 + ak^{-1} \|\nabla \phi\|_{L^\infty}\right]$$

$$\cdot \int_{R^n} |W|^{2\sigma+2} \mathrm{d}x. \tag{10.29}$$

第三项Ⅲ类似于定理 10.6 的证明,结论是

$$\mathrm{III} \leqslant 0, \text{当} \left|1 + i\frac{\mu}{b}\right| \leqslant \frac{\sigma+1}{\sigma} \text{时}. \tag{10.30}$$

现转向Ⅳ,

$$\mathrm{IV} = -b\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\phi_k^2 |W|^{2\sigma}|v|^{2\sigma}v\overline{W}\mathrm{d}x\right).$$

利用 Young 不等式

$$|\mathrm{IV}| \leqslant \frac{2\sigma+1}{2\sigma+2}\int_{\mathbb{R}^n}|W|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x + \frac{1}{2\sigma+2}b^{2\sigma+2}\int_{\mathbb{R}^n}|v|^{(2\sigma+1)(2\sigma+2)}\mathrm{d}x \tag{10.31}$$

应用 Gagliardo－Nirenberg 不等式

$$\int_{\mathbb{R}^n}|v|^{(2\sigma+1)(2\sigma+2)}\mathrm{d}x \leqslant C_3(\sigma)\left(\|\Delta v\|_{L^2}^{\theta}\|v\|_{L^2}^{1-\theta}\right)^{(2\sigma+1)(2\sigma+2)}, \tag{10.32}$$

$$\int|\nabla v|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x \leqslant C_4(\sigma)\left(\|\Delta v\|_{L^2}^{\theta_1}\|v\|_{L^2}^{1-\theta_1}\right)^{(2\sigma+2)}, \tag{10.33}$$

其中常数 C_3, C_4 仅依赖于 $\sigma, \theta, \theta_1 \geqslant 0$ 为

$$\theta = \frac{n}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(2\sigma+1)(2\sigma+2)}\right],$$

$$\theta_1 = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2\sigma+2}\right).$$

由假设 $\sigma, \theta, \theta_1 \leqslant 1$,利用(10.25)可得

$$\int_{\mathbb{R}^n}|v|^{(2\sigma+1)(2\sigma+2)}\mathrm{d}x \leqslant \mathscr{H}(v_0), \int_{\mathbb{R}^n}|\nabla v|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x \leqslant \mathscr{K}(v_0), \tag{10.34}$$

这里 $\mathscr{H}(v_0), \mathscr{K}(v_0)$ 为

$$\mathscr{H}(v_0) \equiv C_1(\sigma)\mathscr{A}(v_0)^{\theta(2\sigma+1)(\sigma+1)}\|v_0\|_{L^2}^{(1-\sigma)(2\sigma+1)(2\sigma+2)}, \tag{10.35}$$

$$\mathscr{K}(v_0) \equiv C_4(\sigma)\mathscr{A}(v_0)^{\theta_1(2\sigma+2)}\|v_0\|_{L^2}^{(1-\sigma_1)(2\sigma+2)}. \tag{10.36}$$

联系估计(10.29)—(10.36),对 t 积分,让 $k\to\infty, \varepsilon\to 0$ 可得

$$\int_{\mathbb{R}^n}|w|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x \leqslant e^{C(\sigma)t}\int_{\mathbb{R}^n}|u_0 - v_0|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x + C_5(\sigma)b^{2\sigma+2}\mathscr{H}(v_0)$$

$$(e^{C(\sigma)t} - 1) + C_6(\sigma)(a\delta^{-1})^{\sigma+1}\mathscr{K}(v_0)(e^{C(\sigma)t} - 1),$$

其中 C_1、C_5、C_6 为仅依赖于 σ 的常数,定理证毕.

现考虑无黏 H^1 极限.

定理 10.11 设 $n\sigma\leqslant 2$, $u_0\in H^1(\mathbb{R}^n)$(如 $n\sigma=2$, $\|u_0\|_{L^2}$充分小), $v_0\in H^2(\mathbb{R}^n)$(若 $\mu<0$, $n\sigma=2$, $\|v_0\|_{L^2}$充分小). 考虑差

$$W(x,t)=u(x,t)-v(x,t)$$

为 GL 方程(10.1), $u(0)=u_0$ 的解 u 和 NLS 方程(10.2), $v(0)=v_0$ 的解 v 之差,则 W 对任何 $T<\infty$, $t<T$ 有

$$\begin{aligned}\|\nabla W(t)\|_{L^2}^2&\leqslant\|\nabla u_0-\nabla v_0\|_{L^2}^2+2a\mathscr{A}(v_0)t\\&+4a^{-1}(b^2+\mu^2)\mathscr{D}(v_0)t+2a^{-1}(b^2+\mu^2)\mathscr{L}(v_0,a,b,t),\end{aligned}\tag{10.37}$$

其中 $\mathscr{A}(v_0)$, $\mathscr{D}(v_0)$为(10.24),(10.25)所给定,作为含 v_0 项的上界,但与 a, b 无关, $\mathscr{L}(v_0,a,b,t)$依赖于 v_0,a,b,t,它的阶为 $a^{(-n\sigma)/2}$(对于小的 a, $b^2+\mu^2$ 为 $O(a^2)$或为更高阶).

特别,(10.37)推出如 $u_0=v_0$, $b^2+\mu^2=O(a^2)$或为更高阶,则我们有

$$\|\nabla(u-v)(t)\|_{L^2}^2=O(a)+O((b^2+\mu^2)a^{-1-\frac{n\sigma}{2}}).$$

在我们证明定理之前,我们得到估计$\int_0^t\|\Delta u(t')\|_{L^2}^2\mathrm{d}t'$,它将对定理的证明有用.

命题 10.12 设 $\sigma\leqslant 2/(n-4)$, $n\geqslant 5$,又设 u 为 GL 方程具 $u_0\in H^1(\mathbb{R}^n)$的解,则对 u 有估计

$$\begin{aligned}&\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2+a\int_0^t\|\Delta u(t')\|_{L^2}^2\mathrm{d}t'\\&-\left[C(\sigma)\frac{b^2+\mu^2}{a}\|u_0\|_{L^2}^{4\sigma+2-n\sigma}\right]\int_0^t\|\Delta u(t')\|_{L^2}^{n\sigma}\mathrm{d}t'\\&\leqslant\|\Delta u_0\|_{L^2}^2,\end{aligned}\tag{10.38}$$

这里 $C(\sigma)$为常数,更进一步,若 $n\sigma=2$, $\|u_0\|_{L^2}$充分小,如

$$\|u_0\|_{L^2}^{4\sigma+2-n\sigma}<C^{-1}(\sigma)a^2(b^2+\mu^2)^{-1},$$

则有

$$\int_0^t \|\Delta u(t')\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t' \leqslant [a - C(\sigma)a^{-1}$$

$$\cdot (b^2+\mu^2)\|u_0\|_{L^2}^{4\sigma+2-n\sigma}]^{-1}\|\nabla u_0\|_{L^2}^2, \quad (10.39)$$

并且若 $n\sigma<2$,则有

$$\int_0^t \|\Delta u(t')\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t' \leqslant \max\{2a^{-1}\|\nabla u_0\|_{L^2}^2,$$

$$[C(\sigma)a^{-2}(b^2+\mu^2)\|u_0\|_{L^2}^{2-(n-4)\sigma}]^{\frac{2}{2-n\sigma}}t\}. \quad (10.40)$$

证 设 $\phi_k^2(x)(k>0)$为定理 10.6 证明中的截断函数,易知

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 |\nabla u|^2 \mathrm{d}x = 2\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 (\partial_t \nabla u)\nabla \overline{u} \mathrm{d}x = \mathrm{I} + \mathrm{II},$$

其中

$$\mathrm{I} = 2\mathrm{Re}(a+i\nu)\int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 \Delta(\nabla u)\nabla\overline{u}\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{II} = -2\mathrm{Re}(b+i\mu)\int_{\mathbb{R}^n}\phi_k^2\nabla(|u|^{2\sigma}u)\nabla\overline{u}\mathrm{d}x.$$

分部积分得

$$\mathrm{I} = -2a\int_{\mathbb{R}^n}\phi_k^2|\Delta u|^2\mathrm{d}x - 4\mathrm{Re}(a+i\nu)$$

$$\cdot\int_{\mathbb{R}^n}(\phi_k\Delta u)(\nabla\phi_k\cdot\nabla\overline{u})\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{II} = 2\mathrm{Re}(b+i\mu)\int_{\mathbb{R}^n}\phi_k^2|u|^{2\sigma}u\Delta\overline{u}\mathrm{d}x + 4\mathrm{Re}(b+i\mu)$$

$$\cdot\int_{\mathbb{R}^n}\phi_k|u|^{2\sigma}u\nabla\phi_k\nabla\overline{u}\mathrm{d}x.$$

利用 Young 不等式于 I 和 II 中,再相加,令 $k\to\infty$,

$$\partial_t\int_{\mathbb{R}^n}|\Delta u|^2\mathrm{d}x \leqslant -a\int_{\mathbb{R}^n}|\Delta u|^2\mathrm{d}x + \frac{8(b^2+\mu^2)}{a}\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x.$$

运用 G-N 不等式于 $\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x$.

$$\|u\|_{L^{4\sigma+2}} \leqslant C(\sigma)\|\Delta u\|_{L^2}^{\theta}\|u\|_{L^2}^{1-\theta},$$

这里 $C(\sigma)$为常数,依赖于 σ,$\theta\geqslant 0$ 为

$$\theta = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4\sigma+2}\right).$$

由假设 $\sigma \leqslant 2/(n-4)$，因此

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + a \| \Delta u \|_{L^2}^2 - \frac{C(\sigma)(b^2+\mu^2)}{a} \| \Delta u \|_{L^2}^{n\sigma} \| u_0 \|_{L^2}^{4\sigma+2-n\sigma} \leqslant 0,$$

对 t 积分后，我们得到(10.38)，(10.39)从(10.38)得到，(10.40)由(10.38)和引理 10.8 得到.

现证明定理 10.11，差 $W = u - v$ 满足方程

$$\partial_t W = (a+i\nu)\Delta W + a\Delta v - (b+i\mu)(f(u)-f(v)) - bf(v),$$

其中 $f(u) = |u|^{2\sigma}u$，设 $\phi_k(x)$ 为如前的截断函数，有

$$\begin{aligned}\partial_t \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 |\Delta W|^2 \mathrm{d}x &= 2\mathrm{Re}(a+i\nu)\int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 \Delta(\nabla W)\Delta \overline{W} \mathrm{d}x \\ &+ 2a\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 \Delta(\nabla v)\nabla \overline{W} \mathrm{d}x - 2\mathrm{Re}(b+i\mu)\int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 \nabla(f(u) \\ &- f(v))\nabla \overline{W} \mathrm{d}x - 2b\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 \nabla f(v) \nabla \overline{W} \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

现记上式右端四个积分分别为 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，并估计它们

$$\begin{aligned}\mathrm{I} &= -2a\int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 |\Delta W|^2 \mathrm{d}x \\ &\quad - 4\mathrm{Re}(a+i\nu)\int_{\mathbb{R}^n} \phi_k \Delta W(\nabla \phi_k \nabla \overline{W})\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

$$\mathrm{II} = -2a\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 \Delta v \Delta \overline{W} \mathrm{d}x - 4a\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^n} \phi_k \Delta v (\nabla \phi_k \nabla \overline{W})\mathrm{d}x.$$

在 Ⅰ 和 Ⅱ 中利用 Young 不等式可得

$$\begin{aligned}|\mathrm{I}| + |\mathrm{II}| &\leqslant -a\int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 |\Delta W|^2 \mathrm{d}x + (2a+\varepsilon)\| \phi_k \Delta v \|_{L^2}^2 \\ &+ 8\left(\frac{a^2+\nu^2}{a} + a^2\varepsilon^{-1}\right)k^{-2} \| \nabla \phi \|_{L^\infty}^2 \| \nabla W \|_{L^2}^2, \quad (10.41)\end{aligned}$$

其中 $\varepsilon > 0$ 充分小，分部积分得

$$\begin{aligned}\mathrm{III} &= 2\mathrm{Re}(b+i\mu)\int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 (f(u)-f(v))\Delta \overline{W} \mathrm{d}x \\ &\quad + 4\mathrm{Re}(b+i\mu)\int_{\mathbb{R}^n} \phi_k [f(u)-f(v)]\nabla \phi_k \nabla \overline{W} \mathrm{d}x,\end{aligned}$$

$$\mathrm{IV} = 2b\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 f(v)\Delta \overline{W} \mathrm{d}x$$

$$+4b\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^n}\phi_k f(v)\nabla\phi_k\nabla\overline{W}\mathrm{d}x,$$

由此可得

$$|\mathrm{III}+\mathrm{IV}|\leqslant a\int_{\mathbb{R}^n}\phi_k^2|\Delta W|^2\mathrm{d}x+2a^{-1}(b^2+\mu^2)$$

$$\cdot\int_{\mathbb{R}^n}\phi_k^2|f(u)|^2\mathrm{d}x+2a^{-1}(2b^2+\mu^2)\int_{\mathbb{R}^n}\phi_k^2|f(v)|^2\mathrm{d}x$$

$$+8|b+i\mu|k^{-1}\|\nabla\phi\|_{L^\infty}\left[\int_{\mathbb{R}^n}(|f(u)|+|f(v)|)\mathrm{d}x\right]^{1/2}$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla W|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}. \tag{10.42}$$

联系(10.41),(10.42),对 t 积分,令 $k\to\infty,\varepsilon\to0$ 得

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla(u(t)-v(t))|^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla(u_0-v_0)|^2\mathrm{d}x$$

$$+2a\int_0^t\|\Delta v(t')\|_{L^2}^2\mathrm{d}t'+4a^{-1}(b^2+\mu^2)$$

$$\int_0^t\|v(t')\|_{L^{4\sigma+2}}^{4\sigma+2}\mathrm{d}t'+2a^{-1}(b^2+\mu^2)\int_0^t\|u(t')\|_{L^{4\sigma+2}}^{4\sigma+2}\mathrm{d}t'. \tag{10.43}$$

如同定理 10.9 的证明,

$$\|\Delta v\|_{L^2}^2\leqslant\mathscr{A}(v_0),\ \|v\|_{L^{4\sigma+2}}^{4\sigma+2}\leqslant\mathscr{D}(v_0), \tag{10.44}$$

其中 $\mathscr{A}(v_0),\mathscr{D}(v_0)$为(10.24),(10.25)所定义,$\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x$ 的估计已在命题 10.12 中给出,

$$\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x\leqslant C(\sigma)\|\Delta u\|_{L^2}^{n\sigma}\|u\|_{L^2}^{2-(n-4)\sigma},$$

这里 C 仅依赖于σ,因此

$$\int_0^t\|u(t')\|_{L^{4\sigma+2}}^{4\sigma+2}\mathrm{d}t'\leqslant C(\sigma)\|u_0\|_{L^2}^{2-(n-4)\sigma}$$

$$\cdot\left(\int_0^t\|\Delta u(t')\|_{L^2}^2\mathrm{d}t'\right)^{n\sigma/2}t^{1-\frac{n\sigma}{2}}. \tag{10.45}$$

如 $n\sigma=2$, $\|u_0\|_{L^2}$充分小,则

$$\int_0^t \| u(t') \|_{L^{4\sigma+2}}^{4\sigma+2} dt'$$
$$= C(\sigma) \| u_0 \|_{L^2}^{2-(n-4)\sigma} \| \nabla u_0 \|_{L^2}^2 [a - C(\sigma) a^{-1}$$
$$\cdot (b^2 + \mu^2) \| u_0 \|_{L^2}^{4\sigma+2-n\sigma}]^{-1}. \tag{10.46}$$

如 $n\sigma < 2$,则

$$\int_0^t \| u(t') \|_{L^{4\sigma+2}}^{4\sigma+2} dt'$$
$$\leqslant \max\{ C(\sigma) a^{-\frac{n\sigma}{2}} \| \nabla u_0 \|_{L^2}^{n\sigma} \| u_0 \|_{L^2}^{2-(n-4)\sigma} t^{1-\frac{n\sigma}{2}},$$
$$C(\sigma)(a^{-2}(b^2+\mu^2))^{n\sigma/(2-n\sigma)} \| u_0 \|_{L^2}^{2+\frac{8\sigma}{2-n\sigma}} t \}. \tag{10.47}$$

(10.46),(10.47)的界用 $\mathscr{L}(a,b,v_0,t)$表示,显然,对于小的 a,如 $b^2+\mu^2 = O(a^2)$,则 $\mathscr{L}(a,b,v_0,t)$为 $a^{-\frac{n a}{2}}$. 将(10.47),(10.44),(10.45)和(10.46)代入(10.43)即得定理.

§11 二维广义 Ginzburg-Landau 方程殆周期解的存在性

现考虑如下广义 Ginzburg-Landau 方程

$$u_t = \rho u + (1+i\nu)\Delta u - (1+i\mu)|u|^{2\sigma}u + \alpha \boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla(|u|^2 u)$$
$$+ \beta(\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla)|u|^2 + f(x,t). \tag{11.1}$$

殆周期解的存在性,其中 ρ、ν、μ、σ、α 和 β 为实参数,$\boldsymbol{\lambda}_1$,$\boldsymbol{\lambda}_2$ 为实矢量,$f(x,t)$为任意复值函数,$u(x,t)$为未知复值函数,$(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$;$\Omega = (0,L)\times(0,L) \in \mathbb{R}^2$;$L$ 为正常数,设 $u(x,t)$满足空间周期条件,即 $u(\cdot,x)$为 Ω 周期的.

以 X 表示 Banach 空间,具模 $\|\cdot\|_X$,以 $\|\cdot\|_p$ 表示 $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)} (p\neq 2)$,$\|\cdot\|$ 表示 $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$.

定义 11.1(殆周期函数) 设 $u(t)$为一可测函数,其值在 Banach 空间 X 中,我们说 $u(t)$为 X 殆周期的,如对任何 $\varepsilon > 0$,存在

相对稠集 $E(\varepsilon,u)\subset\mathbb{R}^1$,使得

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}}\|u(t+\tau)-u(t)\|_X\leqslant\varepsilon,\ \forall\,\tau\in E(\varepsilon,u).\qquad(11.2)$$

令 $L^p_{\mathrm{per}}=\{g\in L^p(\Omega),g(x)$ 为 Ω 周期函数$\}$,

$H^k_{\mathrm{per}}=\{g\in H^k(\Omega),g(x)$ 为 Ω 周期函数$\}$,

$L^p_{AP}(X)=\{g:\mathbb{R}^1\to X,g(t)\in L^p(\mathbb{R}^1,X),g(t)$ 为 X 殆周期$\}$,记$\langle\cdot,\cdot\rangle$为 H^{-1}_{per} 和 H^1_{per} 的对偶关系,定义线性算子 $\mathscr{A}:H^1_{\mathrm{per}}\to H^{-1}_{\mathrm{per}}$ 为

$$\langle\mathscr{A}v,W\rangle=\int_\Omega((1+i\mu)\nabla v,\nabla\overline{w}-dv\overline{w})\mathrm{d}x,\ \forall\,v,w\in H^1_{\mathrm{per}}.$$

令 $\rho(A)$ 表示 A 的正则集,选取 $0\in\rho(A)$.

置 $$N\phi=(\rho-d)\phi-(1+i\mu)|\phi|^{2\sigma}+\alpha\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(|\phi|^2\phi)+\beta(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla)|\phi|^2,\ \forall\,\phi\in H^1_{\mathrm{per}},$$

则 N 为局部 Lip 连续的,即 $\exists\,C>0$,使得

$\|N(v)-N(w)\|\leqslant C\|v-w\|_{H^1},\ \forall\,v,w\in H^1_{\mathrm{per}}$,其中 Lip 常数 C 连续依赖于 $\|v\|_{H^1},\|w\|_{H^1}$.

为了证明 GL 方程(11.1)殆周期解的存在性,我们作如下假定:

假定 Ⅰ. 存在正数 σ 和 δ,使得如下不等式成立

$$\frac{7}{3}\leqslant\sigma\leqslant\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\mu-\nu\delta^2}{1+\delta^2}\right)^2}-1}.$$

假定 Ⅱ. $f(x,t)\in L^\infty_{AP}(H^1_{\mathrm{per}}),f_t(x,t)\in L^\infty_{AP}(H^{-1}_{\mathrm{per}})$,令 $M=\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}}\|f(x,t)\|_{H^1},N=\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}}\|f_t(x,t)\|_{H^{-1}}$.

我们可将 GL 方程(11.1)和周期边界条件(11.2)写成算子方程

$$u'(t)+\mathscr{A}u(t)=Nu(t)+f(\cdot,t),\ \forall\,t,u(t)\in H^1_{\mathrm{per}}.\qquad(11.3)$$

定义 11.2(强解) $u(x,t)$ 称为问题(11.3)的强解,如果满足如下条件:

(1) $u(t)\in L^2_{\mathrm{loc}}(R^1,H^1_{\mathrm{per}})$,

(2) $\mathscr{A}u(t)\in L^2_{\mathrm{loc}}(R^1,L^2_{\mathrm{per}})$,

(3) $u'(t)\in L^2_{loc}(R^1, L^2_{per})$.

(4) $u'(x,t)+\mathscr{A}u(x,t)=Nu(x,t)+f(x,t)$，在 $R^1\times\Omega$ 上几乎处处成立.

在以下证明中，我们经常要用到以下不等式：

（ⅰ）Agmon 不等式

$$\|u\|_\infty\leqslant K_1\|u\|^{\frac{1}{2}}\|u\|_{H^2}^{\frac{1}{2}},\ \forall u\in H_2(\Omega),$$

$$\|u\|_{H^2}\leqslant K_2\sqrt{\|u\|^2+\|\Delta u\|^2},\ \forall u\in H^2(\Omega).$$

（ⅱ）Sobolev 插值不等式

$$\|u\|_4\leqslant K_3\|u\|_{H^1}^{\frac{1}{2}}\|u\|^{\frac{1}{2}},\ \forall u\in H^1(\Omega),$$

$$\|u\|_8\leqslant K(\theta,q)\|u\|_{H^2}^{\theta}\|u\|_q^{1-\theta},\ \forall u\in H^2(\Omega),$$

$$\theta=\frac{8-q}{4q+8},1<q<8;\theta=0,q>8.$$

（ⅲ）Young 不等式

$$ab\leqslant\frac{(\varepsilon a)^p}{p}+\frac{\left(\frac{b}{\varepsilon}\right)^q}{q},\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\varepsilon>0.$$

（ⅳ）$\|u\|\leqslant K_4\|\nabla u\|,u\in H^1(\Omega),\int_\Omega u\,\mathrm{d}x=0,$

$$\|u\|_q\leqslant K'\|u\|_{H_1},u\in H^1(\Omega),1<q<\infty,$$

$$\|D^2u\|_{H^1}\leqslant K''(\|\nabla u\|^2+\|\Delta u\|^2+\|\nabla\Delta u\|^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\forall u\in H^3(\Omega),$$

其中 $|D^2u(t)|=\sqrt{|\partial_{xx}u(t)|^2+|\partial_{xy}u(t)|^2+|\partial_{yy}u(t)|^2}$.

以下我们用 Galerkin 方法构造问题(11.1)，(11.2)的有界解.

设 $\{\phi_j\}_{j=1}^\infty$ 表示空间 H^1_{per} 的标准正交基，它由算子 $\mathscr{A}$ 的特征函数所组成，考虑非线性常微分方程组的初值问题

$$(u'_{m,r}(t),\phi_j)+(\mathscr{A}u_{m,r}(t),\phi_j)$$
$$=(Nu_{m,r}(t),\phi_j)+(f,\phi_j),$$
$$j=1,2,\cdots,m,\tag{11.4}$$

$$u_{m,r}(-r)=0, \forall r\in \mathbb{N}^1; \tag{11.5}$$

其中 $u_{m,r}=\sum_{j=1}^{m}\alpha_{m,r,j}(t)\phi_j, \alpha_{m,r,j}(t)(j=1,2,\cdots,m)$为待定函数,因$(f(t),\phi_j)$对 t 连续,$(Nu_{m,r}(t),\phi_j)$为对$(\alpha_{m,r,1},\alpha_{m,r,2},\cdots,\alpha_{m,r,m})$为 Lip 连续,因此方程组(11.4),(11.5)具有惟一解$(\alpha_{m,r,1},\alpha_{m,r,2},\cdots,\alpha_{m,r,m})$,即存在问题(11.4),(11.5)的在某个区间 $t\in[-r,t_m]$上,解 $u_{m,r}(t)$,由估计$\|u_{m,r}\|$和$\|\partial_x u_{m,r}\|$的一致有界性,可得到问题(11.4),(11.5)的整体解 $u_{m,r}(t), t\in[-r,+\infty)$,而且由于先验估计$\|u_{m,r}\|$,$\|\partial_x u_{m,r}\|$关于 m,r 的一致有界性,便从序列$\{u_{m,r}\}$可选取收敛子序列,证明该子序列的极限为我们所要求的解.

引理 11.3 在假设Ⅱ下,存在常数 $C_1>0$ 使得

$$\|u_{m,r}(t)\|\leqslant C_1, \forall t\in[-r,+\infty),$$

其中 C_1 仅依赖于 α、β、ρ、ν、σ、$\boldsymbol{\lambda}_1$、$\boldsymbol{\lambda}_2$、L 和f,但与 μ,m,r 无关.

证 以$\overline{\alpha}_{m,r,j}$乘(11.4)第 j 个方程,对 $j=1$ 到 m 求和,两边取实部可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{m,r}(t)\|^2=&\rho\|u_{m,r}(t)\|^2-\|\nabla u_{m,r}(t)\|^2\\&-\int_\Omega|u_{m,r}(t)|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x\\&+\alpha\mathrm{Re}\int_\Omega(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(|u_{m,r}(t)|^2u_{m,r}(t)))\overline{u}_{m,r}(t)\mathrm{d}x\\&+\beta\mathrm{Re}\int_\Omega(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla u_{m,r}(t))|u_{m,r}(t)|^2\overline{u}_{m,r}(t)\mathrm{d}x\\&+\mathrm{Re}(f,u_m,r(t)).\end{aligned}\tag{11.6}$$

注意到 $\alpha\mathrm{Re}\int_\Omega(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(|u_{m,r}(t))|^2u_{m,r}(t))u_{m,r}(t)\mathrm{d}x=0$,

$$\beta\mathrm{Re}\int_\Omega(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla u_{m,r}(t))|u_{m,r}(t)|^2\overline{u}_{m,r}(t)\mathrm{d}x=0,$$

$$\delta\rho\|u_{m,r}(t)\|^2\leqslant\int_\Omega|u_{m,r}(t)|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x+\left(\frac{\delta\rho}{\sigma+1}\right)^{(\sigma+1)/\sigma}\sigma L,$$

$$\| u_{m,r}(t) \|^2 \leqslant \frac{1}{4} \int_\Omega | u_{m,r}(t) |^{2\sigma+2} \mathrm{d}x + \left(\frac{4}{\sigma}\right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{\sigma}{\sigma+1}\right)^{\frac{\sigma+1}{\sigma}} L,$$

则由不等式(11.6)可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| u_{m,r}(t) \|^2 + \frac{1}{2} \| u_{m,r}(t) \|^2 + \| \nabla u_{m,r}(t) \|^2$$

$$\leqslant \left(\frac{8\rho}{\sigma+1}\right)^{\left(\frac{\sigma+1}{\sigma}\right)} \frac{\sigma L}{8} + \left(\frac{4}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \left(\frac{\sigma}{\sigma+1}\right)^{\frac{\sigma+1}{\sigma}} L + \frac{\| f \|^2}{2}.$$

由 Gronwall 不等式有

$$\| u_{m,r}(t) \|^2 \leqslant \left(\frac{8\rho}{\sigma+1}\right)^{\frac{\sigma+1}{\sigma}} \frac{\sigma L}{8} + \left(\frac{4}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \left(\frac{\sigma}{\sigma+1}\right)^{\frac{\sigma+1}{\sigma}} L + \frac{\| f \|^2}{2}.$$

令 $C_1 = \sqrt{\left(\frac{8\rho}{\sigma+1}\right)^{\frac{\sigma+1}{\sigma}} \frac{\sigma L}{8} + \left(\frac{4}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \left(\frac{\sigma}{\sigma+1}\right)^{\frac{\sigma+1}{\sigma}} L + \frac{\| f \|^2}{2}}$,则有

$$\| u_{m,r}(t) \| \leqslant C_1, \forall t \in [-r, +\infty).$$

引理证毕.

引理 11.4 在假设Ⅰ和Ⅱ下,则存在常数 $C_2>0$ 使得

$$\| \nabla u_{m,r}(t) \| \leqslant C_2, \forall t \in [-r, +\infty),$$

其中 C_2 仅依赖于 $\alpha, \beta, \nu, \sigma, \boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, L$ 和 f,但与 μ, m, r 无关.

证 设 μ_j 为算子 $\mathscr{A}$ 的特征值,$\mathscr{A}\phi_j = \mu_j \phi_j, j = 1,2,3,\cdots$,乘以 $\overline{\mu_j}$(11.4)第 j 个方程,对 j 从 1 到 m 求和,再在两边取实部得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| \nabla u_{m,r}(t) \|^2 \leqslant & \rho \| \nabla u_{m,r}(t) \|^2 - \| \Delta u_{m,r}(t) \|^2 \\
& + \mathrm{Re}(f, \Delta u_{m,r}(t)) + \mathrm{Re}(1+i\mu) \\
& \int_\Omega | u_{m,r}(t) |^{2\sigma} u_{m,r}(t) \Delta \overline{u}_{m,r}(t) \mathrm{d}x \\
& - \alpha \mathrm{Re} \int_\Omega \boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla (| u_{m,r}(t) |^{2\sigma} u_{m,r}(t)) \Delta \overline{u}_{m,r}(t) \mathrm{d}x \\
& - \beta \mathrm{Re} \int_\Omega (\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla u_{m,r}(t)) | u_{m,r}(t) |^2 \Delta \overline{u}_{m,r}(t) \mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{11.7}$$

由文献[5]中引理 2.3 的证明,对 $\varepsilon \in (0,1]$,存在常数 $D_1(\varepsilon)$ 和 $D_2(\varepsilon)$ 使得

$$|-\alpha \mathrm{Re}\int_\Omega \boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(|u_{m,r}(t)|^2 u_{m,r}(t))\Delta\overline{u}_{m,r}(t)\mathrm{d}x|$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{4}\|\Delta u_{m,r}(t)\|^2+\frac{\varepsilon}{2}\|\nabla u_{m,r}(t)\|^4$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}\|u_{m,r}(t)\|_{4\sigma+2}^{4\sigma+2}+D_1(\varepsilon)|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}},$$

$0<\varepsilon\leqslant 1$ 和

$$|-\beta \mathrm{Re}\int_\Omega(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla u_{m,r}(t))|u_{m,r}(t)|^2\Delta\overline{u}_{m,r}(t)\mathrm{d}x|$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{4}\|\Delta u_{m,r}(t)\|^2+\frac{\varepsilon}{2}\|\nabla u_{m,r}(t)\|^4$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}\|u_{m,r}(t)\|_{4\sigma+2}^{4\sigma+1}+D_2(\varepsilon)|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}},$$

$$0<\varepsilon\leqslant 1,$$

其中 $D_1(\varepsilon)$和 $D_2(\varepsilon)$仅依赖于 σ 和 L,且 $\sigma>\frac{7}{3}$. 我们有

$$\mathrm{Re}(1+i\mu)\int_\Omega|u_{m,r}(t)|^{2\sigma}u_{m,r}(t)\Delta\overline{u}_{m,r}(t)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{4}\int_\Omega|u_{m,r}(t)|^{2\sigma-2}[(1+2\sigma)|\nabla|u_{m,r}(t)|^2|^2-2\mu\sigma$$

$$\cdot\nabla|u_{m,r}(t)|^2\cdot i(\overline{u}_{m,r}\nabla u_{m,r}(t)-u_{m,r}(t)\nabla u_{m,r}(t))$$

$$+|u_{m,r}(t)\nabla\overline{u}_{m,r}-\overline{u}_{m,r}\nabla u_{m,r}(t)|^2]\mathrm{d}x.$$

注意到

$$\rho\|\nabla u_{m,r}(t)\|^2\leqslant\frac{\varepsilon}{4}\|\nabla u_{m,r}(t)\|^4+\frac{\rho^2}{\varepsilon},$$

$$|\mathrm{Re}(f,\Delta u_{m,r}(t))|\leqslant\frac{\varepsilon}{4}\|\Delta u_{m,r}(t)\|^2+\frac{1}{\varepsilon}\|f\|^2,$$

则由不等式(11.7)有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u_{m,r}(t)\|^2+\|\Delta u_{m,r}(t)\|^2\leqslant\varepsilon\|\Delta u_{m,r}(t)\|^2$$

$$+2\varepsilon\|\nabla u_{m,r}(t)\|^4+\varepsilon\|u_{m,r}(t)\|_{4\sigma+2}^{4\sigma+2}+(D_1(\varepsilon)$$

$$+D_2(\varepsilon)).(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}+\frac{1}{\varepsilon}\|f\|^2+\frac{\rho^2}{\varepsilon}$$

$$-\frac{1}{4}\int_\Omega|u_{m,r}(t)|^{2\sigma-2}[(1+2\sigma)|\nabla|u_{m,r}(t)|^2|^2$$

$$
\begin{aligned}
&-2\mu\sigma\nabla|u_{m,r}(t)|^2\cdot i(\overline{u}_{m,r}(t)\nabla u_{m,r}(t)\\
&-u_{m,r}(t)\nabla u_{m,r}(t))+|\overline{u}_{m,r}(t)\nabla u_{m,r}(t)\\
&-u_{m,r}(t)\nabla\overline{u}_{m,r}(t)|^2]\mathrm{d}x.
\end{aligned}
\tag{11.8}
$$

另一方面乘(11.4)第 j 个方程以 $\left(\sum_{j=1}^{m}|\alpha_{m,r,j}(t)|^2\right)^{\sigma}\cdot\overline{\alpha}_{m,r,j}(t)$，对 j 求和从 1 到 m 可得

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega}u'_{m,r}(t)|u_{m,r}(t)|^{2\sigma}\overline{u}_{m,r}(t)\mathrm{d}x\\
&=\rho\int_{\Omega}|u_{m,r}(t)|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x+(1+i\nu)\int_{\Omega}\Delta u_{m,r}(t)\\
&\quad\cdot|u_{m,r}(t)|^{2\sigma}\overline{u}_{m,r}(t)\mathrm{d}x-(1+i\mu)\int_{\Omega}|u_{m,r}(t)|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_{\Omega}f\cdot|u_{m,r}(t)|^{2\sigma}\overline{u}_{m,r}(t)\mathrm{d}x\\
&\quad+\alpha\int_{\Omega}(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(|u_{m,r}(t)|^2u_{m,r}(t))|u_{m,r}(t)|^{2\sigma}u_{m,r}(t)\mathrm{d}x\\
&\quad+\beta\int_{\Omega}(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla u_{m,r}(t))|u_{m,r}(t)|^{2\sigma+2}\overline{u}_{m,r}(t)\mathrm{d}x.
\end{aligned}
\tag{11.9}
$$

对(11.9)两边取实部可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2(1+\sigma)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}|u_{m,r}(t)|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x\\
&=\rho\int_{\Omega}|u_{m,r}(t)|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x-\int_{\Omega}|\nabla u_{m,r}(t)|^2|u_{m,r}(t)|^{2\sigma}\mathrm{d}x\\
&\quad-\int_{\Omega}|u_{m,r}(t)|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x\\
&\quad-\frac{1}{2}\sigma\int_{\Omega}|u_{m,r}(t)|^{2\sigma-2}|\nabla|u_{m,r}(t)|^2|^2\\
&\quad+\mathrm{Re}\int_{\Omega}f\cdot|u_{m,r}(t)|^{2\sigma}u_{m,r}(t)\mathrm{d}x\\
&\quad+\frac{1}{2}\nu\sigma\int_{\Omega}|u_{m,r}(t)|^{2\sigma-2}\nabla|u_{m,r}(t)|^2\\
&\quad\cdot i(u_{m,r}(t)\nabla\overline{u}_m-\overline{u}_m\Delta u_{m,r}(t))\\
&\quad+\mathrm{Re}\alpha\int_{\Omega}(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(|u_{m,r}(t)|^2u_{m,r}(t))|u_{m,r}(t)|^{2\sigma}\overline{u}_{m,r}(t)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$+\mathrm{Re}\beta\int_{\Omega}(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla u_{m,r}(t))|u_{m,r}(t)|^{2\sigma+2}\overline{u}_{m,r}(t)\mathrm{d}x.$$

(11.10)

采用文献[5]中引理 2.2 的证明，则对 $r\in(0,1]$，存在常数 D_{31}，$D_{32}(r)$，$D_{33}(r)$，D_{41}，$D_{42}(r)$和 $D_{43}(r)$使得

$$\mathrm{Re}\alpha\int_{\Omega}(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(|u_{m,r}(t)|^2u_{m,r}(t))|u_{m,r}(t)|^{2\sigma}\overline{u}_{m,r}(t)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\gamma D_{31}\|\Delta u_{m,r}(t)\|^2+8\gamma\|\nabla u_{m,r}(t)\|^4+\frac{1}{6}$$

$$\int_{\Omega}|u_{m,r}(t)|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x+D_{32}(r)+D_{33}(r)|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|^{\frac{8(1+2\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}},$$

$$\mathrm{Re}\alpha\int_{\Omega}(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(|u_{m,r}(t)|^2u_{m,r}(t))|u_{m,r}(t)|^{2\sigma}\overline{u}_{m,r}(t)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\gamma D_{41}\|\Delta u_{m,r}(t)\|^2+8\gamma\|\Delta u_{m,r}(t)\|^4$$

$$+\frac{1}{6}\int_{\Omega}|u_m,r(t)|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x$$

$$+D_{42}(r)+D_{43}(r)|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-\gamma}},$$

其中 D_{31}，$D_{32}(r)$，$D_{33}(r)$，D_{41}，$D_{42}(r)$和 $D_{43}(r)$依赖于 σ 和 L。注意到

$$|\mathrm{Re}\int_{\Omega}f\cdot|u_{m,r}(t)|^{2\sigma}\overline{u}_{m,r}(t)\mathrm{d}x|$$

$$\leqslant\frac{1}{6}\int_{\Omega}|u_{m,r}(t)|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x+\frac{3}{2}\|f\|^2,$$

因此，对 $\varepsilon\in(0,1]$，选取适当的 r，则存在常数 D_{51}和 $D_{52}(r)$使得由不等式(11.10)可得

$$\frac{1}{2(1+\sigma)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}|u_{m,r}(t)|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant-\frac{1}{2}\int_{\Omega}|u_{m,r}(t)|^{4\sigma+2}\mathrm{d}x$$

$$+\varepsilon\|\Delta u_{m,r}(t)\|^2+\varepsilon\|\nabla u_{m,r}(t)\|^4+D_{51}(1+\mu^2)$$

$$+D_{52}(r)(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}$$

$$-\frac{1}{4}\int_{\Omega}|u_{m,r}(t)|^{2\sigma+2}((1+2\sigma)|\nabla|u_{m,r}(t)|^2|^2$$

$$-2\nu\sigma\nabla|u_{m,r}(t)|^2\cdot i(u_m(t)\nabla\overline{u}_{m,r}(t)$$
$$-\overline{u}_{m,r}(t)\nabla u_{m,r}(t))$$
$$+|u_{m,r}(t)\nabla\overline{u}_{m,r}(t)-\overline{u}_{m,r}(t)\nabla u_{m,r}(t)|^2)\mathrm{d}x, \quad (11.11)$$

其中 $D_{51}, D_{52}(r)$ 仅依赖于 f,σ 和 L，且 $\sigma>\frac{7}{3}$，由假设Ⅱ和文献[5]中的证明，适当选取 ε，则存在常数 D_{61}, D_{62}，使得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla u_{m,r}(t)\|^2+\frac{\delta^2}{1+\sigma}\int_\Omega|u_{m,r}(t)|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x\right)$$
$$+\left(\|\nabla u_{m,r}(t)\|^2+\frac{\delta^2}{1+\sigma}\int_\Omega|u_{m,r}(t)|^{2\sigma+2}\mathrm{d}x\right)$$
$$\leqslant D_{61}+D_{62}(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}},$$

其中 D_{61}, D_{62} 仅依赖于 f,σ 和 L. 令

$$C_2=\sqrt{D_{61}+D_{62}(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}},$$

则由 Gronwall 不等式可得

$$\|\nabla u_{m,r}(t)\|\leqslant C_2, \forall t\in[-r,+\infty).$$

引理 11.4 得证.

引理 11.5 在假设Ⅰ和Ⅱ下，存在常数 $C_3>0$ 使得

$$\|\Delta u_{m,r}(t)\|\leqslant C_3, \forall t\in[-r,+\infty),$$

其中 C_3 仅依赖于 $\alpha,\beta,\mu,\rho,\nu,\sigma,\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2,L$ 和 f，与 m,r 无关.

证 乘(11.4)第 j 个方程以 $\overline{\mu}_j^2$，对 j 求和从 1 到 m，再取实部得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta u_{m,r}(t)\|^2=\rho\|\Delta u_{m,r}(t)\|^2-\|\nabla\Delta u_{m,r}(t)\|^2$$
$$+\mathrm{Re}(f,\Delta^2u_{m,r}(t))-\mathrm{Re}(1+i\mu)\int_\Omega|u_{m,r}(t)|^{2\sigma}u_{m,r}(t)$$
$$\Delta^2\overline{u}_{m,r}(t)\mathrm{d}x+\alpha\mathrm{Re}\int_\Omega(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(|u_m(t)|^2u_{m,r}(t)))\Delta^2\overline{u}_{m,r}(t)\mathrm{d}x$$
$$+\beta\mathrm{Re}\int_\Omega(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla u_{m,r}(t))|u_{m,r}(t)|^2\Delta^2\overline{u}_{m,r}(t)\mathrm{d}x.$$
$$(11.12)$$

由于

$$
\begin{aligned}
&\left| -\operatorname{Re}(1+i\mu)\int_\Omega |u_{m,r}(t)|^{2\sigma}u_{m,r}(t)\Delta^2\overline{u}_{m,r}(t)\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \sqrt{1+\mu^2}\int_\Omega |\nabla(|u_{m,r}(t)|^{2\sigma}u_{m,r}(t))||\nabla\Delta\overline{u}_{m,r}(t)|\mathrm{d}x \\
&\leqslant \varepsilon\|\nabla\Delta u_{m,r}(t)\|^2+\varepsilon\|\nabla u_{m,r}(t)\|_4^4+\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^3(2\sigma+1)^4 \\
&\quad\cdot(1+\mu^2)^2\|u_{m,r}(t)\|_{8\sigma}^{8\sigma} \\
&\leqslant \varepsilon\|\nabla\Delta u_{m,r}(t)\|^2+\varepsilon\|\nabla u_{m,r}(t)\|_4^4+D_{71}(\varepsilon) \\
&\quad\cdot(1+\mu^2)^2,
\end{aligned}
\tag{11.13}
$$

其中

$$
D_{71}(\varepsilon)=\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^3(2\sigma+1)^4(k'(8\sigma))^{8\sigma}C_2.
$$

我们有

$$
\begin{aligned}
&\left|\alpha\operatorname{Re}\int_\Omega(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(|u_{m,r}(t)|^2))\Delta^2\overline{u}_{m,r}(t)\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant 4|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|\int_\Omega[u_{m,r}(t)||\nabla u_{m,r}(t)|^2\cdot|\nabla\Delta\overline{u}_{m,r}(t)| \\
&\quad+|u_{m,r}(t)|^2|D^2u_{m,r}(t)||\nabla\Delta\overline{u}_{m,r}(t)|]\mathrm{d}x.
\end{aligned}
\tag{11.14}
$$

因

$$
\begin{aligned}
&4|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|\int_\Omega|u_{m,r}(t)|\cdot|\nabla u_{m,r}(t)|^2\cdot|\nabla\Delta\overline{u}_{m,r}(t)|\mathrm{d}x \\
&\leqslant 4|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|\,\|\nabla\Delta u_{m,r}(t)\|\,\|\nabla u_{m,r}(t)\|_4^2\|u_{m,r}(t)\|_\infty \\
&\leqslant 4|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|\,\|\nabla\Delta u_{m,r}(t)\| \\
&\quad\cdot K_3'\|\nabla u_{m,r}(t)\|_{H^1}\|\nabla u_{m,r}(t)\| \\
&\quad\cdot K_1\|u_{m,r}(t)\|_{H^2}^{\frac{1}{2}}\|u_{m,r}(t)\|^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant 4|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|K_1K_2C_1^{\frac{1}{2}}C_2\|\nabla\Delta u_{m,r}(t)\|\,\|u_{m,r}(t)\|_{H^2}^{\frac{3}{2}} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|\nabla\Delta u_{m,r}(t)\|^2 \\
&\quad+\frac{1}{2}(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|K_1K_3C_1^{\frac{1}{2}}C_2)^2\|u_{m,r}(t)\|_{H^2}^2 \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|\nabla\Delta u_{m,r}(t)\|^2+\frac{\varepsilon}{2}\|u_{m,r}(t)\|_{H^2}^4+D_{72}(\varepsilon)|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|^4,
\end{aligned}
$$

其中 $D_{72}(\varepsilon)=(\frac{1}{2\varepsilon})^3(K_1K_3C_1^{\frac{1}{2}}C_2)^4$，再有

$$4|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|\int_\Omega|u_{m,r}(t)|^2|D^2u_{m,r}(t)||\nabla\Delta\overline{u}_{m,r}(t)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant 4|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|\,\|D^2u_{m,r}(t)\|_4\,\|\nabla\Delta u_{m,r}(t)\|$$

$$\cdot\|u_{m,r}(t)\|_8^2$$

$$\leqslant 4|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|\cdot K_3\|D^2u_{m,r}(t)\|_{H^1}^{\frac{1}{2}}\|D^2u_{m,r}(t)\|^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\|\nabla\Delta u_{m,r}(t)\|\cdot K(\theta,q)\|u_{m,r}(t)\|_{H^2}^{\theta}\|u_{m,r}(t)\|_q^{1-\theta}$$

$$\leqslant 4|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|K_3K(\theta,q)$$

$$\cdot\|D^2u_{m,r}(t)\|_{H^1}^{\frac{1}{2}}\|u_{m,r}(t)\|_{H^2}^{\theta+\frac{1}{2}}\|u_{m,r}(t)\|_q^{1-\theta}$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\|D^2u_{m,r}(t)\|_{H^1}^2+\frac{3}{2\varepsilon}\left[\frac{2|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|K_3K(\theta,q)}{\varepsilon}\right]^{\frac{4}{3}}$$

$$\cdot\|u_{m,r}(t)\|_{H^2}^{\frac{4}{3}\theta+\frac{2}{3}}\|u_{m,r}(t)\|_q^{\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\theta}$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\|D^2u_{m,r}(t)\|_{H^1}^2+\frac{\varepsilon}{2}\|u_{m,r}(t)\|_{H^2}^4$$

$$+\left(\frac{2\theta+1}{3\varepsilon}\right)^{\frac{2\theta+1}{5-2\theta}}\left(\frac{5-2\theta}{6}\right)\left\{\frac{3}{2\varepsilon}\left[\frac{\alpha|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|K_3K(\theta,q)}{\varepsilon}\right]^{\frac{4}{3}}\right\}^{\frac{6}{5-2\theta}}$$

$$\cdot\|u_{m,r}(t)\|_q^{\frac{8-8\theta}{5-2\theta}}$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\|D^2u_{m,r}(t)\|_{H^1}^2+\frac{\varepsilon}{2}\|u_{m,r}(t)\|_{H^2}^4\|$$

$$+D_{73}(\varepsilon)\cdot|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|^{\frac{8}{5-2\theta}},$$

其中

$$D_{73}(\varepsilon)=\left(\frac{2\theta+1}{3\varepsilon}\right)^{\frac{2\theta+1}{5-2\theta}}\cdot\frac{5-2\theta}{6}\left\{\frac{3}{2\varepsilon}\left[\frac{2K_3K(\theta,q)}{\varepsilon}\right]^{\frac{4}{3}}\right\}^{\frac{6}{5-2\theta}}$$

$$\cdot|K'(q)C_2|^{\frac{8-8\theta}{5-2\theta}},1<q<\infty,\theta=\frac{8-q}{4q+8},$$

因此对 $\varepsilon\in(0,1]$，由不等式(11.14)有

$$|\alpha\mathrm{Re}\int_\Omega(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(|u_{m,r}(t)|^2))\Delta^2\overline{u}_{m,r}(t)\mathrm{d}x|$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|\nabla\Delta u_{m,r}(t)\|^2+\varepsilon\|u_{m,r}(t)\|_{H^2}^4$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}\|D^2u_{m,r}(t)\|_{H^1}^2+D_{72}(\varepsilon)|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|^4$$

$$+D_{73}(\varepsilon)|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|^{\frac{8}{5-2\theta}}. \tag{11.15}$$

类似地有,对 $\varepsilon\in(0,1]$,存在正常数 $D_{74}(\varepsilon)$和 $D_{75}(\varepsilon)$使得

$$|\beta\mathrm{Re}\int_\Omega(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla u_{m,r}(t))|u_{m,r}(t)|^2\Delta^2\overline{u}_{m,r}(t)\mathrm{d}x|$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\|\nabla\Delta u_{m,r}(t)\|^2+\varepsilon\|u_{m,r}(t)\|_{H^2}^4+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\|D^2u_{m,r}(t)\|_{H^1}^2+D_{74}(\varepsilon)|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|^4+D_{75}(\varepsilon)|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|^{\frac{8}{5-2\theta}}. \tag{11.16}$$

利用不等式(ⅳ)和如下不等式(11.17)—(11.19)

$$\|u_{m,r}(t)\|_{H^2}^4\leqslant 2K_2^4(\|u_{m,r}(t)\|^4+\|\Delta u_{m,r}(t)\|^4), \tag{11.17}$$

$$\|\Delta u_{m,r}(t)\|^2\leqslant\varepsilon\|\nabla\Delta u_{m,r}(t)\|^2+\frac{\varepsilon}{4}\|\nabla u_{m,r}(t)\|^2, \tag{11.18}$$

$$|\mathrm{Re}(f,\Delta^2u_{m,r}(t))|\leqslant\varepsilon\|\nabla\Delta u_{m,r}(t)\|^2+\frac{\varepsilon}{2}\|\nabla f\|^2$$

$$\leqslant\varepsilon\|\nabla\Delta u_{m,r}(t)\|^2+\frac{\varepsilon}{2}M^2. \tag{11.19}$$

选取 ε 充分小,由不等式(11.12)可知,存在常数 D_{81},D_{82}和 D_{83} 使得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta u_{m,r}(t)\|^2+\|\Delta u_{m,r}(t)\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla\Delta u_{m,r}(t)\|^2$$

$$\leqslant D_{81}(1+\mu^2)^2+D_{82}(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^4$$

$$+D_{83}(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^{\frac{8}{5-2\theta}},$$

其中 θ 的选取为同引理 11.4,令

$$C_3=\sqrt{D_{81}(1+\mu^2)^2+D_{82}(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^4+D_{83}(|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)^{\frac{8}{5-2\theta}}},$$

由 Gronwall 不等式,得

$$\| \Delta u_{m,r}(t) \| \leqslant C_3, \forall t \in [-r, +\infty).$$

引理 11.5 证毕.

附注 11.6 由引理11.3—11.5有

$$\| u_{m,r}(t) \|_\infty \leqslant K_1 C_1^{1/2} [K_2(C_1 + C_2)]^{\frac{1}{2}}.$$

为方便计,令

$$C^* = K_1 C_1^{1/2} \cdot (K_2 \sqrt{C_1^2 + C_3^2})^{\frac{1}{2}}.$$

引理 11.7 在假设Ⅰ,Ⅱ下,则存在常数 $C_4 > 0$ 使得

$$\| u'_{m,r}(t) \| \leqslant C_4, \forall t \in [-r, +\infty),$$

其中 C_4 依赖于 $\alpha, \beta, \mu, \nu, \sigma, \boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, L$ 和 f,但与 m, r 无关.

证 类似于文献[10]中的证明,略.

定理 11.8 在假设Ⅰ,Ⅱ下,问题(11.1),(11.2)具有强解 $u(t)$,它满足

$$\| u(t) \| \leqslant C_1, \| \partial_x u(t) \| \leqslant C_2, \| u'(t) \| \leqslant C_3, \quad (11.20)$$

这里常数 C_1, C_2, C_3 分别由引理 11.3—11.6 所给定.

证 由引理 11.3—11.6 和标准的紧性原理,可知能选取 $\{u_{m,r}\}$ 的子序列,仍记为 $\{u_{m,r}\}$ 使得

$\lim\limits_{r \to +\infty} u_{m,r}(t) = u_m(t)$,在 $L^\infty(\mathbb{R}^1; H^1_{\text{per}})$ 中弱 * 收敛,

$\lim\limits_{r \to +\infty} u_{m,r}(t) = u_m(t)$,在 $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^1; L^2_{\text{per}})$ 中强收敛,

$\lim\limits_{r \to +\infty} u'_{m,r}(t) = u'_m(t)$,在 $L^\infty(\mathbb{R}^1; L^2_{\text{per}})$ 中弱 * 收敛,

$\lim\limits_{r \to +\infty} \mathscr{A} u_{m,r}(t) = \mathscr{A} u_m$ 在 $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^1; L^2_{\text{per}})$ 中弱收敛,

$\lim\limits_{r \to +\infty} u_{m,r}(x, \rho) = u_m(x, t)$ 在 $\Omega \times \mathbb{R}^1$ 中几乎处处收敛,

$\lim\limits_{r \to +\infty} |u_{m,r}(t)|^2 u_{m,r}(t) = |u_m(t)|^2 u_m(t)$,在 $L^2(\mathbb{R}^1; L^2_{\text{per}})$ 中弱收敛,

$\lim\limits_{r \to +\infty} |u_{m,r}(t)|^4 u_{m,r}(t) = |u_m(t)|^4 u_m(t)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^1; L^2_{\text{per}})$ 中弱收敛且 $u_m(t)$ 满足如下方程:

$$(u'_m(t), \phi_j) + (\mathscr{A} u_m(t), \phi_j) = (N u_m(t) \phi_j) + (f(t), \phi_j), \quad j = 1, 2, \cdots, m, \quad (11.21)$$

其中 $u_m(t)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_{mj}(t)\phi_j, \alpha_{mj}(t)=\lim_{r\to+\infty}\alpha_{m,r,j}(t)$且不等式(11.20)对 $u_m(t)$成立.

再选取$\{u_m\}$的子序列仍记为$\{u_m\}$,使得

$\lim_{m\to+\infty}u_m(t)=u(t)$依 $L^\infty(\mathbb{R}^+;H^1_{\text{per}})$弱 * 收敛,

$\lim_{m\to+\infty}u_m(t)=u(t)$依 $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^1;L^2_{\text{per}})$强收敛,

$\lim_{m\to+\infty}u'_m(t)=u'(t)$依 $L^\infty(\mathbb{R}^+;L^2_{\text{per}})$弱 * 收敛,

$\lim_{m\to+\infty}\mathscr{A}u_m(t)=\mathscr{A}u(t)$依 $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^1;L^2_{\text{per}})$弱收敛,

$\lim_{m\to+\infty}u_m(x,t)=u(x,t)$在 $\Omega\times\mathbb{R}^1$上几乎处处收敛,

$\lim_{m\to+\infty}|u_m(t)|^2u_m(t)=|u(t)|^2u(t)$依 $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^1;L^2_{\text{per}})$弱收敛,

$\lim_{m\to+\infty}|u_m(t)|^4u_m(t)=|u(t)|^4u(t)$依 $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^1;L^2_{\text{per}})$弱收敛.

此外,$u(t)$满足(11.21),$j=1,2,3,\cdots$,因而

$$u'(x,t)+\mathscr{A}u(x,t)=Nu(x,t)+f(x,t) \tag{11.22}$$

在$\mathbb{R}^1\times\Omega$上几乎处处成立,且不等式(11.20)对 $u(t)$成立,因此 $u(t)$为问题(11.1),(11.2)所要求的强解,定理 11.8 证毕.

现证明殆周期解的存在性,我们要证明由定理 11.8 所构造的有界解 $u(t)$为问题(11.1),(11.2)的殆周期解.

定理 11.9 在假设Ⅰ,Ⅱ下,如参数 α,β,ρ,μ,满足如下不等式

$$K_4^2(\rho+4|\mu|^\sigma C^{*2\sigma}C_4+(3|\alpha\lambda_1|+|\beta\lambda_2|)(2C^*C_2K_3^2+\frac{C_*^2}{2}))+(C_3|\alpha\lambda_1|+|\beta\lambda_2)(C^*C_2K_3^2+\frac{C^{*2}}{2})\leqslant 1, \tag{Δ}$$

则问题(11.1),(11.2)具有 L^2 殆周期解.

证 我们要证明由定理 11.8 所得到的有界解 $u(t)$为 L^2 殆周期的,为此,证明 $u_m(t)$为殆周期的,对 $m=1,2,3,\cdots$.

事实上,因 f 为殆周期的,则对 $\varepsilon>0$,存在相对稠密集 $E(\varepsilon,f)$,

使得

$$\| f(t+\tau)-f(t) \| \leqslant \varepsilon, \forall \tau \in E(\varepsilon, f).$$

由(11.21),对任何 $\tau \in E(\varepsilon, f)$,我们有

$$(u_m'(t+\tau), \phi_j)+(\mathscr{A} u_m(t+\tau), \phi_j)$$
$$=(N u_m(t+\tau), \phi_j)+(f(t+\tau), \phi_j),$$
$$(u_m'(t), \phi_j)+(\mathscr{A} u_m(t), \phi_j)=(N u_m(t), \phi_j)+(f(t), \phi_j),$$
$$j=1,2,\cdots, m.$$

于是

$$((u_m'(t+\tau)-u_m'(t)), \phi_j)+(\mathscr{A}(u_m(t+\tau)-u_m(t), \phi_j)$$
$$=(N u_m(t+\tau)-N u_m(t), \phi_j)+(f(t+\tau)-f(t), \phi_j),$$
$$j=1,2,\cdots, m. \tag{11.23}$$

乘(11.23)第 j 个方程以 $\alpha_{m,j}(t+\tau)-\alpha_{m,j}(t)$,对 j 从 1 到 m 求和,两边取实部,得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} t} \| u_m(t+\tau)-u_m(t) \|^2 \leqslant-\| \nabla[u_m(t+\tau) \\
&\quad-u_m(t)] \|^2+\rho \| u_m(t+\tau)-u_m(t) \|^2 \\
&\quad-\operatorname{Re}(1+i \mu) \int_{\Omega}(|u_m(t+\tau)|^{2 \sigma} u_m(t+\tau) \\
&\quad-|u_m(t)|^{2 \sigma} \cdot u_m(t)) \cdot(\bar{u}_m(t+\tau)-\bar{u}_m(t)) \mathrm{d} x \\
&\quad+\operatorname{Re} \int_{\Omega}(\alpha \boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla(|u_m(t+\tau)| u_m(t+\tau) \\
&\quad-\alpha \boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla(|u_m(t)|^2 u_m(t))) \cdot(\bar{u}_m(t+\tau)-\bar{u}_m(t)) \mathrm{d} x \\
&\quad+\operatorname{Re} \int_{\Omega}[\beta(\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla u_m(t+\tau))|u_m(t+\tau)|^2 \\
&\quad-\beta(\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla u_m(t))|u_m(t)|^2 \cdot(\bar{u}_m(t+\tau)-\bar{u}_m(t))] \mathrm{d} x \\
&\quad+\operatorname{Re}(f, u_m(t+\tau)-u_m(t)).
\end{aligned} \tag{11.24}$$

因

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}(1+i \mu)(|u_m(t+\tau)|^{2 \sigma} u_m(t+\tau)-|u_m(t)|^{2 \sigma} u_m(t)) \\
&\cdot(\bar{u}_m(t+\tau)-\bar{u}_m(t))=|u_m(t+\tau)|^{2 \sigma+2}+|u_m(t)|^{2 \sigma+2} \\
&\quad-|u_m(t+\tau)|^{2 \sigma} \cdot \frac{u_m(t) \bar{u}_m(t+\tau)+u_m(t+\tau) \bar{u}_m(t)}{2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-|u_m(t)|^{2\sigma}\cdot\frac{u_m(t)\overline{u}_m(t+\tau)-u_m(t+\tau)\overline{u}_m(t)}{2i}\\
&+\mu[|u_m(t+\tau)|^{2\sigma}-|u_m(t)|^{2\sigma}]\\
&\cdot\frac{u_m(t)\overline{u}_m(t+\tau)-u_m(t+\tau)\overline{u}_m(t)}{2i}\\
=&\ I_1+\mu I_2. \qquad (11.25)
\end{aligned}
$$

其中 $I_1=|u_m(t+\tau)|^{2\sigma+2}+|u_m(t)|^{2\sigma+2}$

$$
\begin{aligned}
&-|u_m(t+\tau)|^{2\sigma}\frac{u_m(t)\overline{u}_m(t+\tau)+u_m(t+\tau)\overline{u}_m(t)}{2}\\
&-|u_m(t)|^{2\sigma}\frac{u_m(t)\overline{u}_m(t+\tau)-u_m(t+\tau)\overline{u}_m(t)}{2i}\\
\geqslant&|u_m(t+\tau)|^{2\sigma+2}+|u_m(t)|^{2\sigma+2}-|u_m(t+\tau)|^{2\sigma+1}\\
&\cdot|u_m(t)|-|u_m(t)|^{2\sigma+1}|u_m(t+\tau)|\geqslant 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&|\mu I_2|\leqslant 2|\mu||u_m(t)|[\sigma|u_m(t+\tau)|^{\sigma}|u_m(t+\theta,\tau)|^{\sigma-1}\\
&|u_m'(t+\theta_1\tau)|+\sigma|u_m(t)|^{\sigma}|u_m'(t+\theta_2\tau)|^{\sigma-1}\\
&u_m'(t+\theta_2\tau)|]|u_m(t+\tau)-u_m(t)|^2\\
\leqslant&4|\mu|\sigma C^{*2\sigma}C_4^2|u_m(t+\tau)-u_m(t)|^2. \qquad (11.26)
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&-\mathrm{Re}(1+i\mu)(|u_m(t+\tau)|^{2\sigma}u_m(t+\tau)-|u_m(t)|^{2\sigma}u_m(t))\\
&\cdot(\overline{u}_m(t+\tau)-\overline{u}_m(t))\leqslant 4|\mu|\sigma C^{*2\sigma}C_4|u_m(t+\tau)-u_m(t)|^2. \qquad (11.27)
\end{aligned}
$$

另外

$$
\begin{aligned}
&|\mathrm{Re}\int_\Omega(\alpha\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(|u_m(t+\tau)|^2u_m(t+\tau))\\
&-\alpha\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(|u_m(t)|^2u_m(t)))\cdot(\overline{u}_m(t+\tau)-\overline{u}_m(t))\mathrm{d}x|\\
\leqslant&|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1\int_\Omega[2|u_m(t+\tau)||\nabla u_m(t+\tau)|\cdot|u_m(t+\tau)\\
&-u_m(t)|^2+|u_m(t+\tau)|^2|\nabla(u_m(t+\tau)-u_m(t))|\\
&\cdot|u_m(t+\tau)-u_m(t)|+(|u_m(t+\tau)|+|u_m(t)|)\\
&|\nabla u_m(t)|\cdot|u_m(t+\tau)-u_m(t)|^2+(|\nabla u_m(t+\tau)|\\
&+|\nabla u_m(t)|)|u_m(t)|\cdot|u_m(t+\tau)-u_m(t)|^2
\end{aligned}
$$

$$+(|u_m(t+\tau)|+|u_m(t)|)|u_m(t)|\cdot|\nabla u_m(t+\tau)$$
$$-u_m(t)||u_m(t+\tau)-u_m(t)|]$$
$$\leqslant|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|[6C^*C_2\|u_m(t+\tau)-u_m(t)\|_4^2$$
$$+\frac{3}{2}C^{*2}\|\nabla(u_m(t+\tau)-u_m(t))\|^2$$
$$+\frac{3}{2}C^{*^2}\|u_m(t+\tau)-u_m(t)\|^2]$$
$$\leqslant3|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|\cdot[(2C^*C_2K_2^2+\frac{1}{2}C^{*^2})\|u_m(t+\tau)-u_m(t)\|^2$$
$$+(C^*C_2K_3^2+\frac{1}{2}C^{*^2})\|\nabla(u_m(t+\tau)-u_m(t))\|^2].\tag{11.28}$$

类似地有

$$|\mathrm{Re}\int_\Omega(\beta(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla u_m(t+\tau))|u_m(t+\tau)|^2-\beta(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla u_m(t))$$
$$\cdot|u_m(t)|^2)(\overline{u}_m(t+\tau)-\overline{u}_m(t))\mathrm{d}x|$$
$$\leqslant|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|\cdot\left[\left(2C^*C_2K_3^2+\frac{C^{*^2}}{2}\right)\|u_m(t+\tau)-u_m(t)\|^2\right.$$
$$\left.+\left(C^*C_2K_3^2+\frac{C^{*^2}}{2}\right)\|\nabla(u_m(t+\tau)-u_m(t))\|^2\right].\tag{11.29}$$

从不等式(11.27)—(11.29)得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_m(t+\tau)-u_m(t)\|^2\leqslant-\|\nabla[u_m(t+\tau)-u_m(t)]\|^2$$
$$+\rho\|u_m(t+\tau)-u_m(t)\|^2+4|\mu|\sigma C^{*^{2\sigma}}C_4\|u_m(t+\tau)$$
$$-u_m(t)\|^2+(3|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)\cdot\left[\left(2C^*C_2K_3^2+\frac{C^{*^2}}{2}\right)\right.$$
$$\|u_m(t+\tau)-u_m(t)\|^2+\left(C^*C_2K_3^2+\frac{C^{*^2}}{2}\right)$$
$$\|\nabla(u_m(t+\tau)-u_m(t)\|^2]+\|f(t+\tau)-f(t)\|$$
$$\|u_m(t+\tau)-u_m(t)\|^2$$
$$\leqslant-\frac{1}{K_4}\left[1-(3|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1|+|\beta\boldsymbol{\lambda}_2|)\left(C^*C_2K_3^2+\frac{C^{*2}}{2}\right)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot \| u_m(t+\tau)-u_m(t) \| \; \| \nabla (u_m(t+\tau)-u_m(t)) \| \\
&+ K_4[\rho+4|\mu|\sigma C^{*^{2\sigma}} C_4 + C_3(|\alpha\lambda_1| \\
&+ |\beta\lambda_2)(2C^* C_2K_2 + \frac{1}{2}C^{*^2})] \\
&\cdot \| u_m(t+\tau)-u_m(t) \| \cdot \| \nabla (u_m(t+\tau)-u_m(t)) \| \\
&+ K_4 \| f(t+\tau)-f(t) \| \; \| \nabla (u_m(t+\tau)-u_m(t)) \|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\leqslant \{ K_4\varepsilon - \Big[& \frac{1}{K_4}\Big(1-(3|\alpha\lambda_1|+|\beta\lambda_2|)\Big(C^* C_2K_3^2+\frac{C^{*^2}}{2}\Big)\Big) \\
& - K_4((\rho+4|\mu|\sigma C^{*^{2\sigma}} C_4 + (3|\alpha\lambda_1|+|\beta\lambda_2|) \\
& \cdot \Big(2C^* C_2K_3^2+\frac{C^{*^2}}{2}\Big)\Big)\Big] \\
& \cdot \| u_m(t+\tau)-u_m(t) \| \} \cdot \| \nabla (u_m(t+\tau)-u_m(t) \| .
\end{aligned}
$$

因此,选取参数 α,β,ρ,μ 充分小,使得不等式(Δ)成立,令

$$
\begin{aligned}
J = K_4^2(\rho+4|\mu|\sigma C^{*^{2\sigma}} C_4 + (3|\alpha\lambda_1|+|\beta\lambda_2|)(2C^* C_2K_3^2 \\
+\frac{C^{*^2}}{2})) + (3|\alpha\lambda_1|+|\beta\lambda_2|)(C^* C_2K_3^2+\frac{1}{2}C^{*^2}),
\end{aligned}
$$

则由 $u_m(-\infty)=0$ 和反证法可得

$$
\| u_m(t+\tau)-u_m(t) \| \leqslant \frac{K_4^2}{1-J}\varepsilon, \; \forall \tau \in E\{\varepsilon, f\}.
$$

因此,$u_m(t)$ 为几乎周期函数,这就完成定理 11.9 的证明.

参 考 文 献

[1] C. David, Leveromore, M. Oliver, The complex Ginzburg-Landau equation as a model problem, "Dynamical systems and probabilistic methods in partial differential equations", Lectures in Applied Mathematics, Vol. 31, 1984, edited by P. Deift, C. D. Leveromore, C. E. Wagne.

[2] J. Ginibre, G. Velo, The Cauchy problem in local spaces for the complex Ginzburg-Landau equation, I, Compactness methods, Phys. D, 95, 1996, 191—228.

[3] M. V. Bartnccelli, J. D. Gibbon, M. Dlivr, Length scales in solutions of complex Ginbzurg-Landau equation, Phys. D. 89, 1996, 267—286.

[4] I. Kukavica, Hausdorff length of level sets solutions of the Ginzburg-Landau equation, Nonlinearity, 8, 1995, 113—129.

[5] Guo Boling, Wang Bixiang, Finite dimensional behavior for the derivative Ginzburg-Landau equation, in two spatial dimensions, Phys. D., 89, 1995, 83—99.

[6] Guo Boling, Wang Bixiang, Gevreg regularity and approximate inertial manifolds for the derivative Ginzburg-Landau equation, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2 (3), 1996, 455—466.

[7] Boling Guo, Yongsheng Li, global attractors for the derivative 2d Ginzburg-Landau equation, in an Unbound domain, to appear.

[8] Boling Guo, Rong Yuan, The time-periodic solution of 2d generalized Ginzburg-Landau equation, to appear in J. Math Anal.

[9] Jichang Wu, The in viscid limit of the complex Ginzburg-Landau equation, J. Diff. Eqs. Vol. 142, No. 2, 1998, 413—433.

[10] B. Guo, R. Yuan, Almost pericdic solution of generalized Ginzburg-Landnu equation, prog. Nat. Sci. Vol. 11, No. 7, 2001, 503—515.

[11] T. Kato, Nonlinear Schröinger equations, eds. H. Holden and A. Jensun, Lecture Notes in physics 345 (springer, Berlin, 1989), pp. 218—263.

[12] R. Temam, Infinite-Dimensional, Dynamical Systems in Mechanics and Physics, Springer-Verlag, New York Inc., 1988.

[13] Cao Zhenchao, Guo Boling, Wang Bixiang, Global existence theory for the two-dimensional derivative Ginzburg-Landau equation, Chinese Sci. Bull. 43, 1998, No5. 393—395.

[14] Promislow, K. Time analyticity and Gevreg reqularity to solutions of a class of dissipative partial differential equations, nonlinear Analysis, TMA, 1991, 959—980.

第四章　超导中的 Ginzburg-Landau 方程

在有界区域上发展超导 Ginzburg-Landau 方程的初边值问题的研究,已有不少结果,见文献[1]—[5].他们用 Galerkin 近似和 Leray-Schauder 不动点原理去证明整体解的存在性.至于定常问题在全空间 $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^3$ 的解也已在[6],[7]中用直接方法研究过.

我们在这一章里首先证明 Ginzburg-Landau 方程 Cauchy 问题整体光滑解的存在惟一性,其次研究它的渐近形态——整体吸引子的存在性.最后对于双曲型的 Ginzburg-Landau 方程证明有限能量解的整体存在性,并讨论它的对称涡度解的不稳定性,可参考文献[8]—[11].

§1　Ginzburg-Landau 方程的 Cauchy 问题

现考虑发展超导 Ginzburg-Landau 方程在 $\mathbb{R}^3$ 中的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial t} - i\Phi\psi + (i\nabla + \boldsymbol{A})^2\psi - \psi + |\psi|^2\psi = 0, & (1.1) \\ \mathrm{Cure}^2\boldsymbol{A} = -\dfrac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla\Phi - I(\psi^*\nabla\psi) - |\psi|\boldsymbol{A}, & (1.2) \\ \psi(x,0) = \psi_0(x), \boldsymbol{A}(x,0) = \boldsymbol{A}_0(x), & (1.3) \end{cases}$$

其中 ψ 为复值序参量,ψ^* 是 ψ 的复数共轭,$\boldsymbol{A}$ 是实的向量磁势,Φ 是实的数量电位势,$i=\sqrt{-1}$,$\nabla=\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1},\dfrac{\partial}{\partial x_2},\dfrac{\partial}{\partial x_3}\right)$为梯度算子,$I(\psi^*\nabla\psi)$为 $\psi^*\nabla\psi$ 的虚部.方程(1.1),(1.2)是规范不变的,对于适当光滑的函数 λ,定义

$$\zeta = \psi e^{i\lambda}, \quad Q = \mathbf{A} + \Delta\lambda, \quad \theta = \Phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t}. \tag{1.4}$$

容易看到,如$(\psi, \mathbf{A}, \Phi)$为(1.1)(1.2)的解,则(ζ, Q, θ)也是.为了使定解问题是适定的,我们必须附加一些规范条件,通常有

(a) 库仑规范形

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = 0. \tag{1.5}$$

(b) 洛伦兹规范形

$$\Phi = -\mathrm{div}\mathbf{A}. \tag{1.6}$$

以下我们证明在规范(a)或(b)下,(1.1)—(1.3)存在惟一整体光滑解.

记$L^p = L^p(\mathbb{R}^3)$的模为$|\cdot|_p$, $|\cdot|_{k,p}$为 Sobolev 空间 $W^{k,p} = W^{k,p}(\mathbb{R}^3)$的模, $W^{s,2} = H^s(\mathbb{R}^3)$, $|\cdot|_{k,p,q}$表示空间$L^q(0, T; W^{k,p})$的模, $H_d^k = \{\mathbf{A} \in H^k(\mathbb{R}^3) \mid \mathrm{div}\mathbf{A} = 0\}$.

引理 1.1(Nirenberg-Galiardo 不等式) 对于 $f = f(x) \in W^{k,q}(\mathbb{R}^3)$,有

$$|\nabla^j f|_p \leqslant C |\nabla^k f|_q^\alpha |f|_r^{1-\alpha},$$

其中

$$\frac{1}{p} - \frac{j}{3} = \alpha\left(\frac{1}{q} - \frac{k}{3}\right) + (1-\alpha)\frac{1}{r}, \frac{j}{k} \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

如 $k - j - \left(\frac{3}{q}\right)$为非负整数,则 $\alpha < 1$.

引理 1.2(Sobolev-Hardy-Lifflewood)(见[2]) 对于$g(x) \in L^{p_1}(\mathbb{R}^m)$,则有

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^m} \frac{g(y)}{|x-y|^{m-\alpha}} \mathrm{d}y \right\|_{L^p(\mathbb{R}^m)} \leqslant C \| g \|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^m)},$$

其中

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} - \frac{\alpha}{m} > 0.$$

引理 1.3(见[3]) 存在连续线性算子 $\mathscr{B}$ 在 $L^p(\mathbb{R}^3)$上($\forall 1 < p < \infty$) 使得

$\mathscr{B} f=\nabla(-\Delta)^{-1}\operatorname{div} f, \operatorname{div}\mathscr{B} f=\operatorname{div} f, \forall f\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^3)$,和

$$\|\mathscr{B} f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}\leqslant C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)},$$

对于 $k=1,2,\cdots,\nabla^k(\mathscr{B} f)=\mathscr{B}\nabla^k f, \forall f\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^3)$,更进一步有 $\operatorname{div}\mathscr{B} f=\operatorname{div} f,\quad f\in L^p(\mathbb{R}^3)$.

引理 1.4(见[3]) 存在有界线性算子 $\mathscr{C}: L^p(\mathbb{R}^3)-L^q(\mathbb{R}^3)$,其中 $1<p<3, \frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{1}{3}$,使得

$$\mathscr{C} f=\nabla(-\Delta)^{-1} f, \forall f\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^3)$$

和

$$\|\mathscr{C} f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\leqslant C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)},$$

且对 $k=1,2,\cdots,\nabla^k\mathscr{C} f=\mathscr{C}\nabla^k f, \forall f\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^3)$.事实上,

$$\mathscr{C} f=\nabla(-\Delta)^{-1} f=C\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(x-y)}{|x-y|^3} f(y)\mathrm{d}y, \forall f\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^3),$$

其中 C 为一个绝对常数.更进一步,如 $f\in L^q(\mathbb{R}^3), \operatorname{div} f\in L^p(\mathbb{R}^3)$,则 $\mathscr{C}(\operatorname{div} f)=\mathscr{C} f$.

现证问题(1.1)—(1.3),(1.5)局部解的存在性.

在库仑规范形(1.5)下,方程组(1.1)—(1.3)能写如下形式

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}-\Delta\psi=-i\Phi\psi+2i\boldsymbol{A}\cdot\nabla\psi-|\boldsymbol{A}|^2\psi-(|\psi|^2-1)\psi, \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}-\nabla\boldsymbol{A}=-\nabla\boldsymbol{\Phi}-q(\psi^*\nabla\psi)-|\psi|^2\boldsymbol{A}, \tag{1.8}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0, \tag{1.9}$$

$$\psi(x,0)=\psi_0(x), \boldsymbol{A}(x,0)=\boldsymbol{A}_0(x), x\in\mathbb{R}^3. \tag{1.10}$$

从(1.8)、(1.9)可得

$$\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\Phi}(\psi,\boldsymbol{A})=(-\Delta)^{-1}\operatorname{div}(-q(\psi^*\nabla\psi)+|\psi|^2\boldsymbol{A}). \tag{1.11}$$

定义

$$X_0^k=\{u_0=(\psi_0,\boldsymbol{A}_0)\mid u_0\in H^k\times H_0^k\},$$

具模 $|u_0|_{X_0^k}=|\psi_0|_{k,2}+|\boldsymbol{A}_0|_{k,2}$;

$$X^k(T)=\{u=(\psi,\boldsymbol{A})\mid u\in C([0,T];X_0^k), \nabla u=(\nabla\psi,\nabla\boldsymbol{A})\in L^2(0,T;H^k)\},$$

具模 $\|u\|_{X^k(T)}=\|\psi\|_{k,2,\infty}+\|\nabla\psi\|_{k,2,2}+\|\mathbf{A}\|_{k,2,\infty}+\|\nabla\mathbf{A}\|_{k,2,2}$;

$$Y^k_{(T)}=\{u=(\psi,\mathbf{A})\mid u\in L^2(0,T;W^{k,\frac{3}{2}})\},$$

具模 $\|u\|_{Y^k(T)}=\|\psi\|_{k,\frac{3}{2},2}+\|\mathbf{A}\|_{k,\frac{3}{2},2}$.

对于 $u=(\psi,\mathbf{A})$,定义

$$F_1(u)=i\Phi\psi+2i\mathbf{A}\cdot\nabla\psi-|\mathbf{A}|^2\psi-|\psi|^3,$$

$$F_2(u)=-\nabla\Phi+q(\psi^*\nabla\psi)-|\psi|^2\mathbf{A},$$

$$F(u)=(F_1(u),F_2(u)),G(u)=F(u)+(\psi,0),$$

则方程组(1.7),(1.8),(1.10)等价于

$$u=S(t)u_0+\int_0^t S(t-s)G(u(s))\mathrm{d}s, \tag{1.12}$$

其中 $S(t)=\exp(t\Delta)$.

定义映照 $\mathscr{L}_{w_0}$ 为

$$w^s=\mathscr{L}_{w_0}w=S(t)w_0+\int_0^t S(t-\tau)w(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{1.13}$$

引理 1.5 设 $k\geqslant1,w_0\in H^k$(或 $w_0\in H^k_d$),则 $\mathscr{L}_{W_0}$ 映照 $L^2(0,T;w^{k,\frac{3}{2}})$ 为 $Z^k(T)=\{w\mid w\in C([0,T],H^k),\nabla w\in L^2(0,T;H^k)\}$(或 $Z^k_d=\{w\mid w\in C([0,T],H^k_d);\nabla w\in L^2(0,T;H^k_d)\}$,且

$$\|\mathscr{L}_{w_0}w\|_{k,2,\infty}+\|\nabla\mathscr{L}_{w_0}w\|_{k,2,2}$$
$$\leqslant C\|w_0\|_{k,2}+C(T^{\frac14}+T^{\frac12})\|W\|_{k,\frac32,2}, \tag{1.14}$$

$$\|\mathscr{L}_{w_0}w\|_{k,2,\infty}+\|\nabla\mathscr{L}_{w_0}w\|_{k,2,2}$$
$$\leqslant C\|w_0\|_{k,2}+C(T+T^{\frac12})(\|w\|_{k,2,\infty}+\|\nabla w\|_{k,2,2}). \tag{1.15}$$

证 令 $w(x,t)=S(t)\varphi$ 为线性抛物方程

$$\partial_t w-\Delta w=0,(x,t)\in\mathbb{R}^3\times[0,T],$$
$$w(x,0)=\varphi(x),x\in\mathbb{R}^3$$

的解,标准能量估计得

$$\|S(t)\varphi\|_2^2+\int_0^t\|\nabla S(\tau)\|_2^2\mathrm{d}\tau=\|\varphi\|_2^2.$$

从 L^p-L^q 估计,对 $1<p,q<\infty$得

$$|S(t)\varphi|_{k,q}\leqslant Ct^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}|\varphi|_{k,p},$$

特别有

$$|S(t)\varphi|_2\leqslant Ct^{-\frac{1}{4}}|\varphi|_{\frac{3}{2}},\ |\nabla S(t)\varphi|_2\leqslant Ct^{-\frac{3}{4}}|\varphi|_2,$$

则

$$\left|\int_0^t S(t-\tau)w(\tau)\mathrm{d}\tau\right|_2\leqslant C\int_0^t(t-\tau)^{-\frac{1}{4}}|w(\tau)|_{\frac{3}{2}}\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant Ct^{\frac{1}{4}}\left(\int_0^t|w(\tau)|_{\frac{3}{2}}^{3}\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}}.$$

因此 $\mathcal{G}_{W_0}W\in C([0,t],H^k)$，注意到

$$\int_0^t\left|\nabla\int_0^t S(\tau-s)w(s)\mathrm{d}s\right|_2^2\mathrm{d}s\leqslant C\int_0^t\left\{\int_0^t(\tau-s)^{-\frac{3}{2}}|w(s)|_{\frac{3}{2}}\mathrm{d}s\right\}^2\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant C\left\{\int_0^t|w(s)|_{\frac{3}{2}}^{\frac{4}{3}}\mathrm{d}s\right\}^{\frac{3}{2}}$$

$$\leqslant Ct^{\frac{1}{2}}\int_0^t|w(s)|_{\frac{3}{2}}^{2}\mathrm{d}s,$$

从上面的不等式即得引理.

引理 1.6 设 $k\geqslant1$，则 $F(u)$ 映照 X^k 到 X^k，且

$$|F(u)|_{Y^k}\leqslant C(1+T^{\frac{1}{2}})(|u|_{X^1}+|u|_{X^1}^3)|u|_{X^k},\tag{1.16}$$

$$|F(u_1)-F(u_2)|_{Y^k}\leqslant C(T^{\frac{1}{4}}+T^{\frac{1}{2}})(|u_1|_{X^k}+|u_2|_{X^k}+|u_1|_{X^k}^3+|u_2|_{X^k}^3)|u_1-u_2|_{X^k}.\tag{1.17}$$

证 首先估计 $|\Phi\psi|_{k,\frac{3}{2},2}$，对 $k=0$，

$$|\Phi\psi|_{\frac{3}{2}}\leqslant|\Phi|_3|\psi|_3\leqslant C|\psi|_{1,2}|\nabla\Phi|_{\frac{3}{2}}$$

$$\leqslant C|\psi|_{1,2}\left(|\psi^*\nabla\psi|_{\frac{3}{2}}+||\psi|^2\boldsymbol{A}|_{\frac{3}{2}}\right)$$

$$\leqslant C|\psi|_{1,2}(|\psi|_6|\nabla\psi|_2+|\psi|_6^2|\boldsymbol{A}|_3)$$

$$\leqslant C|\psi|_{1,2}(\nabla|\psi|_2^2+|\nabla\psi|_2^2|\boldsymbol{A}|_{1,2}),$$

因此

$$|\Phi\psi|_{0,\frac{3}{2},2}\leqslant CT^{\frac{1}{2}}|\psi|_{1,2,\infty}^2(|\psi|_{1,2,\infty}+|\psi|_{1,2,\infty}|\boldsymbol{A}|_{1,2,\infty})$$

$$\leqslant CT^{\frac{1}{2}}(|u|_{X^1}^2+|u|_{X^1}^3)|u|_{X^1}.$$

为估计 $|\nabla^k(\Phi\psi)|_{\frac{3}{2}}$,注意到

$$\begin{aligned}
&|\nabla^k[(-\Delta)^{-1}\mathrm{div}(-g(\psi^*\nabla\psi)\psi]|_{\frac{3}{2}}\\
&\quad\leqslant\sum_{b+c\leqslant k}C|\nabla^c\psi|_{\frac{3k}{c}}|\nabla^b((-\Delta)^{-1}\mathrm{div}(\psi^*\nabla\psi))|_{\frac{3k}{2k-c}}\\
&\quad\leqslant C\sum_{\substack{b+c=k\\ b\geqslant 1}}|\nabla^c\psi|_{\frac{3k}{c}}|\nabla^{b-1}(\psi^*\nabla\psi)|_{\frac{3k}{(2k-c)}}\\
&\qquad+C|\nabla^k\psi|_3|(-\Delta)^{-1}\mathrm{div}(\psi^*\nabla\psi)|_3.
\end{aligned}$$

因

$$\begin{aligned}
|\nabla^k\psi(-\Delta)^{-1}\mathrm{div}(\psi^*\nabla\psi)|_{\frac{3}{2}}&\leqslant|\nabla^k\psi|_3|(-\Delta)^{-1}\mathrm{div}(\psi^*\nabla\psi)|_3\\
&\leqslant C|\nabla\psi|_{k,2}^{1-(\frac{1}{2k})}|\nabla\psi|_2^{\frac{1}{2k}}|\psi|_6|\nabla\psi|_2\\
&\leqslant C|\nabla\psi|_{k,2}|\psi|_{1,2}^2,
\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}
|\nabla^k\psi(-\Delta)^{-1}\mathrm{div}(\psi^*\nabla\psi)|_{0,\frac{3}{2},2}&\leqslant C|\psi|_{1,2,\infty}^2|\nabla\psi|_{k,2,2}\\
&\leqslant C|u|_{X^1}^2|u|_{X^k}.
\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{b+c=k\\ b\geqslant 1}}|\nabla^k\psi|_{\frac{3k}{c}}|\nabla^{b-1}(\psi^*\nabla\psi)|_{\frac{3k}{(2k-c)}}\\
&\quad\leqslant C\sum_{\substack{b_1+b_2+c=k\\ b_2\geqslant 1}}|\nabla^c\psi|_{\frac{3k}{c}}|\nabla^{b_1}\psi|_{\frac{6k}{(k+2b_1)}}|\nabla^{b_2}\psi|_{\frac{6k}{(k+2b_2)}}\\
&\quad\leqslant C\sum_{b+c=k}|\nabla^k\psi|_3^{\frac{c}{k}}|\psi|_\infty^{1-(\frac{c}{k})}|\nabla^k\psi|_2^{\frac{b}{k}}|\psi|_6^{2-(\frac{b}{k})}\\
&\quad\leqslant C\sum_{b+c=k}|\nabla\psi|_{k,2}^{\frac{c}{k}}|\nabla\psi|_{1,2}^{1-(\frac{c}{k})}|\psi|_{k,2}^{\frac{b}{k}}|\psi|_{1,2}^{2-(\frac{b}{k})},
\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{b+c=k\\ b\geqslant 1}}|\nabla^c\psi\cdot\nabla^{b-1}(\psi^*\nabla\psi)|_{0,\frac{3}{2},2}\\
&\leqslant C\sum_{\substack{b+c=k\\ b\geqslant 1}}|\nabla\psi|_{k,2,2}^{c/k}|\nabla\psi|_{1,2,2}^{1-(c/k)}|\psi|_{k,2,\infty}^{b/k}|\psi|_{1,2,\infty}^{2-(b/k)}\\
&\leqslant C(|\psi|_{k,2,\infty}+|\nabla\psi|_{k,2,2})(|\psi|_{1,2,\infty}^2+|\nabla\psi|_{1,2,2}^2)
\end{aligned}$$

$$\leqslant C|u|_{X^1}^2|u|_{X^k}.$$

进一步有

$$\begin{aligned}
&|\nabla^k[(-\Delta)^{-1}\mathrm{div}(|\psi|^2\boldsymbol{A})\psi]|_{3/2}\\
&\leqslant C\sum_{a+b=k}|\nabla^a\psi\cdot\nabla^b(-\Delta)^{-1}\mathrm{div}(|\psi|^2\boldsymbol{A})|_{3/2}\\
&\leqslant C\sum_{\substack{a+b=k\\ b\geqslant 1}}|\nabla^a\psi|_{6k/(2k+a)}|\nabla^{b-1}(|\psi|^2\boldsymbol{A})|_{6k/(k+b)}\\
&\quad+C|\nabla^k\psi|_3|(-\Delta)^{-1}\mathrm{div}(|\psi|^3\boldsymbol{A})|_3,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
&|\nabla^k\psi\cdot(-\Delta)^{-1}\mathrm{div}(|\psi|^2\boldsymbol{A})|_{3/2}\leqslant|\nabla^k\psi|_3|(-\Delta)^{-1}\mathrm{div}(|\psi|^2\boldsymbol{A})|_3\\
&\leqslant C|\nabla^k\nabla\psi|_2^{1-(1/2k)}|\nabla\psi|_2^{1/2k}||\psi|^2\boldsymbol{A}|_{3/2}\\
&\leqslant C|\nabla\psi|_{k,2}^{1-(1/2k)}|\nabla\psi|_2^{1/2k}|\psi|_6^2|\boldsymbol{A}|_3\\
&\leqslant C|\nabla\psi|_{k,2}^{1-(1/2k)}|\nabla\psi|_2^{1/2k}|\nabla\psi|_2^2|\boldsymbol{A}|_{1,2}\\
&\leqslant C|\nabla\psi|_{k,2}|\nabla\psi|_2^2|\boldsymbol{A}|_{1,2},
\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}
|\nabla^k\psi\cdot(-\Delta)^{-1}\mathrm{div}(|\psi|^2\boldsymbol{A})|_{0,\frac{2}{3},2}&\leqslant C|\psi|_{1,2,\infty}^2|\boldsymbol{A}|_{1,2,\infty}|\nabla\psi|_{k,2,2}\\
&\leqslant C|u|_{X^1}^3|u|_{X^k},
\end{aligned}$$

进一步有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{a+b=k\\ b\geqslant 1}}|\nabla^a\psi\cdot\nabla^b(-\Delta)^{-1}\mathrm{div}(|\psi|^2\boldsymbol{A})|_{3/2}\\
&\leqslant\sum_{\substack{a+b=k\\ b\geqslant 1}}|\nabla^a\psi|_{6k/(2k+a)}|\nabla^{b-1}(|\psi|^2\boldsymbol{A})|_{6k/(k+b)}\\
&\leqslant C\sum_{\substack{a+b=k\\ b\geqslant 1}}|\nabla^k\psi|_2^{a/k}|\psi|_{1,2}^{1-(a/k)}|\nabla^k(|\psi|^2\boldsymbol{A})|_{3/2}^{b/k}||\psi|^2\boldsymbol{A}|_2^{1-(b/k)}.
\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
&|\nabla^k(|\psi|^2\boldsymbol{A})|_{3/2}\leqslant C\sum_{c+d=k}|\psi|_{k,2}^{c/k}|\psi|_{1,2}^{2-(c/k)}|\nabla\boldsymbol{A}|_{k,2}^{d/k}|\nabla\boldsymbol{A}|_{1,2}^{1-(d/k)},\\
&\quad||\psi|^2\boldsymbol{A}|_2\leqslant|\nabla\boldsymbol{A}|_2|\nabla\psi|_2^2,
\end{aligned}$$

则有

$$\sum_{\substack{a+b=k\\ b\geqslant 1}}|\nabla^a\psi\cdot\nabla^b(-\Delta)^{-1}\mathrm{div}(|\psi|^2\boldsymbol{A})|_{3/2}$$

$$\leqslant C\sum_{\substack{a+b=k\\ b\geqslant 1}}\sum_{c+d=k}|\nabla^k\psi|_2^{a/k}(|\psi|_{k,2}^{c/k}|\nabla \mathbf{A}|_{k,2}^{d/k})^{b/k}|\psi|_{1,2}^{1-(a/k)}$$

$$\cdot(|\psi|_{1,2}^{2-(c/k)}|\nabla\mathbf{A}|_{1,2}^{1-d/k})^{b/k}|\nabla\mathbf{A}|_2^{1-(b/k)}|\nabla\psi|_2^{2(1-b/k)},$$

于是有

$$\sum_{\substack{a+b=k\\ b\geqslant 1}}|\nabla^a\psi\cdot\nabla^b(-\Delta)^{-1}\mathrm{div}(|\psi|^2\mathbf{A})|_{0,3/2,2}$$

$$\leqslant C\sum_{\substack{a+b=k\\ b\geqslant 1}}\sum_{c+d=k}|\psi|_{k,2,\infty}^{(a/k)+(c/k)(b/k)}|\psi|_{1,2,\infty}^{1-(a/k)+(2-(c/k))(b/k)+2(1-(b/k))}$$

$$\times|\mathbf{A}|_{1,2,\infty}^{1-(b/k)}\left(\int_0^T|\nabla\mathbf{A}|_{k,2}^{2(d/k)(b/k)}|\nabla\mathbf{A}|_{1,2}^{2(1-(d/k)(b/k))}\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant C\sum_{\substack{a+b=k\\ b\geqslant 1}}\sum_{c+d=k}|\psi|_{k,2,\infty}^{(a/k)+(c/k)(b/k)}|\nabla\mathbf{A}|_{k,2,2}^{(d/k)(b/k)}$$

$$\times|\psi|_{1,2,\infty}^{1-(a/k)+(2-(c/k))(b/k)+2(1-(b/k))}|\nabla\mathbf{A}|_{1,2,2}^{1-(d/k)(b/k)}$$

$$\leqslant C(|\psi|_{k,2,\infty}+|\nabla\mathbf{A}|_{k,2,2})|u|_{X^1}^3$$

$$\leqslant C|u|_{X^1}^3|u|_{X^k}.$$

由此推之

$$|\Phi\psi|_{k,\frac{3}{2},2}\leqslant C(1+T^{\frac{1}{2}})(|u|_{X^1}+|u|_{X^1}^3)|u|_{X^k}.$$

类似可估计 $F(u)$中的其他项,引理得证.

定理 1.7 设 $k\geqslant 1, u_0\in X_0^k$,则存在 $T_{\max}>0$ 使得方程 $u=\mathscr{L}_{u_0}G(u)$具有惟一解 $u\in X^k(T), T\in[0,T_{\max})$,使得如 $T_{\max}<\infty$,则

$$\overline{\lim_{t\to T_{\max}-0}}|u(t)|_{X_0^1}=\infty.$$

进一步,如 $u_{0n}\in X_0^k, u_{0n}\to u_0$ 依 X_0^k 模$(n\to\infty), T\in(0,T_{\max})$,则 n 充分大时,方程 $u=\mathscr{L}_{u_{0n}}(u)$具有解 $u_n\in X^k(T)$,且 $u_n\to u$ 依 $X^k(T)$模, $n\to\infty$.

证 证明是标准的,由引理 1.5,1.6 和压缩映像定理即得.

为了得到整体解,仅需对问题(1.7)—(1.10)的解 $u=(\psi,\mathbf{A})$ 作$|u|_{X^1}$的一致先验估计.

引理 1.8 设$|\psi_0(x)|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\leqslant 1$,则$|\psi|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\leqslant 1$.

证 定义 $\psi=|\psi|e^{i\theta}, \Omega_t^+=\{x\in\mathbb{R}^3,|\psi(x,t)|>1\}, \chi[0,t]$

表示在$[0,T]$上的特征函数，乘(1.7)以 $w=(|\psi|-1)^+\cdot e^{-i\theta}\cdot\chi_{[0,t]}$，在$\mathbb{R}^3\times[0,T]$上积分，再取实部得

$$\mathrm{Re}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial t}-\Delta\psi+2i\boldsymbol{A}\nabla\psi+|\boldsymbol{A}|^2\psi+(|\psi|^2-1)\psi\right\}w\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$
$$=0.$$

注意到

$$\mathrm{Re}\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial\psi}{\partial t}w=\frac{1}{2}\int_{\Omega_t^+}(|\psi|-1)^2,$$

$$\mathrm{Re}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}(-\Delta\psi+2i\boldsymbol{A}\nabla\psi+|\boldsymbol{A}|^2\psi)(|\psi|-1)^+e^{-i\theta}$$
$$=\mathrm{Re}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla\psi-i\boldsymbol{A}\psi)(\nabla+i\boldsymbol{A})(((|\psi|-1)^+e^{-i\theta})$$
$$=\int_0^t\int_{\Omega_s^+}[|\nabla|\psi||^2+|\psi|(|\psi|-1)|\nabla\theta-\boldsymbol{A}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\geqslant 0,$$

当$|\psi|>1$时，$(|\psi|^2-1)\psi w\geqslant 0$可得

$$\int_{\Omega_t^+}(|\psi|-1)^2\leqslant 0,$$

因此，$|\psi|\leqslant 1,(x,t)\in\mathbb{R}^3\times[0,t]$.

引理 1.9 设引理 1.8 的条件满足，则有

(i) $\int_{\mathbb{R}^3}|\psi(x,t)|^2\mathrm{d}x+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\psi|^3\mathrm{d}x\mathrm{d}s$
$$\leqslant C\left(1+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}|\boldsymbol{A}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right);$$

(ii) $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\int_{\mathbb{R}^3}|\boldsymbol{A}(x,t)|^2\mathrm{d}x+\int_0^T|\boldsymbol{A}|_{1,2}^2\mathrm{d}t\leqslant C;$

(iii) $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\int_{\mathbb{R}^3}|\psi(x,t)|^2\mathrm{d}x+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\psi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C;$

(iv) $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\boldsymbol{A}(x,t)|^2\mathrm{d}x+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla^2\boldsymbol{A}|^2$
$$+|\boldsymbol{A}_t|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C;$$

(v) $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\psi(x,t)|^2\mathrm{d}x+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla^2\psi|^2$
$$+|\psi_t|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C.$$

证 乘(1.7)以 ψ^*，在 $\mathbb{R}^3\times[0,t]$ 上积分，再取实部得

$$\frac{1}{2}|\psi(\cdot,t)|_2^2-\frac{1}{2}|\psi_0|_2^2+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}|\psi|^2(|\psi|^2-1)$$
$$+|\nabla\psi|_{0,2,2}^2+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}|\boldsymbol{A}|^2|\psi|^2+2\mathrm{Re}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}i\psi^*\boldsymbol{A}\nabla\psi=0.$$

从

$$\left|\mathrm{Re}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}2i\psi^*\boldsymbol{A}\cdot\nabla\psi\right|\leqslant 4\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}|\boldsymbol{A}|^2+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\psi|^2$$

可得(ⅰ).

(ⅱ)乘(1.8)以 $\boldsymbol{A}$，在 $\mathbb{R}^3\times[0,t]$ 上积分，利用(1.9)有

$$\frac{1}{2}|\boldsymbol{A}(x,t)|_2^2-\frac{1}{2}|\boldsymbol{A}_0|_2^2+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\boldsymbol{A}|^2$$
$$\leqslant C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}(|\boldsymbol{A}|^2+|\nabla\psi|^2)\leqslant C\left(1+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}|\boldsymbol{A}|^3\right).$$

由 Gronwall 不等式可得(ⅱ).

(ⅲ)联系(ⅰ),(ⅱ)即得(ⅲ)

(ⅳ)乘(1.8)以 $\boldsymbol{A}$，在 $\mathbb{R}^3$ 积分得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\nabla\boldsymbol{A}|_2+|\Delta\boldsymbol{A}|_2^2=\int_{\mathbb{R}^3}\Delta\boldsymbol{A}(I(\psi^*\nabla\psi)-|\psi|^2\boldsymbol{A})$$
$$\leqslant C\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla\psi|^2+|\boldsymbol{A}|^2),$$

由(ⅱ)(ⅲ)即得(ⅳ).

(ⅴ)由(ⅳ)有

$$\int_0^t|\boldsymbol{A}(\cdot,s)|_{L^\infty}^2\mathrm{d}s\leqslant C,$$

乘(1.7)以 ψ^*，在 $\mathbb{R}^3\times[0,t]$ 上积分，再取实部得

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}|\psi_t|^2+\frac{1}{2}|\nabla\psi(\cdot,t)|_2^2-\frac{1}{2}|\nabla\psi_0|_2^2$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\int_0^t|\psi_t(\cdot,s)|_2^2\mathrm{d}s+C\int_0^t|\Phi(\cdot,s)|_2^2\mathrm{d}s$$
$$+C\int_0^t|\boldsymbol{A}(\cdot,s)|_\infty^2|\nabla\psi(\cdot,s)|_2^2\mathrm{d}s+C\int_0^t|\boldsymbol{A}(\cdot,s)|_4^4\mathrm{d}s.$$

注意到

$$|A(\cdot,s)|_4^4\leqslant|A(\cdot,s)|_\infty^2|A(\cdot,s)|_2^2,$$

$$\begin{aligned}|\Phi(\cdot,s)|_2^2&\leqslant2(|\psi\nabla\psi^*|_{6/5}^2+||\psi|^2A|_{6/5}^2)\\&\leqslant2(|\psi|_3^2|\nabla\psi|_2^2+|\psi|_2^2|A|_6^2)\\&\leqslant2|\psi|_2^{4/3}(|\nabla\psi|_2^2+|\nabla A|_2^2),\end{aligned}$$

因此

$$\int_0^t|\Phi(\cdot,s)|_2^2\mathrm{d}s\leqslant C|\psi|_{0,2,\infty}^{4/3}\int_0^t(|\nabla\psi|_2^2+|\nabla A|_2^2).$$

我们有

$$\begin{aligned}&|\psi_t|_{0,2,2}^2+|\nabla\psi|_{0,2,\infty}^2\\&\leqslant C\left(1+\int_0^t(1+|A(\cdot,s)|_\infty^2+|\nabla\psi(\cdot,s)|_2^2)\right).\end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式即得(V),引理证毕.

定理 1.10(库仑规范形) 设 $u_0(x)=(\psi_0(x),A_0(x))\in X_0^k,k\geqslant1$,且$|\psi_0(x)|_{L^\infty}\leqslant1$,则问题(1.7)—(1.10)具有惟一整体解 $u=(\psi,A)$满足

$$u\in X^k(T),\nabla\Phi\in C(0,T;H^{k-1})\cap L^2(0,T;H^k),\quad\forall T\in(0,\infty),\tag{1.18}$$

且$|u|_{X^1}\leqslant C,|\psi(x,t)|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\leqslant1,t\in[0,T]$,其中常数 C 依赖于$|u_0|_{1,2}$和 T.

现考虑洛伦兹规范形(1.6),问题(1.1)—(1.3)变为

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}-\Delta\psi=i\psi\mathrm{div}A-(|\psi|^2-1)\psi-|A|^2\psi-2iA\cdot\nabla\psi,\tag{1.19}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t}-\Delta A=I(\psi^*\nabla\psi)-|\psi|^2A,\tag{1.20}$$

$$\psi(x,0)=\psi_0(x),\quad A(x,0)=A_0(x),\ x\in\mathbb{R}^3.\tag{1.21}$$

我们有

定理 1.11(洛伦兹规范形) 设 $k\geqslant1$, $u_0(x)=(\psi_0(x),A_0(x))\in H^k$, $|\psi_0(x)|_{L^\infty}\leqslant1$,则问题(1.19)(1.20)(1.21)具有惟一整体解 $u=(\psi(x,t),A(x,t))$,满足

$$u\in C(\mathbb{R}^+,H^k),\nabla u=(\nabla\psi,\nabla A)\in L_{\mathrm{loc}}^2(\mathbb{R}^+;H^k),\tag{1.22}$$

且 $|u|_{X^1}\leqslant C$，$|\psi(\cdot,t)|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\leqslant 1$，$t\in[0,T]$，其中常数 C 仅依赖于 $|u_0|_{1,2}$ 和 T.

证 类似于前面的证明可得出定理. 这里给出另一种证明，基于定理 1.10 的结果和规范不变性可得.

令 $\boldsymbol{A}_0^c=\boldsymbol{A}_0-\nabla(\operatorname{div}\Delta^{-1}\boldsymbol{A}_0)$，$\psi_0^c=\psi_0 e^{-i\operatorname{div}\Delta^{-1}\boldsymbol{A}_0}$，由定理 1.10，对问题(1.1)—(1.3)，(1.5)具有惟一整体解$(\psi^c,\boldsymbol{A}^c,\Phi^c)$满足初值$(\psi^c,\boldsymbol{A}^c)|_{t=0}=(\psi_0^c,\boldsymbol{A}_0^c)$，$(\psi^c,\boldsymbol{A}^c)\in X^k(T)$，$\nabla\Phi^c\in C(0,T;H^{k-1})\cap L^2(0,T;H^k)$，且 $|\psi^c(t)|_{L^\infty}\leqslant 1$.

令 λ 为问题

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t}-\Delta\lambda=\Phi^c,$$

$$\lambda|_{t=0}=\operatorname{div}\Delta^{-1}\boldsymbol{A}_0,\ x\in\mathbb{R}^3$$

的解，则 $\nabla\lambda\in(0,T;H^k)$，$\nabla^2\lambda\in L^2(0,T;H^k)$，置 $\psi=\psi^c e^{i\lambda}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^c+\nabla\lambda$，$\Phi=\Phi^c-\left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial t}\right)$，容易验证$(\psi,\boldsymbol{A},\Phi)$为问题(1.19)—(1.21)和(1.6)的解.

§2 Ginzburg-Landau 方程的整体吸引子

我们考虑在瞬时规范 $\psi=-\operatorname{div}\boldsymbol{A}$ 下，Ginzburg-Landau 方程的初边值问题

$$\eta\psi_t-i\eta k\operatorname{div}\boldsymbol{A}\psi+\left(\frac{i}{k}\nabla+\boldsymbol{A}\right)^2\psi-\psi+|\psi|^2\psi=0,\ \Omega\times\mathbb{R}^+,\quad(2.1)$$

$$\boldsymbol{A}_t-\Delta\boldsymbol{A}+\frac{i}{2k}(\psi^*\operatorname{grad}\psi-\psi\operatorname{grad}\psi^*)+|\psi|^2\boldsymbol{A}=0,\qquad(2.2)$$

边界条件

$$\nabla\psi\cdot\boldsymbol{n}=0,\quad\left(\frac{i}{k}\nabla\psi+\boldsymbol{A}\psi\right)\times\boldsymbol{n}=0,\quad\Omega\times\mathbb{R}^+,\qquad(2.3)$$

初始条件

$$\psi(x,0)=\psi_0(x),\ \boldsymbol{A}(x,0)=\boldsymbol{A}_0,\ x\in\Omega,\qquad(2.4)$$

简记 模 $\|\cdot\|_{L^2}=\|\cdot\|$，$\|\cdot\|_{H^{m,p}}=\|\cdot\|_{m,p}$，

$$H_n^1(\Omega)=\{\mathbf{A}\in[H^1(\Omega)]^N \mid \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{n}=0, x\in\partial\Omega\}, \tag{2.5}$$

具模 $(\|\operatorname{div}\mathbf{A}\|^2+\|\nabla\times\mathbf{A}\|^2)^{\frac{1}{2}}, \mathbf{A}\in H_n^1(\Omega)$，模$(\|\operatorname{div}\mathbf{A}\|^2+\|\nabla\times\mathbf{A}\|^2)^{\frac{1}{2}}$等价于模$\|\nabla\mathbf{A}\|$，即有

$$\|u\|\leqslant K_1\|\nabla u\|, \quad u\in H_n^1(\Omega). \tag{2.6}$$

记 $D_A=\dfrac{i}{K}\nabla+\mathbf{A}$，则(2.1)，(2.2)可写成

$$\eta\psi_t-i\eta k\operatorname{div}\mathbf{A}\psi+D_A^2\psi-\psi+|\psi|^2\psi=0, \tag{2.7}$$

$$\mathbf{A}_t-\nabla\mathbf{A}=\frac{1}{2}[\psi^*D_A\psi+\psi(D_A\psi)^*]. \tag{2.8}$$

我们作对时间 t 的一致先验估计.

易见，$\psi,\varphi\in\mathscr{H}^1$(复)，$\mathbf{A}\in H^1$(实)，$D_A$ 满足

$$(D_A^2\psi,\varphi^*)=(D_A\psi,(D_A\varphi)^*), \tag{2.9}$$

$$(D_A\psi)_t=D_A\psi_t+\mathbf{A}_t\psi. \tag{2.10}$$

以下设$|\psi_0(x)|\leqslant 1, x\in\Omega$，它保证了$|\psi(x,t)|\leqslant 1, (x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}^+$.

以 ψ^* 乘(2.7)，分部积分后取实部得

$$\eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\psi\|^2+2\|D_A\psi\|^2-\|\psi\|^2+\|\psi\|_4^4=0. \tag{2.11}$$

以它们的共轭乘(2.7)两边，分部积分得

$$\begin{aligned}&\eta^2\|\psi_t\|^2+\|D_A^2\psi\|^2+\eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|D_A\psi\|^2\\&=\eta(\mathbf{A}_t\psi,(D_A\psi)^*)+\eta(\mathbf{A}_t\psi^*,D_A\psi)\\&\leqslant 2\|D_A\psi\|\|\mathbf{A}_t\|\leqslant\|D_A\psi\|^2+\|\mathbf{A}_t\|^2.\end{aligned} \tag{2.12}$$

以它们自己乘(2.8)两边，分部积分得

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{A}_t\|^2+\|\Delta\mathbf{A}\|^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\|\operatorname{div}\mathbf{A}\|^2+\|\nabla\times\mathbf{A}\|^2]\\&=\frac{1}{4}\int_\Omega[\psi^*D_A\psi+\psi(D_A\psi)^*]^2\mathrm{d}x\leqslant\|D_A\psi\|^2,\end{aligned} \tag{2.13}$$

最后不等式来自$|\psi_0(x)|\leqslant 1, x\in\Omega$，由此可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\|\operatorname{div}\mathbf{A}\|^2+\|\nabla\times\mathbf{A}\|^2+\eta\|\psi\|^2]+\|\mathbf{A}_t\|^2$$

$$+ \| \Delta \boldsymbol{A} \|^2 + \| D_A\psi \|^2 \leqslant C |\Omega|. \tag{2.14}$$

以 $2\psi_t^*$ 乘(2.7),(2.8)以 $\boldsymbol{A}_t$,分部积分后相加得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\| \mathrm{div}\boldsymbol{A} \|^2 + \| \nabla \times \boldsymbol{A} \|^2 + \frac{1}{2} \| \psi \|_4^4 - \| \psi \|^2 + \| D_A\psi \|^2]$$

$$\leqslant -2\eta \| \psi_t \|^2 - 2 \| \boldsymbol{A}_t \|^2 + i\eta k \int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{A}(\psi^* \psi_t - \psi\psi_t^*)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \frac{4k^2}{\eta} \| \mathrm{div}\boldsymbol{A} \|^2 - \eta \| \psi_t \|^2 - 2 \| \boldsymbol{A}_t \|^2. \tag{2.14$_1$}$$

注意到

$$\| \nabla \boldsymbol{A} \| \leqslant C \| \boldsymbol{A} \|^{\frac{1}{2}} \| \Delta \boldsymbol{A} \|^{\frac{1}{2}} \leqslant C \| \nabla \boldsymbol{A} \|^{\frac{1}{2}} \| \Delta \boldsymbol{A} \|^{\frac{1}{2}},$$

$$\| \mathrm{div}\boldsymbol{A} \|^2 + \| \nabla \times \boldsymbol{A} \| \leqslant C \| \nabla \boldsymbol{A} \|^2,$$

可得

$$\| \mathrm{div}\boldsymbol{A} \|^2 + \| \nabla \times \boldsymbol{A} \|^2 \leqslant K_2 \| \nabla \boldsymbol{A} \|^2,$$

于是由(2.11)—(2.13)和(2.14)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[C\eta \| \psi \|^2 + C_1 \| \nabla \cdot \boldsymbol{A} \|^2 + \| \nabla \times \boldsymbol{A} \|^2 + \frac{1}{2} \| \psi \|_4^4$$

$$- \| \psi \|^2 + \| D_A\psi \|^2\Big] + C_2[C\eta \| \psi \|^2 + C_1 \| \nabla \cdot \boldsymbol{A} \|^2$$

$$+ \| \nabla \times \boldsymbol{A} \|^2 + \frac{1}{2} \| \psi \|_4^4 - \| \psi \|^2 + \| D_A\psi \|^2]$$

$$+ C_3[\eta \| \psi_t \|^2 + \| \boldsymbol{A}_t \|^2] \leqslant C |\Omega|. \tag{2.15}$$

由 Gronwall 不等式得

$$[C\eta \| \psi \|^2 + C_1 \| \nabla \cdot \boldsymbol{A} \|^2 + \| \nabla \times \boldsymbol{A} \|^2$$

$$+ \frac{1}{2} \| \psi \|_4^4 - \| \psi \|^2 + \| D_A\psi \|^2]$$

$$\leqslant e^{-C_2 t}[C\eta \| \psi_0 \|^2 + C_1 \| \nabla \boldsymbol{A}_0 \|^2 + \| \nabla \times \boldsymbol{A}_0 \|^2$$

$$+ \frac{1}{2} \| \psi_0 \|_4^4 - \| \psi_0 \|^2 + \| D_A\psi_0 \|^2]$$

$$+ C |\Omega| (1 - e^{-C_2 t}). \tag{2.16}$$

选取 t_0 充分大,使得对 $t \geqslant t_0$ 时,有

$$C\eta \| \psi \|^2 + C_1 \| \nabla \cdot \boldsymbol{A} \|^2 + \| \nabla \times \boldsymbol{A} \|^2$$

$$+ \frac{1}{2} \| \psi \|_4^4 - \| \psi \|^2 + \| D_A\psi \|^2 \leqslant C |\Omega|, \tag{2.17}$$

其中常数 C 与初值 $\psi_0, \mathbf{A}_0$ 无关，于是对于 $t \geqslant t_0$，

$$(\|\operatorname{div}\mathbf{A}\|^2 + \|\nabla \times \mathbf{A}\|^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant K_3.$$

注意到

$$\|D_A\psi\| \geqslant \frac{1}{k}\|\nabla\psi\| - \|\mathbf{A}\|,$$

可得

$$\frac{1}{k}\|\nabla\psi\| \leqslant \|D_A\psi\| + \|\mathbf{A}\|,$$

则对 $t \geqslant t_0$ 有

$$\|\nabla\psi\| \leqslant K_4.$$

从(2.15)可得

$$\int_t^{t+1}[\|\psi_t(s)\|^2 + \|\mathbf{A}_t(s)\|^2]\mathrm{d}s \leqslant K_5, t > t_0. \tag{2.18}$$

由此可知

$$B = \{(\psi, \mathbf{A}) \in \mathscr{H}^1 \times H^1 \mid \|\psi\| \leqslant 1, \|\nabla\psi\|$$

$$\leqslant K_4, (\|\nabla \cdot \mathbf{A}\|^2 + \|\nabla \times \mathbf{A}\|^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant K_3\}$$

为方程(2.7),(2.8)在 $\mathscr{H}^1 \times H^1$ 中的吸收集. 为了证明 B 的 w 极限集是问题(2.7),(2.8)在 $\mathscr{H}^1 \times H^1$ 中, $\|\psi\| \leqslant 1$的吸引子，必须证明吸收集的紧性. 注意到

$$(D_A^2\psi, \psi^*) = (D_A\psi, (D_A\psi^*)),$$

$$(D_A^2\psi)_t = D_A^2\psi_t + D_A(\mathbf{A}_t\psi) + \mathbf{A}_t D_A\psi,$$

(2.7)对 t 微分，再乘以 ψ_t^*，分别积分后再取实部得

$$\frac{\eta}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\psi_t\|^2 - \eta k \operatorname{Im}\int(\operatorname{div}\mathbf{A}_t)\psi\psi_t^*\mathrm{d}x + \|D_A\psi_t\|^2$$

$$+ \int \mathbf{A}_t\psi(D_A\psi_t)^*\mathrm{d}x + \int(D_A\psi)(\mathbf{A}_t\psi_t)^*\mathrm{d}x$$

$$- \|\psi_t\|^2 + \int |\psi|^2 |\psi_t|^2\mathrm{d}x \leqslant 0. \tag{2.19}$$

由此可得

$$\frac{\eta}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\psi_t\|^2 + \|D_A\psi_t\|^2 + \int |\psi|^2 |\psi_t|^2\mathrm{d}x \leqslant \|\psi_t\|^2$$

$$+\eta k \|\nabla \mathbf{A}_t\| \|\psi_t\| - \int \mathbf{A}_t\psi(D_A\psi_t)^* \mathrm{d}x$$
$$-\int (D_A\psi)(\mathbf{A}_t\psi_t)^* \mathrm{d}x. \tag{2.20}$$

(2.8) 对 t 微分,乘以 $\mathbf{A}_t$,分部积分得

$$\frac{\eta}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\mathbf{A}_t\|^2 + \|\nabla \mathbf{A}_t\|^2 = -\operatorname{Re}\int (D_A\psi)^*(\mathbf{A}_t\psi_t)\mathrm{d}x$$
$$-\operatorname{Re}\int (\mathbf{A}_t\psi)^*(D_A\psi_t + \mathbf{A}_t\psi)\mathrm{d}x$$
$$\leqslant \|D_A\psi\| \|\mathbf{A}_t\psi_t\| + \|\mathbf{A}_t\psi\| \|D_A\psi_t\| - \|\mathbf{A}_t\psi\|^2. \tag{2.21}$$

由此可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\mathbf{A}_t\|^2 + \|\nabla \mathbf{A}_t\|^2 + \|\mathbf{A}_t\psi\|^2 \leqslant \|D_A\psi\| \|\mathbf{A}_t\psi_t\|$$
$$+ \|\mathbf{A}_t\psi\| \|D_A\psi_t\|, \tag{2.22}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\eta\|\psi_t\|^2 + \|\mathbf{A}_t\|^2] + \|D_A\psi_t\|^2 + \|\nabla \mathbf{A}_t\|^2 + \|\mathbf{A}_t\psi\|^2$$
$$\leqslant C(\|\mathbf{A}_t\|^2 + \|\psi_t\|^2). \tag{2.23}$$

由一致 Gronwall 不等式和(2.23)可得

$$\|\mathbf{A}_t\| \leqslant K_6, \quad \|\psi_t\| \leqslant K_6, \quad t>1, \tag{2.24}$$

由此推得 H^2 模的有界性

$$\|\mathbf{A}\|_{H^2} \leqslant K_7, \quad \|\psi\|_{H^2} \leqslant K_7, \quad t>1, \tag{2.25}$$

令半群 $S(t)$ 为

$S(t): \mathscr{H}^1 \times H^1 \to \mathscr{H}^1 \times H^1$,

使得 $S(t)(\psi_0, \mathbf{A}_0) = (\psi(t), \mathbf{A}(t))$,其中$(\psi(t), \mathbf{A}(t))$是问题(2.7),(2.8)具初值$(\psi_0, \mathbf{A}_0)$的解,由 Sobolev 嵌入定理可知,$\bigcup_{t>1} S(t)B$ 在 $\mathscr{H}^1 \times H^1$ 中是紧的.且 B 的 ω 极限集

$$\mathscr{A} = \omega(B) = \bigcap_{s\geqslant 0} \bigcup_{t\geqslant s} \overline{S(t)B}$$

为在 $\mathscr{H}^1 \times H^1$ 中,$|\psi| \leqslant 1$ 的吸引子,于是有

定理 2.1 设 $|\psi_0(x)| \leqslant 1, x \in \Omega$,在瞬时规范 $\Phi = -\operatorname{div}\mathbf{A}$ 下,问题(2.7),(2.8)在 $\mathscr{H}^1 \times H^1$ 中具有吸引子.

现估计吸引子 $\mathscr{A}$ 的维数,令 $u(t) = (\psi(t), \mathbf{A}(t))$, $u(0) =$

$(\psi(0), \mathbf{A}(0))$,(2.7),(2.8)的变分方程为

$$V_t + L(u)V = 0, \quad V(x,0) = V_0(x), \quad (x,t) \in R \times R^+, \tag{2.26}$$

具初值

$$V(x,0) = V_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.27}$$

其中 $V = (\varphi, \boldsymbol{E}), L(u)V = (L_1, L_2)$,

$$L_1 = ik(\nabla \cdot \mathbf{A})\varphi - ik(\nabla \cdot \boldsymbol{E})\psi + \frac{1}{\eta}[D_A^2\varphi - \frac{i}{k}\nabla(\boldsymbol{E}\psi) + \frac{i}{k}\boldsymbol{E} \cdot \nabla\psi + 2\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{E}\psi - \varphi + |\psi|^2\varphi + 2\psi^2\varphi^* + 2|\psi|^2\varphi], \tag{2.28}$$

$$L_2 = \frac{1}{2}[\varphi^* D_A\psi + \psi^* D_A\varphi + \varphi D_A\psi^* + \psi D_A^*\varphi + \boldsymbol{E}\psi^*]. \tag{2.29}$$

容易看到,当 $V_0(x) \in \mathscr{H}^1 \times H^1$ 时,存在问题(2.26)的惟一整体解,使得

$$V(x,t) \in L^\infty([0,\infty); \mathscr{H}^1 \times H^1) \cap L^\infty((0,\infty); \mathscr{H}^2 \times H^2).$$

以 $V_i(t)$表示(2.26)具初值 $V_i(0) = \xi_i (i = 1,2,\cdots,N)$的解,$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_N \in L^2$ 为线性无关,$Q_N(t)$表示由 L^2 到 $V_1(t)$,$V_2(t), \cdots, V_N(t)$所张成的子空间上的正交投影,令

$$q_N = \lim_{t\to\infty} \sup_{u_0 \in \mathscr{A}} \left(\sup_{\substack{\xi_i \in L^2 \\ |\xi_i| = 1}} \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{Tr}(L(u(s))Q_N(s))\mathrm{d}s \right),$$

其中 Tr 表示算子的迹,为了估计整体吸引子 $\mathscr{A}$ 的维数,我们需要如下引理

引理 2.2[14] 设 $\mathscr{A}$ 为问题(2.7),(2.8)的整体吸引子,$q_N > 0$(对某个 N),则 $\mathscr{A}$ 的 Hausdorff 维数

$$\mathrm{d}_H(\mathscr{A}) \leqslant N,$$

$\mathscr{A}$ 的分形维数

$$\mathrm{d}_F(\mathscr{A}) \leqslant N\left(1 + \max_{1\leqslant j\leqslant N} - \left(\frac{q_j}{q_N}\right)\right).$$

引理 2.3[14] （广义 Sobolev-Leib-Thirring 不等式） 设 $\Phi_j(1\leqslant j\leqslant N)\in H^m(\Omega)$，在 L^2 中正交，对几乎一切 $x\in\Omega$，令

$$\rho(x)=\sum_{j=1}^{N}|\Phi_j(x)|^2,$$

则对任何 p

$$1<p\leqslant 1+\frac{1}{2m},$$

存在常数 K 使得

$$\left(\int\rho(x)^{\frac{p}{p-1}}\mathrm{d}x\right)^{2m(p-1)}\leqslant K\sum_{j=1}^{N}\int|D^m\Phi_j|^2\mathrm{d}x,$$

其中常数 K 依赖于 m 和 p，但不依赖于 Φ_j 和 N.

现估计 $\mathrm{Tr}(L(u)Q_N(t))$，设 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_N\in\mathscr{H}^2\times H^2$ 为 $\{V_1(t),V_2(t),\cdots,V_N(t)\}\subset\mathscr{H}^2\times H^2$ 子空间的标准正交基，则有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}(L(u)Q_N(t))=\sum_{j=1}^{N}(L(u(t))\varphi_j,\varphi_i)\\
\geqslant&\sum_{j=1}^{N}\Big(\frac{1}{\eta k^2}\|\nabla\varphi_j\|^2+\|\nabla\cdot\boldsymbol{E}_j\|^2+\|\nabla\times\boldsymbol{E}_j\|^2\\
&-k\|\nabla\boldsymbol{E}_j\|\|\varphi_j\|-\left(2k+\frac{1}{k\eta}\right)\|\boldsymbol{A}\|_\infty\|\varphi_j\|\|\nabla\varphi_j\|\\
&-\frac{1}{k\eta}\|\boldsymbol{E}_j\|\|\nabla\varphi_j\|-\frac{1}{k\eta}\|\boldsymbol{A}\|_\infty\|\nabla\varphi_j\|\|\varphi_j\|\\
&-\frac{1}{k\eta}\|\boldsymbol{E}_j\|\|\nabla\varphi_j\|_4\|\varphi_j\|_4-\frac{2}{\eta}\|\boldsymbol{A}\|_\infty\|\nabla\varphi_j\|\|\varphi_j\|\\
&-\frac{1}{\eta}\|\boldsymbol{A}\|_\infty^2\|\varphi_j\|^2+\frac{5}{\eta}\|\varphi_j\|^2\\
&-\frac{1}{k}\|\nabla\varphi\|_4\|\varphi_j\|_4\|\boldsymbol{E}_j\|-\frac{1}{k}\|\nabla\varphi_j\|\|\boldsymbol{E}_j\|\\
&-2\|\varphi_j\|_4\|\boldsymbol{A}\|_4\|\boldsymbol{E}_j\|-2\|\varphi_j\|\|\boldsymbol{A}\|_\infty\|\boldsymbol{E}_j\|\\
\geqslant&\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{\eta k^2}\|\nabla\varphi_j\|^2+\|\nabla\cdot\boldsymbol{E}_j\|^2+\|\nabla\times\boldsymbol{E}_j\|^2\right)\\
&-C\left(\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{\eta k^2}\|\varphi_j\|^2+\|\boldsymbol{E}_j\|^2\right)\right).
\end{aligned}$$

令 $\rho(x)=\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{\eta k^2}\|\Phi_j\|^2+\|E_j\|^2\right)$，由引理2.3，$N=3$，有

$$\int\rho(x)^{\frac{3}{5}}\mathrm{d}x\leqslant k_1\left\{\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{\eta k^2}\|\nabla\Phi_j\|^2\right.\right.$$
$$\left.\left.+\|\nabla\cdot E_j\|^2+\|\nabla\times E_j\|^2\right)\right\},$$

且

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}(u(t)Q_N(t))\\
&\geqslant\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{\eta k^2}\|\nabla\varphi_j\|^2+\|\nabla\cdot E_j\|^2+\|\nabla\times E_j\|^2\right)\right.\\
&\quad-C\int\rho(x)\mathrm{d}x\\
&\geqslant\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{\eta k^2}\|\nabla\varphi_j\|^2+\|\nabla\cdot E_j\|^2+\|\nabla\times E_j\|^2\right)\\
&\quad-C(\eta,k,A_1,A_2,A_3)\\
&=\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{1}{\eta k^2}(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_N)+\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_N\right]\\
&\quad-C(\eta,k,A_1,A_2,A_3),
\end{aligned}$$

其中 $\lambda_i,\mu_i(i=1,2,\cdots,N)$分别表示算子 Δ 在 $\mathscr{H}$ 和 H_n^1 中的特征值，选取 N_0 充分大，使得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}(L(u)Q_N(t))\\
&\geqslant\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{1}{\eta k^2}(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_N)+\mu_1+\cdots+\mu_N\right]\\
&\quad-C(\eta,k,A_1,A_2,A_3)\geqslant 0.
\end{aligned}\tag{2.30}$$

由[14]有关定理知，它的 Hausdorff 维数，分形维数有界于

$$d_H(\omega(B))\leqslant N_0,\quad d_F(\omega(B))\leqslant 2N_0.\tag{2.31}$$

定理证毕.

§3 双曲型 Ginzburg-Landau 方程

考虑双曲型Ginzburg-Landau方程也称为Maxwell-Higgs方

程组的 Cauchy 问题,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -j^\nu, \tag{3.1}$$

$$D_\mu D^\mu \varphi - \frac{\lambda}{2}(|\varphi|^2 - 1)\varphi = 0, \tag{3.2}$$

其中变元 t 为 x^0,空间变元为 $x_j, j=1,2,3, \partial^\mu = \partial_{x^\mu}$, x^μ 为在 Minkowski 空间$(\mathbb{R}^{1+3}, g_{\mu\nu})$的坐标;$\mu, \nu = 0,1,2,3; i, j = 1,2,3$, $(g_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$, $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $j^\nu = \mathrm{Im}(\varphi\overline{D^\nu\varphi})$, $D_\mu = \partial_\mu + \sqrt{-1}A_\mu$ 为对任何空间,时间变元的协变导数,A_μ 为电磁场势,φ 为复值函数,为 Higgs 场的序参量,χ 为 Ginzburg-Landau 常数,为简单计设 $\lambda = 1$.

我们分解电磁场 $F_{\mu\nu}$为它的电场、磁场分量;

$$E_i = F_{0i}, H_i = {}^*F_{0i} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F^{jk},$$

其中$^*F$ 为F 的 Hodge 对偶,$^*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$.

给定函数 $\varphi(x,t)$,定义它的空间梯度$\nabla\varphi = (\partial_i\varphi)_{i=1,2,3}$, $\partial\varphi = (\partial_0\varphi, \nabla\varphi)$为全时空梯率,以$\Box$表示 D'Alembert 算子,

$$\Box = -\partial_t^2 + \Delta = -\partial_t^2 + \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2.$$

容易看到,系统(3.1),(3.2)具有总能量守恒,

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(0),$$

其中

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2}\int_{R^3}(E^2 + H^2 + |D_0\varphi|^2 + \sum_i |D_i\varphi|^2 + \frac{1}{4}(|\varphi|^2 - 1)^2)\mathrm{d}x.$$

Ginzburg-Landau 方程是规范不变的,对于适当光滑函数 χ,定义

$$\psi = \varphi e^{\sqrt{-1}\chi}, B_\mu = A_\mu + \partial_\mu\chi.$$

易知,若(φ, A)为方程组(3.1),(3.2)的解,则(ψ, B)也是.为使定解问题适定,我们必须增加规范条件

(i)库仑规范形

$$\nabla^i A_i = 0. \tag{3.3}$$

(ⅱ)瞬时规范形

$$A_0=0. \tag{3.4}$$

事实上,如果在库仑规范下,有限能量的解存在,则在适当的规范变换下,我们可以得到瞬时规范下同样的结果.因此,我们仅需考虑库仑规范(3.3),由此和[15]的结果,我们得到方程(3.1),(3.2),(3.3)Cauchy 问题的局部性古典解的存在性.

在[15]中,Eardley 和 Moncrief 得到了 Yang-Mills-Miggs 方程具瞬时规范下整体光滑解的存在性.这里我们利用 Klainerman 等的方程得到方程(3.1),(3.2)和(3.3)(或(3.4),有限能量解的整体解的存在性.

在库仑规范下,方程组(3.1)—(3.3)能写成如下形式:

$$\Box A_i=-P\,\mathrm{Im}(\varphi\overline{D_i\varphi}), \tag{3.5}$$

$$D^\mu D_\mu\varphi-\frac{1}{2}(|\varphi|^2-1)\varphi=0, \tag{3.6}$$

$$\Delta A_0=-\mathrm{Im}(\varphi\cdot\overline{D_0\varphi}), \tag{3.7}$$

其中 P 表示在散度场上的投影算子,即对任何场 B,

$$PB=(-\Delta)^{-1}(\nabla\times(\nabla\times B)).$$

由 $\nabla\partial^0A_0=0$,方程(3.1)可写(3.5).

考虑初始条件

$$A(0,x)=a_{(0)}(x),\partial_tA(0,x)=a_{(1)}(x), \tag{3.8}$$

$$\varphi(0,x)=\varphi_{(0)}(x),\partial_t\varphi(0,x)=\varphi_{(1)}(x). \tag{3.9}$$

$$\mathrm{div}a_{(0)}(x)=\mathrm{div}a_{(1)}(x)=0. \tag{3.10}$$

注意到由方程(3.6)推出

$$\partial^\mu\mathrm{Im}(\varphi\cdot\overline{D_\mu\varphi})=0. \tag{3.11}$$

事实上

$$\begin{aligned}\partial^\mu\mathrm{Im}(\varphi\overline{D_\mu\varphi})&=\mathrm{Im}(\partial_\mu\varphi\overline{D_\mu\varphi}+\varphi\overline{\partial^\mu D_\mu\varphi})\\&=\mathrm{Im}(\partial^\mu\varphi\overline{D_\mu\varphi}+\varphi\overline{(-\sqrt{-1}A_\mu D_\mu\varphi)})\\&=\mathrm{Im}(\partial^\mu\varphi\overline{D_\mu\varphi}+\sqrt{-1}A^\mu\varphi\overline{D_\mu\varphi})=0.\end{aligned}$$

由(3.11)可得

$$\Box\partial^i A_i = 0. \tag{3.12}$$

由方程(3.12),如初值 $a_{(0)}$ 和 $a_{(1)}$ 为散度自由形式,则方程(3.3)对一切时间 t 自动满足.

引入能量模

$$\mathscr{F}(A,\varphi)(t) = \|\partial A\|_{L^2} + \|\varphi\|_{L^2} + \|\partial\varphi\|_{L^2} + \frac{1}{4}\int(|\varphi|^2-1)^2\mathrm{d}x.$$

可得如下结果:

定理 3.1 考虑一般初值 $a_{(0)}, a_{(1)}, \varphi_{(0)}$ 和 $\varphi_{(1)}$ 在方程(3.8)—(3.10)中,使得

$$\mathscr{F}_0 = \|\nabla a_{(0)}\|_{L^2} + \|a_{(1)}\|_{L^2} + \|\nabla\varphi_{(0)}\|_{L^2}^2 + \|\varphi_{(1)}\|_{L^2}$$
$$+ \|\varphi_{(0)}\|_{L^2} + \frac{1}{4}\int(|\varphi_{(0)}|^2-1)\mathrm{d}x$$

为有限,则存在方程(3.5)—(3.7)的惟一广义解,

$$\varphi\in C((0,T];H^1)\cap C^1([0,T];L^2),\quad A_\alpha\in([0,T];\dot{H}^1),$$
$$\partial_\alpha A_\alpha\in C([0,T];L^2),$$

其中 $\dot{H}^1$ 表示齐次 Sobolev 空间,且满足能量不等式

$$\varepsilon(A_0,A,\varphi)\leqslant\mathscr{F}_0.$$

进一步,我们有

(i) $\mathscr{F}(A,\varphi)(t)\leqslant C(1+t)\mathscr{F}_0$,对任何有限区间,$t\in[0,T]$;

(ii) $\int_0^T(\|\Box A(t,\cdot)\|_{L^2} + \|\Box\varphi(t,\cdot)\|_{L^2})\mathrm{d}t < \infty$;

(iii) 如初值具有更高的正则性,$\nabla a_{(0)}\in H^s(\mathbb{R}^3)$, $a_{(1)}\in H^s(\mathbb{R}^3)$, $\varphi_{(0)}\in H^{s+1}(\mathbb{R})^3$, $\varphi_{(1)}\in H^s(\mathbb{R})^3$, s 为正整数, $s>0$,则对任何 $t>0$,有 $A_0(t,\cdot), A(x,t)\in H^{s+1}(\mathbb{R})^3, \partial_t A_0(t,\cdot)$,

$$\partial_t A(t,\cdot)\in H^s(\mathbb{R}^3),\varphi(t,\cdot)\in H^{s+1}(\mathbb{R}^3),\partial_t\varphi(t,\cdot)\in H^s(\mathbb{R}^3).$$

我们这里仅给出这个定理证明的步骤,首先,给出方程(3.5)—(3.7)Cauchy 问题局部古典解的存在性.

命题 3.2 对任何非负 s,令

$$\mathscr{G}_0^s = \|\nabla a_{(0)}\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla a_{(1)}\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} + \|\varphi_{(0)}\|_{H^{s+1}(\mathbb{R}^3)}$$

$$+\ \| \varphi_{(1)} \|_{H^s(\mathbb{R})^3} + \frac{1}{4}\int (|\varphi_{(0)}|^2 - 1)^2 \mathrm{d}x,$$

则存在 $T_0>0$,仅依赖于 g_0^s,和方程(3.5)—(3.10)在$[0,T_0]\times R^3$上的惟一古典解使得如 $g_0^s<\infty, s\geqslant 1$,则

$$\nabla A_0(t,\cdot),\ \nabla A(t,\cdot)\in H^s(\mathbb{R}^3),$$

$$\partial_t A_0(t,\cdot),\ \partial_t A(t,\cdot)\in H^s(\mathbb{R}^3),$$

$$\varphi(t,\cdot)\in H^{s+1}(\mathbb{R}^3), \partial_t\varphi(t,\cdot)\in H^s(\mathbb{R}^3),$$

对 $t\in[0,T_0]$一致成立.更进一步,如 $\mathscr{I}'(t)$为一致有界时,能延拓解至任何区间$[0,T]$($T>T_0$).特别,$\mathscr{I}'(t)$在任何有限区间$[0,T)$是一致有界的,则解是整体的.

先验估计

(i)设 A_0,A,φ 为方程组(3.5)—(3.10)的古典解,$\mathscr{F}_0=\mathscr{F}(0)<\infty$,$\varepsilon(t)=\varepsilon(0)\leqslant\mathscr{F}_0$,由 Sobolev 不等式和某些基本不等式,我们有

$$\mathscr{F}(t)\leqslant C(l+t),$$

其中 C 仅依赖于 $\mathscr{F}_0$.

由基本的位势估计和方程(5.11)可得

(ii)设 $\mathscr{A}_0$ 为方程(3.7)的解,设 $\mathscr{A},\varphi$ 满足

$\mathscr{F}(A,\varphi)(t)<\infty$,则有

(a) $\| \nabla A_0(t,\cdot)\|_{L^2}+\| A_0\varphi(t,\cdot)\|_{L^2}\leqslant C\mathscr{F}(t)$,

(b) $\| \nabla A_0(t,\cdot)\|_{L^3}+\| \partial_t A_0(t,\cdot)\|_{L^3}\leqslant C(1+\mathscr{F}(t))^3$,

(c) $\| A_0(t,\cdot)\|_{L^\infty}\leqslant C\mathscr{F}(t)(1+\| \varphi(t,\cdot)\|_{L^8})$

其中 $\mathscr{F}(t)=\mathscr{F}(A,\varphi)(t)$.类似有

(iii)设 A_0,A,φ 和 A_0',A',φ' 为方程组(3.5)—(3.10)满足假设 $\mathscr{F}(t),\mathscr{F}'(t)=\mathscr{F}(A',\varphi')(t)<\infty, t\in[0,T]$的两个解,

则存在常数 C,仅依赖于 $\mathscr{F}(t)$和 $\mathscr{F}'(t)$使得

(a) $\| \nabla(A_0-A_0')(t,\cdot)\|_{L^2}+\| (A_0\varphi-A_0'\varphi')(t,\cdot)\|_{L^2}$
$\leqslant C\mathscr{F}(A-A',\varphi-\varphi')(t)$,

(b) $\| \nabla(A_0-A_0')(t,\cdot)\|_{L^3}+\| \partial_t(A_0-A')(t,\cdot)\|_{L^3}$
$\leqslant C\mathscr{F}(A-A';\varphi-\varphi')(t)$,

(c) $\| (A-A_0')(t,\cdot)\|_{L^\infty}\leqslant C\mathscr{F}(A-A',\varphi-\varphi')(t)$

$\cdot(1+\|\varphi\|_{L^8})+C\|(\varphi-\varphi')(t,\cdot)\|_{L^8}$.

由能量估计和[16]中的零形式估计有

(iv)设(A_0,A,φ)为方程组(3.5)—(3.10)在$[0,T^*]\times\mathbb{R}^3$是$\mathscr{F}_0$有限的解且满足定理3.1的(i),(ii).

(a)存在$0<T\leqslant T^*$,仅依赖于$\mathscr{F}_0$使得

$$X(T)=\int_0^T(\|\Box A(t,\cdot)\|_{L^2}+\|\Box\varphi(t,\cdot)\|_{L^2})\mathrm{d}t\leqslant 1,$$

(b)存在常数C'仅依赖于$\mathscr{F}_0,T^*$,使得

$$X(T^*)\leqslant C'.$$

类似地有

(v)设(A_0,A,φ)和(A_0',A',φ')为方程组(3.5)—(3.10)满足定理3.1在$[0,T^*]$上假设的两个解.

(a)存在$0<T<T^*$和常数C仅依赖于$\mathscr{F}_0=\mathscr{F}_0(A,\varphi),\mathscr{F}_0'=\mathscr{F}_0(A',\varphi'),X'(T^*)=\int_0^{T^*}(\|\Box A'(t,\cdot)\|_{L^2}+\|\Box\varphi'(t,\cdot)\|_{L^2})\mathrm{d}t$,

$$\begin{aligned}\Delta(T)&=\int_0^T\|\Box(A-A')(t,\cdot)\|_{L^2}\mathrm{d}t\\&\quad+\int_0^T\|(\varphi-\varphi')(t,e)\|_{L^2}\mathrm{d}t\\&\leqslant C\mathscr{F}(A-A',\varphi-\varphi')(0).\end{aligned}$$

(b)存在常数C',仅依赖于$T^*,\mathscr{F}_0,\mathscr{F}_0^1,X(T^*),X'(T^*)$,使得

$$\Delta(T)\leqslant C'\mathscr{F}(A-A',\varphi-\varphi')(0),$$

其中对于波动方程的Strichartz不等式已用.$\frac{1}{2}(|\varphi|^2-1)\varphi$能被估计如下:

$$\int_0^T\|\varphi\|_6^3\mathrm{d}t\leqslant T(\mathscr{F}_0+X(T))^3(\text{由能量估计}),$$

$$\int_0^T\|\varphi\|_{L^2}\mathrm{d}t\leqslant\int_0^T(1+t)\mathscr{F}_0\mathrm{d}t\leqslant CT\left(1+\frac{T}{2}\right)\mathscr{F}_0.$$

(vi)以上估计应用于导数的有限差分近似可得

$$\mathscr{F}^{(1)}(t)=\|\partial A(t,\cdot)\|_{H^1}+\|\varphi(t,\cdot)\|_{H^1}$$

$$+\frac{1}{4}\int(|\varphi|^2-1)^2\mathrm{d}x,$$

在$[0,T^*]$一致有界.

由这些估计,可得方程组(3.5)—(3.10)整体古典解的存在性.

最后,由(ⅲ)和(ⅴ)可得到有限能量解的惟一性.由逼近方法和上述估计,可得有限能量解的整体存在性.

§4 Maxwell-Higgs方程组关于对称涡度的不稳定性

考虑 Maxwell-Higgs 方程

$$\partial^\mu F_{\mu\nu}=-j\nu,\tag{4.1}$$

$$D_\mu D^\mu\phi+\frac{\lambda}{2}(|\phi|^2-1)\phi=0,\tag{4.2}$$

其中,$D_\mu=\partial_\mu-iA_\mu$,$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$,$\mu=0,1,2$,$A_\mu(x)$为电磁场势,$\phi(x)$为 Higgs 场,$F_{0j}$,$j=1,2$,为电场,$-F_{12}$为磁场,$\partial_\mu=\partial_{x\mu}$,

$$j_\mu=\mathrm{Im}(\phi\overline{D_\nu\phi})=-\frac{i}{2}(\phi\overline{D_\nu\phi}-\overline{\phi}D_\nu\phi),\mu=0,1,2,\tag{4.3}$$

能量守恒为

$$\frac{1}{2}\int_R(|F_{\mu\nu}|^2+|D_\mu\phi|^2+\frac{\lambda}{4}(|\phi|^2-1)^2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2.$$

对于定常的 Ginzburg-Landau 方程,

$$\mathrm{Cur}l^2A+\frac{i}{2}[\overline{\phi}D\phi-\phi D\overline{\phi}]=0,\tag{4.4}$$

$$-D^2\phi+\frac{\lambda}{2}(|\phi|^2-1)\phi=0,\tag{4.5}$$

存在一个涡旋数如下

$$\frac{1}{2\pi}\int_{R^2}\nabla\times A=\frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{|x|=N}A\mathrm{d}x.\tag{4.6}$$

这个数具有拓扑 vx,为 Higgs 场的"风数",为一整数.数值计算表明,当$\lambda\leqslant1$时,则对一切涡旋数n,涡旋是稳定的,而当$\lambda>1$,和$|n|\geqslant2$时,则是不稳定的.我们现在给予这个事实以权的证明.

在瞬时规范$A_0=0$下,Maxwell-Higgs 方程组可写成如下形式:

$$[\partial_{tt}-\Delta]A_\nu-\partial_\mu\partial^\mu A_\mu=\frac{i}{2}(\phi\overline{D_\nu\phi}-\overline{\phi}D_\nu\phi) \quad ,(4.7)$$

$$[\partial_{tt}-\Delta]\phi-iA_\mu\partial^\mu\phi-i\partial^\mu(A_\mu\phi)-A_\mu A^\mu\phi+\frac{\lambda}{2}(|\phi|^2-1)\phi=0, \quad (4.8)$$

其中 $\nu,\mu=0,1,2,A_\mu A^\mu=A_0^2,\mu=0;A_\mu A^\mu=-A_\mu^2,\mu\neq0$,我们还可将(4.7),(4.8)写成如下具体形式:

$$\partial_t(\partial_1A_1+\partial_2A_2)=\frac{i}{2}(\phi\overline{\partial_t\phi}-\overline{\phi}\partial_t\phi), \quad (4.9)$$

$$\partial_{tt}(A_k)=\Delta A_k-\partial_k(\partial_1A_1+\partial_2A_2)+\frac{i}{2}(\phi\overline{D_k\phi}-\overline{\phi}D_k\phi), \quad (4.10)$$

$$\partial_{tt}\phi=\Delta\phi-iA_j\partial_j\phi-i\partial_j(A_j\phi)-A_j^2\phi-\frac{\lambda}{2}(|\phi|^2-1)\phi, \quad (4.11)$$

$k=1,2,j$ 从 1 到 2.

现对给定的轴对称涡度 (a,η) 和瞬时规范 $A_0=0$ 下对 Maxwell-Higgs 方程组作线性化,令 $A=a+\varepsilon w,\phi=\eta+\varepsilon\psi$ 代入(4.9),(4.10),(4.11). 再对 ε 作导数,取 $\varepsilon=0$ 可得线性化 Maxwell-Higgs 方程组如下:

$$\partial_t(\partial_1w_1+\partial_2w_2)=\frac{i}{2}\partial_t(\eta\overline{\psi}-\overline{\eta}\psi)=\partial_t(\eta_1\psi_2-\eta_2\psi_1), \quad (4.12)$$

$$\partial_{tt}w_k=\Delta w_k-\partial_k(\partial_1w_1+\partial_2w_2)+\frac{i}{2}(\eta\partial_k\overline{\psi}+\psi\partial_k\overline{\eta}-\overline{\eta}\partial_k\psi-\overline{\psi}\partial_k\eta)-a_k(\eta\overline{\psi}+\overline{\eta}\psi)-|\eta|^2w_k, \quad (4.13)$$

$$\partial_{tt}\psi=\Delta\psi-ia_j\partial_j\psi-iw_j\partial_j\eta-i\partial_j(a_j\psi)-i\partial_j(w_j\eta)-|a|^2\psi-2(a_1w_1+a_2w_2)\eta-\frac{\lambda}{2}\psi(|\eta|^2-1)-\frac{\lambda}{2}\eta(\overline{\eta}\psi+\overline{\psi}\eta). \quad (4.14)$$

注意到 (a,η) 与时间 t 无关,令 $\psi_1=\mathrm{Re}\psi,\psi_2=\mathrm{Im}\psi,\nu=(w_1,w_2,\psi_1,\psi_2)^T$,则线性化方程组(4.13),(4.14)可写成

$$\frac{d^2\nu}{dt^2}=L\nu=-\varepsilon''|_{(a,\eta)}\nu. \quad (4.15)$$

线性算子 L 具有形式

$$
\begin{pmatrix}
\partial_{22}-|\eta|^2 & -\partial_{12} & g_{13}-\eta_2\partial_1 & g_{14}+\eta_1\partial_1 \\
-\partial_{12} & \partial_{11}-|\eta|^2 & g_{23}-\eta_2\partial_2 & g_{24}+\eta_1\partial_2 \\
g_{31}+\partial_1(\eta_2\times & g_{32}+\partial_2(\eta_2\times & \Delta+g_{33} & 2a_j\partial_j-\lambda\eta_2\eta_1 \\
g_{41}-\partial_1(\eta_1\times & g_{42}-\partial_2(\eta_1\times & -2a_j\partial_j-\lambda\eta_2\eta_1 & \Delta+g_{44}
\end{pmatrix},
\tag{4.16}
$$

这里

$$
g_{13}=g_{31}=\partial_1\eta_2-2a_1\eta_1, \qquad g_{14}=g_{41}=-\partial_1\eta_1-2a_1\eta_2,
$$

$$
g_{23}=g_{32}=\partial_2\eta_2-2a_2\eta_1, \qquad g_{24}=g_{42}=-\partial_2\eta_1-2a_2\eta_2,
$$

$$
g_{33}=-\frac{\lambda}{2}(2(\eta_1)^2+|\eta|^2-1)-|a|^2,
$$

$$
g_{44}=-\frac{\lambda}{2}(2|\eta_2|^2+|\eta|^2-1)-|a|^2.
$$

算子 $\partial_l\eta_j\times$作用于函数 f 为$\partial_l(\eta_j f)$, $l=1,2, j=1,2$,

$$
\varepsilon=\int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{1}{2}|\nabla\times A|^2+\frac{1}{2}|D\phi|^2+\frac{\lambda}{8}(|\phi|^2-1)^2\right)
$$

为 Helmnoltz 自由能.

为了得到整个线性化 Maxwell-Higgs 方程组(4.12),(4.13),(4.14)的增长模,充分研究限制问题(1.13),(4.4)而没有约束方程(4.12),这是由于出自如下的考虑.

定义线性算子 Θ

$$
\Theta f=\partial_1 f_1+\partial_2 f_2-\eta_1 f_4+\eta_2 f_3, \tag{4.17}
$$

$f=(f_1(x_1,x_2),f_2(x_1,x_2),f_3(x_1,x_2),f_4(x_1,x_2))$为任何向量值函数.

引理 4.1 设 $L\nu=(l_1(\nu),l_2(\nu),l_3(\nu),l_4(\nu))^T$ 于(4.16)中,则有

$$
\Theta L(\nu)=\partial_1 l_1+\partial_2 l_2-\eta_1 l_4+\eta_2 l_3=0. \tag{4.18}
$$

进一步,如 ν_0 为线性化算子 L 对应于特征值 ω^2 的特征向量($\omega>0$),

$$
L\nu_0=\omega^2\nu_0, \tag{4.19}
$$

则 $\nu_0 e^{\pm\omega t}$ 为整个线性化 Maxwell-Higgs 方程组(4.12),(4.13),(4.14)的一个解.

证 首先注意到如下等式：

$$\partial_k[\Delta A_k-\partial_k(\partial_j A_j)+\frac{i}{2}(\phi\overline{D_k\phi}-\overline{\phi}D_k\phi)]$$

$$=\frac{i}{2}(\partial_k\phi\,\overline{\partial_k\phi}+\phi\partial_k\,\overline{\partial_k\phi}-\partial_k\overline{\phi}D_k\phi-\overline{\phi}D_kD_k\phi)$$

$$=\frac{i}{2}(D_k\phi\,\overline{D_k\phi}+\phi\,\overline{D_kD_k\phi}-\overline{D_k\phi}D_k\phi-\overline{\phi}D_kD_k\phi)$$

$$=\frac{i}{2}(\phi\,\overline{D_kD_k\phi}-\overline{\phi}D_kD_k\phi)$$

$$=\frac{i}{2}\left\{\phi[D_kD_k\phi-\frac{\lambda}{2}(|\phi|^2-1)|\phi|-\overline{\phi}[D_kD_k\phi-\frac{\lambda}{2}(|\phi|^2-1)\phi]\right\},\tag{4.20}$$

其中我们用到了协变导数的定义 $D_k=\partial_k-iA_{k_0}$，令 $A=a+\varepsilon w$，$\phi=\eta+\varepsilon\psi$ 代入(4.20)的两边，对 ε 微分并取值 $\varepsilon=0$ 得

$$\partial_k l_k(\nu)=\frac{i}{2}[\eta(l_3(0)-il_4(0))-\overline{\eta}(l_3(0)+il_4(0))]$$
$$+\frac{i}{2}\psi\overline{[D_kD_h\eta-\frac{\lambda}{2}\eta(|\eta|^2-1)]}$$
$$-\frac{i}{2}\overline{\psi}[D_kD_h\eta-\frac{\lambda}{2}\eta(|\eta|^2-1)],\tag{4.21}$$

其中我们利用了 $L(\nu)$ 为 ε' 的线性化算子这一事实，从定常 Maxwell-Higgs 方程组 $D_jD_j\eta-\frac{\lambda}{2}\eta(|\eta|^2-1)=0$，去掉(4.21)最后一行，可得

$$\partial_k I_k(\nu)=\eta_1 l_4(\nu)-\eta_2 l_3(\nu),\tag{4.22}$$

其中 k 从 1 到 2，因此(4.18)成立.

如 $L\nu_0=\omega^2\nu_0$，$\omega>0$，我们有

$$\begin{aligned}&l_1(\nu_0)=\omega_0^2 w_0^1,\ l_2(\nu_0)=\omega^2 w_0^2,\\&l_3(\nu_0)=\omega^2\psi_0^1,\ l_4(\nu_0)=\omega^2\psi_0^2,\end{aligned}\tag{4.23}$$

其中 $\nu_0=(w_0^1,w_0^2,\psi_0^1,\psi_0^2)^T$，因此 ν_0 满足

$$\partial_1 w_0^1+\partial_2 w_0^2=\eta_1\psi_0^2-\eta_2\psi_0^1.\tag{4.24}$$

因此 $\nu_0e^{\pm\omega t}$ 自动满足附加方程(4.12)，由此推出 $\nu_0e^{\omega t}$ 为整个线性化 Maxwell-Higgs 方程组(4.12)，(4.13)，(4.14)的增长模.

现集中研究算子 L 的特征值问题.定义在给定涡度(a,η)线性化能量泛函

$$\langle \xi''(\nu),\nu\rangle=\langle \xi''|_{(a,\eta)}(\nu),\nu\rangle=-L\langle \nu,\nu\rangle. \tag{4.25}$$

为简单计,我们忽略对涡度(a,η)的依赖性,我们期望得到 L 的一对特征值和特征向量,它为泛函$\langle \xi''(\nu),\nu\rangle$的极小,这不是显然的,因为我们仅对$\nabla\times w$ 在极小化序列中能进行控制.

定义正则化泛函

$$\langle \xi_\varepsilon''(\nu),\nu\rangle=\varepsilon\|\nabla w\|_2^2+\langle \xi''(\nu),\nu\rangle=-\langle L_\varepsilon\nu,\nu\rangle \tag{4.26}$$

其中 $L_\varepsilon=L+(\varepsilon\Delta w,0)^T$,我们先寻找一对 ξ_ε'' 的特征值和特征向量作为它的极小,然后再得到原来算子 L 的特征向量$\varepsilon\to 0$.

引理 4.2 设存在 $\nu_1\in H^1(\mathbb{R}^2)$使得$\langle \xi''(\nu_1),\nu_1\rangle<0$,则存在 $\nu_\varepsilon=(w_\varepsilon,\psi_\varepsilon)^T\in H^1(\mathbb{R}^2)$使得对一切 $\varepsilon>0$ 充分小,

$$\langle \xi''(\nu_\varepsilon),\nu_\varepsilon\rangle=\min_{\|\omega\|=1}\langle \xi_\varepsilon''(\nu),\nu\rangle=-\omega_\varepsilon^2<0. \tag{4.27}$$

更进一步,ν_ε 为算子L_ε 对应于特征值ω_ε^2 的特征向量,

$$L_\varepsilon\nu_\varepsilon=\omega_\varepsilon^2\nu_\varepsilon, \tag{4.28}$$

$$\|\nu_\varepsilon\|_{H^1}\leqslant C,\ -\frac{1}{2}\langle \xi''(\nu_1),\nu_1\rangle\leqslant\omega_\varepsilon^2\leqslant C, \tag{4.29}$$

对小的 ε 一致成立.

证 第一步,证明(4.27)和(4.28).

为了证明(4.27),我们分析算子 L 的谱,首先证明当$\|\nu\|_2=1$ 时,$\langle \xi''(\nu),\nu\rangle$具有下界.

$$\begin{aligned}\langle \xi''(\nu),\nu\rangle &= \int_{R^2}\Big[(\partial_1 w_2-\partial_2 w_1)^2+|\eta||w|^2+|\nabla\psi|^2\\ &\quad+\left(|a|^2+\frac{\lambda}{2}(|\eta|^2-1)\right)|\psi|\Big]+2\int_{R^2}\Big[\frac{\lambda}{2}(\eta_1\psi_1+\eta_2\psi_2)^2\\ &\quad+\eta_2\partial_1\psi_1 w_1+\eta_2\partial_2\psi_1 w_2-\eta_1\partial_1\psi_2 w_1-\eta_1\partial\psi_2 W_2\Big]\\ &\quad-2\int_{R^2}[g_{13}\psi_1 w_1+g_{14}\psi_2 w_1+g_{23}\psi_1 w_2+g_{24}\psi_2 w_2],\end{aligned}$$

其中 g_{il}在(4.16)中,$1\leqslant l\leqslant 2$,$1\leqslant j\leqslant 2$,如$\|\nu\|_2=1$,则有

$$\langle \xi''(\nu),\nu\rangle \geqslant \int_{R^2}[(\partial_1 w_2-\partial_2 w_1)^2+|\eta|^2|w|^2 + \frac{1}{2}|\nabla\psi|^2]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 - C, \tag{4.30}$$

其中常数 C 依赖于 λ 和 $\|a\|_{C^1}+\|\eta\|_{C^1}$. 因此对任何 $\varepsilon>0$, $\|\nu\|_2=1$,有

$$\langle \xi_\varepsilon''(\nu),\nu\rangle \geqslant \langle \xi''(\nu),\nu\rangle \geq -C. \tag{4.31}$$

为了研究它的谱,分解算子 $-L_2=I_\varepsilon+K$ 如下,

$$I_\varepsilon=-\begin{pmatrix} \varepsilon\Delta+\partial_{22}-|\eta|^2 & -\partial_{12} & -\eta_2\partial_1 & \eta_1\partial_1 \\ -\partial_{12} & \varepsilon\Delta+\partial_{11}-|\eta|^2 & -\eta_2\partial_2 & \eta_1\partial_2 \\ \partial_1(\eta_2\times & \partial_2(\eta_2\times & \Delta-\lambda|\eta_1|^2 & -\lambda\eta_1\eta_2 \\ \partial_1(\eta_1\times & -\partial_2(\eta_1\times & -\lambda\eta_1\eta_2 & \Delta-\lambda|\eta_2|^2 \end{pmatrix}, \tag{4.32}$$

$$K=-\begin{pmatrix} 0 & 0 & g_{13} & g_{14} \\ 0 & 0 & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & -\frac{\lambda}{2}(|\eta|^2-1)-|a|^2 & 2a_j\partial_j \\ g_{41} & g_{42} & -2a_j\partial_j & -\frac{\lambda}{2}(|\eta|^2-1)-|a|^2 \end{pmatrix}. \tag{4.33}$$

注意到$(I_\varepsilon\nu,\nu)$具有形式

$$\int_{R^2}[|\nabla\times w|^2+\varepsilon|\nabla w|^2+|\eta|^2|w|^2+|\nabla\psi|^2 + \lambda(\eta_1\psi+\eta_1\psi_2)^2+2\int_{R^2}(\eta_2\partial\psi_1 w_1-\eta_1\partial_1\psi_1 w_1 + \eta_2\partial_2\psi_1 w_2-\eta_1\partial_2\psi w_2)$$

$$\geqslant \int_{R^2}(|\nabla\times w|^2+\varepsilon|\nabla w|^2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \geqslant 0. \tag{4.34}$$

我们已用到如下事实

$$\partial|\eta_2\partial_1\psi_1 w_1-\eta_1\partial_1\psi_2 w_1+\eta_2\partial_2\psi_1 w_2-\eta_1\partial_2\psi_2 w_2| \leqslant |\eta|^2|w|^2+|\nabla\psi|^2, \tag{4.35}$$

因此，I_ε 是正的，二阶椭圆型算子的谱位于$[0,\infty)$，另一方面，由涡度的渐近性质[17]，

$$|a|\leqslant C/r,\quad |\nabla\eta|\leqslant C/r, \tag{4.36}$$

且$|\eta|^2-1\to 0$，(指数)，$r\to\infty$，故在 K 中所有系数均趋于零，$r\to\infty$. 因此 K 相对于二阶算子 I_ε 是相对紧的. 由 Weyl 本质谱定理([18]中系 2，p. 113)推出 $L_\varepsilon=I_\varepsilon+K$ 的本质谱位于$[0,\infty)$. 由我们的假设，$\langle\xi''_\varepsilon(\nu_1),\nu_1\rangle<0$，$\varepsilon$ 充分小，因此，由[18]中的定理 8.1，存在 $\omega_\varepsilon>0$，使得

$$-\omega_\varepsilon^2=\inf_{\|\nu\|_2=1}\langle\xi''(\nu),\nu\rangle=(-L_\varepsilon)\text{的最小特征值}, \tag{4.37}$$

由(4.31)$\omega_\varepsilon^2\leqslant C$，对 ε 一致成立. 方程(4.28)成立，$\nu_\varepsilon=(w_\varepsilon,\psi_\varepsilon)^T$ 为相应的特征向量.

第二步，(4.29)的证明.

因 $\nu_1\in H^1$ 且为固定，ε 很小，

$$-\omega_\varepsilon^2\leqslant\langle\xi''_\varepsilon(\nu_1),\nu_1\rangle=\langle\xi''(\nu_1),\nu_1\rangle+\varepsilon\|\nabla w\|_2^2$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\langle\xi''(\nu_1),\nu_1\rangle. \tag{4.38}$$

(4.29)中对 w_ε 的估计来自(4.31)和(4.38). 对于 ν_ε 的估计，我们注意到$\langle\xi_\varepsilon(\nu_\varepsilon),\nu_\varepsilon\rangle=-w_\varepsilon^2$，$\|\nu_\varepsilon\|_2=1$. 从(4.30)和(4.26)有

$$\|\nabla\times w_\varepsilon\|_2+\frac{1}{2}\|\nabla\psi_\varepsilon\|_2+\varepsilon\|\nabla w_\varepsilon\|_2\leqslant C, \tag{4.39}$$

为了得到$\|\nabla\cdot w_\varepsilon\|_2$ 的估计，应用在(4.17)中的算子于 $L_\varepsilon\nu_\varepsilon=L\nu_\varepsilon+\varepsilon(\Delta w_\varepsilon,0)^T=\omega_\varepsilon^2\nu_\varepsilon$ 的两边，得到

$$\varepsilon(\Delta(\nabla\cdot w_\varepsilon))=\omega_\varepsilon^2[\operatorname{div}w_\varepsilon-(\eta_1\psi_{2\varepsilon}-\eta_2\psi_{1\varepsilon})]. \tag{4.40}$$

于此我们用到了引理 4.1. 乘(4.40)两边以 $\operatorname{div}w_\varepsilon$ 再在$\mathbb{R}^2$上积分得

$$\omega_\varepsilon^2\|\operatorname{div}w_\varepsilon\|_2^2\leqslant\omega_\varepsilon^2\|R\|_\infty\|\psi_\varepsilon\|_2\|\operatorname{div}w_\varepsilon\|_2$$
$$-\varepsilon\|\nabla\operatorname{div}w_\varepsilon\|_2^2. \tag{4.41}$$

注意到$\|R\|_\infty=\|\eta\|_\infty\leqslant 1$，我们有

$$\|\operatorname{div}w_\varepsilon\|_2\leqslant\|\psi_\varepsilon\|_2\leqslant 1. \tag{4.42}$$

联合(4.42)和(4.39)即得引理 4.2.

现在 L_ε 中令 $\varepsilon\to 0$，即求得原来问题(4.25)的解决，$\varepsilon=0$.

定理 4.3 设$\langle\xi''(\nu_1),(\nu_1)\rangle<0$，对某个$\nu_1\in H^1(\mathbb{R}^2)$，则存在$\nu_0=(w_0,\psi_0)\in H^1(\mathbb{R}^2)$，$\|\nu_0\|_2=1$，使得

$$L\nu_0=\omega^2\nu_0, \tag{4.43}$$

其中$\omega=\sup\limits_{\varepsilon\to0}\omega_\varepsilon>0$，进一步，$\nu_0e^{\omega t}$为整体线性化 Maxwell-Higgs 方程组(4.12)，(4.13)，(4.14)的增长模.

证 由(4.29)知，$\|\nu_\varepsilon\|_{H^1}\leqslant C$对$\varepsilon$一致成立，$\omega_\varepsilon>0$是随$\varepsilon\to0$而单调增加，选取子序列$\varepsilon_n\to0$使得$\omega=\lim\limits_{n\to\infty}\omega_{\varepsilon_n}$，$\nu_{\varepsilon_n}\to\nu_0=(w_0^1,w_0^2,\psi_0^1,\psi_0^2)^T$在$H^1(\mathbb{R}^2)$中弱收敛，为简单计，仍以$\omega^\varepsilon$，$\nu_\varepsilon$表示相应的子序列，在$L_\varepsilon\nu_\varepsilon=\omega^2\nu_\varepsilon$中，令$\omega\to0$，在分布意义得

$$L\nu_0=\omega^2\nu_0. \tag{4.44}$$

由(4.29)，$\omega>0$.

为证明定理，充分证明$\|\nu_0\|_2=1$，考虑$\|\nu_\varepsilon-\nu_0\|_2$的极限，$\omega_\varepsilon^2\nu_\varepsilon=L_\varepsilon\nu_\varepsilon$减去$\omega^2\nu_0=L\nu_0$得

$$\omega_\varepsilon^2(\nu_\varepsilon-\nu_0)+\nu_0(\omega_\varepsilon^2-\omega^2)=\varepsilon(\Delta\omega_\varepsilon,0)^T+L(\nu_\varepsilon-\nu_0) \tag{4.45}$$

(4.45)两边和$\nu_\varepsilon-\nu_0$作L^2内积得

$$\begin{aligned}\omega_\varepsilon^2\|\nu_\varepsilon-\nu_0\|_2^2\leqslant&(\omega^2-\omega_\varepsilon^2)\|\nu_0\|_2\|\nu_\varepsilon-\nu_0\|_2\\&+\varepsilon\|\nabla w_\varepsilon\|_2\|\nabla(w_\varepsilon-w)\|_2\\&+(L(\nu_\varepsilon-\nu_0),\nu_\varepsilon-\nu_0),\end{aligned} \tag{4.46}$$

注意到$\|\nu_\varepsilon\|_{H^1}$当$\varepsilon\to0$时为一致有界.

$$\begin{aligned}&(\omega_\varepsilon^2-\omega^2)\|\nu_0\|_2\|\nu_\varepsilon-\nu_0\|_2\to0,\\&\varepsilon\|\nabla w_\varepsilon\|_2\|\nabla(w_\varepsilon-w)\|_2\to0.\end{aligned} \tag{4.47}$$

现证$\lim\limits_{\varepsilon\to0}(L(\nu_\varepsilon-\nu_0),\nu_\varepsilon-\nu_0)\leqslant0$，在分解(1.32)，(1.33)和(1.34)中令$\varepsilon=0$，得

$$\begin{aligned}(L(\nu_\varepsilon-\nu_0),\nu_\varepsilon-\nu_0)=&-(I_0(\nu_\varepsilon-\nu_0),\nu_\varepsilon-\nu_0)\\&-(K(\nu_\varepsilon-\nu_0),\nu_\varepsilon-\nu_0)\\\leqslant&-(K(\nu_\varepsilon-\nu_0),\nu_\varepsilon-\nu_0).\end{aligned} \tag{4.48}$$

因$\|\nu_\varepsilon\|_{H^1}$一致有界，则对任何$M>0$，

$$-(K(\nu_\varepsilon-\nu_0),\nu_\varepsilon-\nu_0)=\int\limits_{r\geqslant M}+\int\limits_{r\leqslant M}$$

$$\leqslant C(M)\| \nu_\varepsilon - \nu_0 \|_{H^1} + \int_{r\leqslant M},$$

其中 $C(M)$为 K 的系数的上界,当 $M\to\infty$时,它$\to 0$,因 $\int_{r\leqslant M}\to 0$ 对任何固定的 M,由此推出 $\lim(K(\nu_\varepsilon-\nu_0),\nu_\varepsilon-\nu_0)=0$,先取 $M\to\infty$,再取 $\varepsilon\to 0$,因此从(4.48)有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(L(\nu_\varepsilon-\nu_0),\nu_\varepsilon-\nu_0)\leqslant\lim_{\varepsilon\to 0}-(K(\nu_\varepsilon-\nu_0),\nu_\varepsilon-\nu_0)=0.$$

由(4.29)得 $\omega_\varepsilon^2\geqslant -\frac{1}{2}\langle\xi''(\nu_1),\nu_1\rangle$,因此从(4.46)和(4.47)得 $\|\nu_\varepsilon-\nu_0\|_2\to 0$.

现证当 $r\to\infty$时特征向量 ν_0 的衰减,由此推出扰动 ν_0 具有零的涡旋数.

引理 4.4 (特征函数 ν_0 的衰减) 设 $\chi(x_1,x_2)$为具 k 阶多项式的增长形式的光滑函数.

$$\|\partial^j\chi(x_1,x_2)\|\leqslant C(r^{k-j}+1), \tag{4.49}$$

其中 $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$充分大,$0\leqslant j\leqslant k\in$ [illegible],则

$$\|\chi\nu_0\|_{H^2}<\infty. \tag{4.50}$$

特别,ν_0 的涡旋数为零,即有

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{|x|\leqslant N}\nabla\times w^0=\frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{|x|=N}w^0\mathrm{d}x=0. \tag{4.51}$$

证 我们用归纳法证明(4.50).

第一步,如 $k=0$,充分证明 $\nu_0\in H^2$,注意到 $\|\eta\|_{C^1}+\|a\|_{C^0}\leqslant C$,从 L 的定义有

$$\Delta w_k-\partial_k(\mathrm{div}w)\in L^2,\ \Delta\psi\in L^2. \tag{4.52}$$

另一方面,由引理 4.1,用 Θ 作用(4.44)两边得

$$0=\omega^2[\partial_1 W_0^1+\partial_2 W_0^2-(\eta_1\psi_0^2-\eta_1\psi_0^1)]. \tag{4.53}$$

因此 $\mathrm{div}W_0=\eta_1\psi_0^2-\eta_2\psi_0^1\in H^1$,于是 $\Delta W\in L^2$,由此推出 $\nu_0\in H^2$.

第二步,设(4.50)对一切 χ 满足(4.49),$k\leqslant n$ 成立.现取任何函数 χ 满足(4.49),$k=n+1$,乘(4.44)以 $\chi L\nu_0=\omega^2\chi\nu_0$,分解 L 于(4.32)和(4.33)中,置 $\varepsilon=0$,有 $\chi(-I_0-k)\nu_0=\chi\omega^2\nu_0$ 或

$$I_0(\chi\nu_0)+\omega^2(\chi\nu_0)=-\chi K\nu_0+L_2\nu_0, \tag{4.54}$$

其中 $-L_2=-I_0(\chi\nu_0)+\chi I_0$ 给定如下：

$$\begin{pmatrix} \chi_{22}+2\chi_2\partial_2 & \chi_{12}-\chi_1\partial_2-\chi_2\partial_1 & -\eta_2\chi_1 & \eta_1\chi_1 \\ -\chi_{12}-\chi_1\partial_2-\chi_2\partial_1 & \chi_{11}+2\chi_1\partial_1 & -\eta_2\chi_2 & \eta_1\chi_2 \\ \eta_2\chi_1 & \eta_2\chi_2 & \Delta\chi-2\chi_j\partial_j & 0 \\ -\eta_1\chi_1 & -\eta_1\chi_1 & 0 & \Delta\chi-2\chi_j\partial_j \end{pmatrix}.$$

因 $\|\nabla\chi(x_1,x_2)\|\leqslant C(r^n+1)$，由归纳假设，$L_2\nu_0\in H^1$，由 (4.33)，$\chi K$ 的系数为 n 阶，由归纳假设，$\chi K\nu_0\in H^1$. 乘 $\chi\nu_0$ 于 (4.54)，我们有

$$(I_0(\chi\nu_0),\chi\nu_0)+\omega^2\|\chi\nu_0\|_2^2\leqslant\|-\chi K\nu_0+L_2\nu_0\|_2\|\chi\nu_0\|_2, \tag{4.55}$$

因此 $\chi\nu_0\in L^2$，从 (4.34)，$(I_0(\nu_0),\nu_0)\geqslant\|\nabla\times(\chi\omega_0)\|_2^2+\|\nabla(\chi\psi_0)\|_2^2-C\|\chi\nu_0\|_2^2$，因此 $\chi\psi_0\in H^1$，$\nabla\times(\chi w_0)\in L^2$，另一方面，从(4.24)和(4.43)有

$$\operatorname{div}(\chi w_0)=\chi(\eta_1\psi_0^2-\eta_2\psi_0^1)+\partial_j\chi w_0^j\in H^1, \tag{4.56}$$

其中 $\partial_j\chi w_0^j\in H^2$，由归纳假设得到. 因此，从 (4.55) 和 (4.56)，$\chi\nu_0\in H^1$. 从(4.54)和类似于第一步的原理，可得 $\Delta(\chi\nu_0)\in L^2$，即 $\chi\nu_0\in H^2$.

为证(4.51)，利用 Sobolev 嵌入定理得

$$\lim_{N\to\infty}\int_{r=N}|w_0|\,\mathrm{d}x\leqslant\lim_{N\to\infty}(\sup_{r=N}|rw_0|)\leqslant\lim_{N\to\infty}\|r\nu_0\|_{H^2(r\geqslant N)}=0.$$

为了得到非线性不稳定性，我们证明特征值 ω 控制着线性化 Maxwell-Higgs 方程组的增长率.

定理 4.5(线性化估计)　考虑线性化 Maxwell-Higgs 方程组 (4.12)，(4.13)，(4.14)，

$$\begin{cases}\partial_t(\operatorname{div}w)=\partial_t(\eta_1\psi_2-\eta_2\psi_1),\\ \dfrac{\mathrm{d}^2\nu}{\mathrm{d}t^2}=L\nu,\\ \nu|_{t=0}=\nu(0),\ \nu_t|_{t=0}=\nu_t(0),\end{cases} \tag{4.57}$$

其中 $\nu=(w,\psi)^T$,对任何 $\varepsilon>0$,(4.57)的解

$$\nu(t)=\mathcal{U}(t)(\nu(0),\nu_t(0))$$

满足

$$\begin{aligned}
&\|\nu(t)\|_{H^1}+\|\nu_t(t)\|_2\\
&=\|\mathcal{U}(t)(\nu(0),\nu_t(0))\|_{H^1}+\|\partial_t\mathcal{U}(t)(\nu(0),\nu_t(0))\|_2\\
&\leqslant Ce^{(\varepsilon+\omega)t}(\|\nu(0)\|_{H^1}+\|\nu_t(0)\|_2),
\end{aligned}\tag{4.57$'$}$$

其中 $\omega>0$ 为定理 4.3 中得到的特征值. 常数 C 与 t 无关.

证 我们有如下估计

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{div}w(t)\|_2^2\leqslant 3[&\|\eta_1\psi_2(t)-\eta_2\psi_1(t)\|_2^2\\
&+\|\mathrm{div}w(0)\|_2^2+\|\eta_1\psi_2(0)-\eta_2\psi_1(0)\|_2^2],
\end{aligned}\tag{4.58}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|\nu_t(t)\|_2^2-\frac{1}{2}(L\nu(t),\nu(t))\\
&=\frac{1}{2}\|\nu_t(0)\|_2^2-\frac{1}{2}(L\nu(0),\nu(0)).
\end{aligned}$$

从(4.30)有

$$\begin{aligned}
-(L\nu(t),\nu(t))=(\xi''(\nu(t)),\nu(t))\geqslant\|\nabla\times w(t)\|_2^2\\
+\frac{1}{2}\|\nabla\psi(t)\|_2^2-C\|\nu(t)\|_2^2,
\end{aligned}$$

联合上面的不等式和(4.58)可得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|\nu_t(t)\|_2^2+\frac{1}{4}\|\nabla\nu(t)\|_2^2\leqslant C[&\|\nu(t)\|_2^2\\
&+\|\nu(0)\|_{H^1}^2+\|\nu_t(0)\|_2^2].
\end{aligned}\tag{4.59}$$

另一方面,从(4.27)和(4.59)有,对任何 $\delta>0$,

$$\begin{aligned}
(L\nu,\nu)&=(L_\delta\nu,\nu)+\delta\|\nabla w\|_2^2=\langle\xi''_\delta(\nu),\nu\rangle+\delta\|\nabla w\|_2^2\\
&\leqslant\omega_\delta^2\|\nu(t)\|_2^2+C\delta[\|\nu(t)\|_2^2+\|\nu(0)\|_{H^1}^2+\|\nu_t(0)\|_2^2]\\
&\leqslant(\omega_\delta^2+C\delta)\|\nu(t)\|_2^2+C\delta[\|\nu(0)\|_{H^1}^2+\|\nu_t(0)\|_2^2].
\end{aligned}\tag{4.60}$$

选取 δ 充分小,使得 $\omega_\delta^2+C\delta\leqslant(\omega+\varepsilon)^2$,由(4.60)和(4.58)的第二个方程可得

$$\|\nu_t(t)\|_2^2\leqslant(L\nu,\nu)+C(\|\nu(0)\|_{H^1}+\|\nu_t(0)\|_2^2)$$

$$\leqslant(\omega+\varepsilon)^2\|\nu(t)\|_2^2+C(\|\nu(0)\|_2^2+\|\nu_t(0)\|^2).$$
$$(4.61)$$

因 $\|\nu(t)\|_2\leqslant\int_0^t\|\nu_t(\tau)\|_2\mathrm{d}\tau+\|\nu(0)\|_2$,从(4.61)可得

$$\|\nu_t(t)\|_2\leqslant(\omega+\varepsilon)\int_0^t\|\nu_t(\tau)\|_2\mathrm{d}\tau+C(\|\nu(0)\|_{H^1}+\|\nu_t(0)\|_2. \tag{4.62}$$

从标准的 Gronwall 不等式可得

$$\|\nu(t)\|_2\leqslant Ce^{(\omega+\varepsilon)t}[\|\nu(0)\|_{H^1}+\|\nu_t(0)\|_2], \tag{4.63}$$

定理得证.

下面证明当涡旋数 n 和耦合常数 λ 充分大时,存在 $\nu_1\in H^1$,使得

$$\langle\xi''(\nu_1),\nu_1\rangle<0. \tag{4.64}$$

证明方法基于当 $n,\lambda\to\infty$ 时的渐近分析.

引理 4.6 设 f,h 和 q 为 r,θ 的实函数,令

$$\begin{cases}w=\left(-\dfrac{nf(r,\theta)}{r}\sin\theta+h(r,\theta)\cos\theta,\dfrac{nf(r,\theta)}{r}\cos\theta+h(r,\theta)\sin\theta\right)^T,\\ \psi=q(r,\theta)e^{in\theta},\end{cases} \tag{4.65}$$

则对 $\nu=(w,\psi_1,\psi_2)^T$,$\langle\xi''(\nu),\nu\rangle$ 具有形式

$$\begin{aligned}&\pi\int_0^\infty\left[\frac{1}{r^2}(h_\theta-nf_r)^2+q_r^2+\frac{1}{r^2}q_\theta^2+R^2h^2\right]r\mathrm{d}r\\&\quad+\pi\int_0^\infty\left\{\frac{n^2}{r^2}[q^2(s-1)^2+f^2R^2+4fqR(s-1)]\right.\\&\quad\left.+\frac{\lambda}{2}(3R^2-1)q^2\right\}r\mathrm{d}r,\end{aligned} \tag{4.66}$$

其中轴向对称旋度(a,η)满足

$$a_1\mathrm{d}x_1+a_2\mathrm{d}x_2=nS(r)\mathrm{d}\theta,\eta(r,\theta)=R(r)e^{in\theta}. \tag{4.67}$$

对于任何 $n\in Z,\lambda>0,r=\sqrt{x_1^2+x_2^2},\theta=\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{x_2}{x_1}$.

证 能量泛函为

$$\xi = \int_{R^2}\left[\frac{1}{2}\mid F_{ij}\mid^2 + \frac{1}{2}\mid D_i\phi\mid^2 + \frac{\lambda}{8}(\mid\phi\mid^2 - 1)^2\right],$$

$1 \leqslant i, j \leqslant 2$，从(4.15)有 $\xi''|_{(a,\eta)} = -L$，因此

$$\xi(a + \varepsilon w, \eta + \varepsilon\psi) = \xi(a, \eta) + \varepsilon\langle\xi'(a, \eta), \nu\rangle + \frac{\varepsilon^2}{2}\langle\xi''(\nu), \nu\rangle + O(\varepsilon^3)$$

$$= -\frac{\varepsilon^2}{2}(L^\nu, \nu) + O(\varepsilon^3), \tag{4.68}$$

其中 $\nu = (\omega, \psi)^T$. 我们已用到 $\xi'(a, \eta) = 0$，即(a, η)为 Ginzburg-Landau 方程组的解. 由(4.68)知，为了验证(4.66)，充分地计算扰动能量 $2\varepsilon(a + \varepsilon w, \eta + \varepsilon\psi)$依 ε 展开的二阶项，首先计算 F_{ij}依ε展开. 由(4.65)中对 w 的特殊选取，有

$$F_{12} = \left\{a_1 - \varepsilon\left[\frac{nf}{r}\sin\theta - h\cos\theta\right]\right\}_2 - \left\{a_2 + \varepsilon\left[\frac{nf}{r}\cos\theta + h\sin\theta\right]\right\}_1$$

$$= a_{12} - a_{21} - \varepsilon\left[\frac{nf_2}{r}\sin\theta - h_2\cos\theta\right] - \varepsilon\left[\frac{nf_1}{r}\cos\theta + h_1\sin\theta\right]$$

$$+ \varepsilon\left[\left(\frac{-n}{r}\sin\theta\right)_2 + \left(-\frac{n}{r}\cos\theta\right)_1\right]f + \varepsilon[(\cos\theta)_2 - (\sin\theta)_1]h. \tag{4.69}$$

注意到

$$\left(-\frac{1}{r}\sin\theta\right)_2 + \left(-\frac{1}{r}\cos\theta\right)_1 = 0, \quad (\cos\theta)_2 - (\sin\theta)_1 = 0,$$

我们有

$$F_{12} = a_{12} - a_{21} - \varepsilon\left[\frac{nf_2}{r}\sin\theta - h_2\cos\theta\right] - \varepsilon\left[\frac{nf_1}{r}\cos\theta + h_1\sin\theta\right]$$

$$= a_{12} - a_{21} - \varepsilon\frac{(nf_r - h_\theta)}{r}. \tag{4.70}$$

现考虑 $|D_1\phi|^2 + |D_2\phi|^2$，对 ε 的展开，注意到

$$|D_1\phi|^2 + |D_2\phi|^2 = |\partial_1\phi|^2 + |\partial_2\phi|^2 + |A|^2|\phi|^2 + i\partial_1\phi A_1\overline{\phi} - iA_1\phi\,\overline{\partial_1\phi} + i\partial_2\phi A_2\overline{\phi} - iA_2\phi\,\overline{\partial_2\phi}, \tag{4.71}$$

由于 w, ψ 在(4.65)中的特殊选取，有

$$\phi = (R + \varepsilon q)e^{in\theta}. \tag{4.72}$$

因此,

$$
\begin{aligned}
&|\partial_1\phi|^2+|\partial_2\phi|^2\\
&=|\partial_1[(R+\varepsilon q)e^{in\theta}]|^2+|\partial_2[(R+\varepsilon q)e^{in\theta}]|^2\\
&=|[R+\varepsilon q]_r|^2+\left|\frac{1}{r}[R+\varepsilon q]_\theta\right|^2+\frac{n^2}{r^2}|R+\varepsilon q|^2.
\end{aligned}
\tag{4.73}
$$

对于(4.71)中的交叉项,从(4.72)有

$$
i\partial_1\phi\,\overline{A_1\phi}-iA_1\phi\,\overline{\partial_1\phi}=\frac{2n\sin\theta}{r}A[R+\varepsilon q]^2. \tag{4.74}
$$

类似地

$$
i\partial_2\phi\,\overline{A_2\phi}-iA_2\,\overline{\partial_2\phi}=-\frac{2n\cos\theta}{r}A_2[R+\varepsilon q]^2, \tag{4.75}
$$

其中

$$
A_1=a_1-\varepsilon\left[\frac{nf}{r}\sin\theta-h\cos\theta\right],
$$

$$
A_2=a_2+\varepsilon\left[\frac{nf}{r}\cos\theta-h\sin\theta\right].
$$

由(4.74),(4.75)得

$$
\begin{aligned}
&i\partial_1\phi A_1\,\overline{\phi}-iA_1\phi\,\overline{\partial_1\phi}+i\partial_2\phi A_2\,\overline{\phi}-iA_2\phi\,\overline{\partial^2\phi}\\
&\qquad=-\frac{2n}{r}[R+\varepsilon q]^2[-\sin\theta A_1+\cos\theta A_2]\\
&\qquad=-\frac{2n^2}{r^2}[R+\varepsilon q]^2[S+\varepsilon f].
\end{aligned}
\tag{4.76}
$$

再考虑

$$
\begin{aligned}
|A|^2&=\left|a_1-\varepsilon\left[\frac{nf}{r}\sin\theta-h\cos\theta\right]^2\right|^2+\left|a_2+\varepsilon\left[\frac{nf}{r}\cos\theta+h\sin\theta\right]\right|^2\\
&=|a|^2+2\varepsilon n^2\frac{fS}{r^2}+\varepsilon^2\left[\frac{n^2f^2}{r^2}+h^2\right],
\end{aligned}
\tag{4.77}
$$

其中 $a=\left(-nS\dfrac{\sin\theta}{r},nS\dfrac{\cos\theta}{r}\right)$. 从(4.72)有

$$
\begin{aligned}
&|\phi|^2=R^2+2\varepsilon qR+\varepsilon^2q^2,\\
&(|\phi|^2-1)^2=(R^2-1+2\varepsilon Rq+\varepsilon^2q^2)^2.
\end{aligned}
\tag{4.78}
$$

现将(4.70),(4.76),(4.77)和(4.78)代入 ξ,被积函数取此形式

$$
\left(a_{12}-a_{21}-\varepsilon\frac{(nf_r-h_\theta)}{r}\right)^2+|[R+\varepsilon q]_r|^2+\left|\frac{1}{r}[R+\varepsilon q]_\theta\right|^2
$$

$$
+\frac{n^2}{r^2}|R+\varepsilon q|^2+\left\{|a|^2+2\varepsilon n^2\frac{fS}{r^2}+\varepsilon^2\left[\frac{n^2f^2}{r^2}+h^2\right]\right\}
$$

$$
\cdot[R^2+2\varepsilon qR+\varepsilon^2q^2]-\frac{2n^2}{r^2}[R+\varepsilon q]^2[S+\varepsilon f]
$$

$$
+(R^2-1+2\varepsilon Rq+\varepsilon^2q^2)^2. \tag{4.79}
$$

计算在(4.76)中关于 ε 的二阶项,即得引理.

推论 4.7 设 $m\in \mathbb{N}$,且令

$$
f(r,\theta)=\alpha(r)\cos m\theta,
$$

$$
q(r,\theta)=\alpha(r)S,
$$

$$
h(r,\theta)=\frac{\alpha'(r)mn}{m^2+r^2R^2}\sin m\theta.
$$

在(4.65)中,则$\frac{1}{n}\langle\xi''(\nu),\nu\rangle$具有形式

$$
\int_0^\infty\left\{\left[\frac{n^2R^2}{m^2+r^2R^2}+1\right]\alpha'^2+\alpha^2\left[\frac{n^2}{r^2}\left(\frac{m^2}{n^2}+(S-1)^2+R^2+4R(S-1)\right)\right.\right.
$$

$$
\left.\left.+\frac{\lambda}{2}(3R^2-1)\right]\right\}r. \tag{4.80}
$$

证 由引理 4.6 即得.

令 $Z=\beta r,\beta=\sqrt{\frac{\lambda}{2n^2}}$,且

$$
R_\beta^n(Z)=R\left(\frac{Z}{\beta}\right),S_\beta^n(Z)=S\left(\frac{Z}{\beta}\right),\overline{\alpha}(Z)=\alpha\left(\frac{Z}{\beta}\right), \tag{4.81}
$$

变换积分变元,$r=\frac{Z}{\beta}$于(4.80)中,有

$$
\langle\xi''(\nu),\nu\rangle
$$

$$
=\pi\int_0^\infty\left\{\left[\frac{n^2R_\beta^{n^2}}{m^2+\frac{\alpha^2}{\beta^2}R_\beta^{n^2}}+1\right]\overline{\alpha}'(Z)^2+n^2G_\beta''(Z)\,\overline{\alpha}^2(Z)\right\}ZdZ, \tag{4.82}
$$

$$
G_\beta''=\frac{m^2}{n^2Z^2}+\frac{1}{Z^2}[(S_\beta''(Z)-1)^2+R_\beta^{n^2}(Z)+4R_\beta''(Z)(S''_\beta(Z)-1)]
$$

$$+3R''^{2}_{\beta}(Z)-1,$$

其中 $R(r),S(r)$满足如下方程

$$-R''-\frac{1}{r}R'+\frac{n^2}{r^2}(1-S)^2R+\frac{\lambda}{2}(R^2-1)R=0,$$

$$-S''+\frac{1}{r}S'-(1-S)R^2=0. \tag{4.83}$$

(4.83)在 $r=\frac{Z}{\beta}$取值有

$$-R_\beta^{n''}(Z)-\frac{1}{Z}R_\beta^{n'}(Z)+\frac{n^2}{Z^2}[(1-S_\beta^n(Z))^2$$

$$+(R_\beta^{n^2}(Z)-1)]R_\beta^n(Z)=0,$$

$$-S_\beta^{n''}(Z)+\frac{1}{Z}S_\beta^{n'}(Z)-\frac{1}{\beta^2}(1-S_\beta^n(Z))R_\beta^{n^2}(Z)=0. \tag{4.84}$$

现研究 R_β^n 和 S_β^n 当 $n\to\infty$时(β 为固定)的渐近状态,我们首先建立如下的关于 R_β^n 和 S_β^n 的一致有界估计.

引理 4.8 磁场 $H_\beta^n(Z)=\frac{1}{Z}S_\beta^n(Z)$满足

$$-\Delta H_\beta^n+\frac{1}{\beta^2}H_\beta^n=\frac{1}{\beta^2}T_\beta^n, \tag{4.85}$$

其中 $T_\beta^n=\frac{\alpha}{Z}R_\beta^nR_\rho^{n'}(1-S_\beta^n)+\frac{1}{Z}(1-R^{n^2})S_\beta^{n'}, Z\neq0$,进一步有

$$T_\beta^n\geqslant0,\quad \|T_\beta^n\|_1=2\pi, \tag{4.86}$$

$$\|H_\beta^n\|_2\leqslant\frac{\sqrt{\pi}}{\beta},\quad 2\beta^2\int_{R^2}H_\beta^{n^2}=\int_{R^2}(1-R_\beta^{n^2}), \tag{4.87}$$

证 从(4.84)的第二个方程有

$$-ZH_\beta^{n'}=-Z\left[\frac{1}{Z}S_\beta^{n'}\right]'=\frac{1}{\beta^2}(1-S_\beta^n)R_\beta^{n^2}. \tag{4.88}$$

再对(4.88)式求导,即得(4.85),因 R 和 S 是增加的,正的函数,$T_\beta^n\geqslant0$,对任何 $0\leqslant d\leqslant\infty$,可得

$$\int_{|Z|\leqslant d}\frac{2}{Z}R_\beta^nR_\beta^{n'}(1-S_\beta^n)Z\mathrm{d}_Z\mathrm{d}\theta$$

$$=2\pi\int_0^d\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}_Z}R_\beta^{n^2}(1-S_\beta^n)\mathrm{d}_Z$$

$$= 2\pi\int_0^d R_\beta^{n^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}_Z} S_\beta^n \mathrm{d}_Z + 2\pi R^{n^2}(d)(1 - S_\beta^n(d)), \qquad (4.89)$$

因此,从 T_β^n 的定义和(4.89)有

$$\int_{|Z|\leqslant d} T_\beta^n Z \mathrm{d}_Z = \int_{|Z|\leqslant d} \frac{1}{Z} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}_Z} S_\beta^n Z \mathrm{d}_Z + 2\pi R_\beta^{n^2}(d)(1 - S_\beta^n(d))$$

$$= 2\pi S_\beta^n(d) + 2\pi R_\beta^{n^2}(d)(1 - S_\beta^n(d)). \qquad (4.90)$$

令 $d \to \infty$,且注意到 $S_\beta^n(d) \to 1, d \to \infty$,可得(4.86).

为证(4.87)中第一个不等式,乘(4.84)以$\frac{1}{Z}S_\beta^{n\prime}$,再在$\mathbb{R}^2$上积分,可得

$$\left\| \frac{1}{Z} S_\beta^{n\prime} \right\|_2^2 = 2\pi\int_0^\infty \left[S_\beta^{n\prime\prime} S_\beta^{n\prime} + \frac{1}{\beta^2}(1 - S_\beta^n) S_\beta^{n\prime} R_\beta^{n^2} \right] \mathrm{d}Z$$

$$\leqslant \pi S_\beta^{n^2\prime} \Big|_0^\infty + 2\pi\int_0^\infty \frac{1}{\beta^2}(1 - S_\beta^n) S_\beta^{n\prime} \mathrm{d}_Z = \pi \frac{1}{\beta^2}(1 - S_\beta^n) \Big|_\beta^0$$

$$= \frac{\pi}{\beta^2},$$

其中我们用到了这个事实:$S_\beta^{n\prime}(Z) = 0, Z = 0, Z = \infty$.

为证(4.87)中第二个等式,利用 $R(S), S(r)$的等式

$$\int_{R^2} \left[\frac{1}{r} S' \right]^2 = \frac{\beta^2}{2} \int_{R^2} (1 - R^2)^2. \qquad (4.91)$$

上式作变元变换 $Z = \beta r$,即得(4.87).

现研究 S_β^n, R_β^n,当 $n \to \infty$时的渐近形态.

引理 4.9 存在子序列 n_k 使得 $S_\beta^{n_k}(Z) \to S_\beta(Z) \in C^0[0,\infty) \cap C^1(0,\infty)$, $R_\beta^n(Z) \to R_\beta(Z)$,几乎处处于$(0,\infty)$. 进一步,$0 \leqslant S_\beta \leqslant 1, S_\beta' \geqslant 0$,且

$$\left\| \frac{S_\beta'}{Z} \right\|_2 \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{\beta}, \qquad (4.92)$$

$$R_\beta(Z) = 0, Z \leqslant Z_*, \qquad (4.93)$$

$$R_\beta(Z) = \sqrt{1 - \frac{(1 - S_\beta)^2}{Z^2}}, Z > Z_*, \qquad (4.94)$$

其中 Z_*是使得 $1 - S_\beta(Z_*) = Z_*$成立惟一的点.

证 固定 β.

(a) S_β^n 在 $C^0[0,\infty)\cap C^1(0,\infty)$ 上一致有界.

注意从(4.86),(4.85), $-\Delta H_\beta^n+\frac{1}{\beta^2}H_\beta^n$ 一致有界于 $L^1(\mathbb{R}^2)\subset W^{-1,p}(\mathbb{R}^2)$, $1\leqslant p<2$,由标准的椭圆型理论和 Sobolev 嵌入, $H_\beta^n=\frac{1}{Z}S_\beta^{n'}$ 在 $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)(1\leqslant p<2)$ 中一致有界. 因此,存在 S_β, 使得 $\frac{1}{Z}S'_\beta\in W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$, $S_\beta^n(Z)\to S_\beta(Z)$ 子序列依点态收敛. (4.92)从(4.87)推出,对任何 $Z_1<Z_2$,

$$
\begin{aligned}
|S_\beta^n(Z_2)-S_\beta^n(Z_1)| &= \left|\int_{Z_2}^{Z_1}[xH_\beta^n(x)\mathrm{d}x]\right| \\
&\leqslant\left[\int_{Z_1}^{Z_2}xH_\beta^{n^2}\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_{Z_1}^{Z_2}x\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (4.95)\\
&\leqslant\|H_\beta^n\|_2\frac{\sqrt{Z_2^2-Z_1^2}}{\sqrt{2}}\leqslant\frac{\sqrt{\pi}}{\beta}\frac{\sqrt{Z_2^2-Z_1^2}}{\sqrt{2}}\text{(由(4.87))}.
\end{aligned}
$$

因此,极限函数 $S_\beta\in C^0[0,\infty)$,进一步,对任何 $0<Z<Z_2$,

$$
\begin{aligned}
&|S_\beta^{n'}(Z_2)-S_\beta^{n'}(Z_1)|=\left|\int_{Z_1}^{Z_2}[xH_\beta^n]'\mathrm{d}x\right|\\
\leqslant&\left|\int_{Z_1}^{Z_2}H_\beta^n\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{Z_1}^{Z_2}[xH_\beta^{n'}]\mathrm{d}x\right|\\
\leqslant&\left|\frac{1}{\sqrt{Z_1}}\int_{Z_1}^{Z_2}[x^{\frac{1}{2}}H_\beta^n]\mathrm{d}x\right|+\|H_\beta^{n'}\|_p\left(\frac{Z_2^2-Z_1^2}{2}\right)^{1-\frac{1}{p}}\\
\leqslant&\frac{1}{\sqrt{Z_1}}\|H_\beta^n\|_2\sqrt{Z_2-Z_1}+\|H_\beta^{n'}\|_p\left(\frac{Z_2^2-Z_1^2}{2}\right)^{1-\frac{1}{p}}. \qquad (4.96)
\end{aligned}
$$

因 $\|H_\beta^{n'}\|_p$ 和 $\|H_\beta^n\|_2$ 是一致有界的, $S_\beta\in C^1(0,\infty)$. 进一步,因 $S'_\beta\geqslant 0$,存在惟一 Z_*,使得 $1-S_\beta(Z_*)=Z_*$.

(b) R_β^n 当 $n\to\infty$ 时的渐近状态.

注意到 $0\leqslant R_\beta^n\leqslant 1$,现证 $R_\beta^{n^2}$ 在 BV 空间上是一致有界的. 为简单计,设 $S_\beta^n\to S_\beta$, $n\to\infty$. 因 $S'_\beta\geqslant 0$,可设 $S_\beta(Z)<1,0\leqslant Z\leqslant Z_0$

$=\inf\limits_{Z}\{S_\beta(Z)=1\}$. 因 $S_\beta(0)=0$, 且 S_β 是连续的, 故有 $Z_0>0$. 因此, $0<Z_*<Z_0$, 从方程(4.85)可知

$$[R_\beta^{n^2}]'(1-S_\beta^n)-R_\beta^n S_\beta^{n'}=[R_\beta^{n^2}(1-S_\beta^n)]'=[ZT''_\beta-ZH''_\beta]. \tag{4.97}$$

由引理 4.8 可知, $\|T_\beta^n\|_1$ 和 $\|H_\beta^n\|_2$ 是关于 n 一致有界的. 因此, (4.97)右端作为单变元 Z 的函数, 是在 $L^1_{loc}(0,\infty)$上一致有界的. 对任何固定的 $Z<Z_0$, $\lim\limits_{n\to\infty}(1-S_\beta^n(Z))=(1-S_\beta(Z))\geqslant C>0$, 因此, $(1-S_\beta^n(Z))\geqslant\frac{C}{2}>0$, n 充分大. 因 $S_\beta^{n'}$ 是在$C^1_{loc}(0,\infty)$中一致有界的, 连同(4.97)推出 $R_\beta^{n^2}$ 在 $W^{1,1}_{loc}(0,Z_0)$中一致有界, n 充分大. 由 Helly 定理, 存在一个子序列 n_k 使得

$$R_\beta^{n_k}(Z)\to R_\beta(Z), \text{几乎处处在}(0,Z_0). \tag{4.98}$$

进一步 $R_\beta^2(Z)\in BV_{loc}(0,Z_0)$. $(R_\beta^2)'$具有正测度. 取 $k\to\infty$的弱极限于(4.84)中, 可得

$$R_\beta(Z)\left[\frac{1}{Z^2}(1-S_\beta(Z))^2+R_\beta^2(Z)-1\right]=0, 0\leqslant Z\leqslant Z_0. \tag{4.99}$$

(c)方程的证明.

$$\begin{aligned}&R_\beta(Z)=0,\quad Z\leqslant Z_*,\\&R_\beta(Z)=\sqrt{1-\frac{(1-S_\beta)^2}{Z}}, Z>Z_*.\end{aligned} \tag{4.100}$$

为了建立(4.100), 我们需要利用(4.99), $R_\beta\neq0$. 先反证 $R_\beta\neq0$, $0\leqslant Z\leqslant Z_0$, 分两种情况: $Z_0<\infty$和 $Z_0=\infty$.

如 $Z_0<\infty$, 且 $R_\beta\equiv0$, $0\leqslant Z\leqslant Z_0$, 则(4.84)具有形式

$$-S''_\beta+\frac{1}{Z}S'_\beta=0.$$

因此

$$S_\beta(Z)=CZ^2, 0\leqslant Z\leqslant Z_0. \tag{4.101}$$

因 S_β 是连续的, $S_\beta(0)=0$, $S_\beta(Z_0)=1$, 常数 $C\neq0$, 则有 $S'_\beta(Z_0)$

$=2CZ_0\neq 0$,另一方面,从 Z_0 的定义,$S_\beta\equiv 1, Z\geqslant Z_0, S'_\beta(Z_0)=0$,这和(4.95)矛盾.因从(a)$S_\beta\in C^1$ 在 $Z_0<\infty$上.

如 $Z_0=\infty, R_\beta\equiv 0, 0\leqslant Z<\infty, n\to\infty$ 在(4.87)的第一个等式中,$R_\beta^{n^2}\to R_\beta^2$;几乎每个 Z,由 Footon 引理有

$$\infty = \|1-R_\beta^2\|_2^2 = \|1-\lim R_\beta^{n^2}\|_2^2$$
$$\leqslant \lim_{n\to\infty}\sup\|1-R_\beta^{n^2}\|_2^2 = \lim_{n\to\infty}\sup 2\beta^2\int_{R^2} H_\beta^{n^2}\leqslant 2\pi^2, \tag{4.102}$$

这导致矛盾.因此推出在任何情况下 $R_\beta\neq 0, Z\leqslant Z_0$.

现利用(4.99)证明(4.100).从(4.99)和 Z_* 的定义,有 $R_\beta(Z)=0, Z\leqslant Z_*$.因 R_β 是单调增加函数且在$[0,Z_0]$不恒等于零,能设对某 $Z_*\leqslant Z_{**}<Z_0, R_\beta(Z)\equiv 0, Z\leqslant Z_{**}$,且

$$R_\beta(Z)=\sqrt{1-\frac{(1-S_\beta)^2}{Z}}, Z\geqslant Z_{**}. \tag{4.103}$$

为了证明 $Z_*=Z_{**}$,从(4.86)得

$$T_\beta^n\to T_\beta=\frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}R_\beta^2\right](1-S_\beta)+\frac{1}{2}(1-R_\beta^2)S'_\beta, \tag{4.104}$$

在 $\mu(0\leqslant Z\leqslant Z_0)$, ^{2}非负测度空间中弱收敛.这是因为 $R_\beta^{n^2}\in BV_{loc}(0,Z_0)$一致.选取 $Z_{**}<d<Z_0$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}R_\beta^n(d)\to R_\beta(d)$,利用(4.90)对 $d<Z_0, n\to\infty$得

$$\int_{Z\leqslant d}T_\beta Z\mathrm{d}Z = \lim_{n\to\infty}\int_{Z\leqslant d}T_\beta^n Z\mathrm{d}Z$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[2\pi S_\beta^n(d)-R_\beta^n(d)(1-S_\beta^n(d))\right]$$
$$= 2\pi S_\beta(d)-2\pi R_\beta(d)(1-S_\beta(d)). \tag{4.105}$$

另一方面,基于假设(4.103),如同(4.90)直接计算得

$$\int_{Z\leqslant d}T_\beta Z\mathrm{d}Z = 2\pi S_\beta(d)+2R_\beta(Z_{**})(1-S_\beta(Z_{**}))$$
$$-2\pi R_\beta(d)(1-S_\beta(d)), \tag{4.106}$$

比较这两个等式,可得 $R_\beta(Z_{**})=0$,从(4.103),$1-S_\beta(Z_{**})=Z_{**}$,因此 $Z_{**}=Z_*$,Z_*是惟一的.对 $Z\geqslant Z_0$,由 R_β 的单调性,

$R_\beta \equiv 1$，引理得证.

我们再利用(4.94)去估计任何收敛子序列$(S_\beta^{n_k}, R_\beta^{n_k})$的极限$(S_\beta, R_\beta)$.

引理 4.10 存在$1 < Z_1 < Z_2 \leqslant \alpha$，$\beta_0 > 0$，$C_0 > 0$，使得对任何$(R_\beta, S_\beta)$，$S_\beta^n \to S_\beta$，即为某子序列$(S_\beta^{n_k}, R_\beta^{n_k})$的极限，

$$I = \frac{1}{Z^2}[(S_\beta - 1)^2 + R_\beta^2 + 4R_\beta(S_\beta - 1)] + 3R_\beta^2 - 1 < -C_0, \tag{4.107}$$

对一切$\beta > \beta_0$，$Z_1 < Z < Z_2$.

证 令$S_\beta^{n_k} \to S_\beta$，$R_\beta^{n_k} \to R_\beta$几乎处处成立. 注意到引理4.9，对$(S_\beta, R_\beta)$是正确的，选取$Z_1 = 0$，$Z_2 = Z$于(4.95)中，有

$$S_\beta(Z) \leqslant \frac{\sqrt{2\pi}}{\beta}, 1 \leqslant Z \leqslant \pi. \tag{4.108}$$

注意到从Z_*的定义有$Z_* \leqslant 1$. 因此从(4.90)有

$R_\beta = \sqrt{1 - \frac{(1 - S_\beta)^2}{Z^2}}$，$1 \leqslant Z \leqslant \pi$，将此代入Ⅰ，则Ⅰ具有形式

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{Z^2}\left[(S_\beta - 1)^2 + 1 - \frac{(1 - S_\beta)^2}{Z^2} + 4\sqrt{1 - \frac{(1 - S_\beta)^2}{Z^2}}(S_\beta - 1)\right] + \alpha \\
&\quad - \frac{3(1 - S_\beta)^2}{Z^2} \leqslant \frac{1}{Z^2}\left[1 - 2S_\beta + S_\beta^2 + 1 + \frac{2S_\beta}{Z^2} - \frac{S_\beta^2}{Z^2} - \frac{1}{Z^2}\right. \\
&\quad \left. + 4\sqrt{1 - \frac{1}{Z^2}}(S_\beta - 1)\right] - \frac{3}{Z^2} + \alpha - \frac{3S_\beta^2}{Z^2} + \frac{6S_\beta}{Z^2} \\
&\leqslant \frac{1}{Z^2}\left[4S_\beta - 2S_\beta^2 + \frac{2S_\beta}{Z^2} - \frac{S_\beta^2}{Z^2} + \alpha - \frac{1}{Z^2} + 4S_\beta\right. \\
&\quad \left. - 4\sqrt{1 - \frac{1}{Z^2}}\right] - 3\frac{1}{Z^2} + \alpha \\
&\leqslant \frac{1}{Z^2}\left[10S_\beta + 2 - \frac{1}{Z^2} - 4\sqrt{1 - \frac{1}{Z^2}}\right] - 3\frac{1}{Z^2} + \alpha \\
&\leqslant \frac{1}{Z^2}\left[\frac{10\sqrt{2\pi}}{\beta} + \alpha - \frac{1}{Z^2} - 4\sqrt{1 - \frac{1}{Z^2}}\right] - 3\frac{1}{Z^2} + \alpha \\
&= I_1(Z).
\end{aligned}$$

注意到$I_1(1)=\frac{10\sqrt{2\pi}}{\beta}$, $I_1'(1)=-\infty$,且

$$I_1(Z)=\frac{10\sqrt{2\pi}}{\beta}-4\sqrt{2}(Z-1)^{\frac{1}{2}}+O(Z-1), \tag{4.109}$$

因此,存在 $1<Z_1<Z<Z_2<\alpha, C_0>0, \beta_0$ 充分大,使得当 $\beta>\beta_0$ 时,$I<-C_0$.

基于引理 4.9,4.10 我们准备证明线性化 Maxwell-Higgs 方程组对于(R_β^n, S_β^n),n,β 充分大时增长模的存在性.

定理 4.11 设$\overline{\alpha}(Z)=\sin\frac{2\pi Z}{Z_2-Z_1}$,$Z_1\leqslant Z\leqslant Z_2\leqslant\pi$,其他地方$\overline{\alpha}(Z)=0$,且$\frac{m^2}{n^2}=\frac{C_0}{2}$,则存在 $\beta_0>0, n_0>0$ 使得

$$\langle\xi_{n,\beta}''(\nu),\nu\rangle=\pi\int_0^\infty\left[\left(\frac{n^2R_\beta^{n^2}}{m^2+\frac{Z^2}{\beta^2}R_\beta^{n^2}}+1\right)(\overline{\alpha}_1')^2+n^2G_\beta^n(Z)\,\overline{\alpha}^2\right]Z\mathrm{d}Z$$
$$\leqslant 0, \tag{4.110}$$

$n>n_0, \beta>\beta_0, \nu=(w,\psi)^T$ 如在(4.80)中.

证 充分证明 $\beta>\beta_0$ 且为固定的.

$$\lim_{n\to\infty}(\sup\langle\xi_{n,\beta}''(\nu),\nu\rangle)<0. \tag{4.111}$$

选取适当的子序列,设 $S_\beta^{n_k}\to S_\beta, R_\beta^{n_k}\to R_\beta$ 在 $L_{\mathrm{loc}}^2(\mathbb{R}^2)$中,且

$$\lim_{n\to\infty}(\sup\langle\xi_{n,\beta}''(\nu),\nu\rangle)=\lim_{k\to\infty}\langle\xi_{n_k,\beta}''(\nu),\nu\rangle.$$

为简单计,仍记子序列为 n.

从(2.82)有

$$\lim_{n\to\infty}\langle\xi_{n,\beta}''(\nu),\nu\rangle\leqslant\lim_{n\to\infty}\pi n^2\int_0^\infty\left[\left(\frac{2}{n^2C_0}+\frac{1}{n^2}\right)\overline{\alpha}'^2+G_\beta^n\overline{\alpha}^2\right]Z\mathrm{d}Z. \tag{4.112}$$

应用引理 4.10 于(S_β, R_β)和(2.82)可得

$$\lim_{n\to\infty}G_\beta^n=\left[\frac{C_0}{\alpha Z^2}+I\right]\leqslant\left[\frac{C_0}{2}-C_0\right]=-\frac{C_0}{2}<0. \tag{4.113}$$

对 $1\leqslant Z_1\leqslant Z\leqslant Z_2$,因 G_β^n 和$\overline{\alpha}'$为一致有界,可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\left[\left(\frac{\alpha}{n^2C_0}+\frac{1}{n^2}\right)\overline{\alpha}'^2+G_\beta^n\overline{\alpha}^2\right]ZdZ$$

$$\leqslant -C_0\int_{Z_1}^{Z_2}\sin^2\frac{\alpha\pi Z}{Z_2-Z_1}ZdZ<0. \tag{4.114}$$

因此,将(4.114)代入(4.112),即得(4.111).

以下证明对于涡旋(a,η),$\beta>\beta_0$, $n\geqslant n_0$不仅线性不稳定性,而且在模$\|\nu\|_X=\|\nu\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}+\|\nu\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$下非线性不稳定.其中$\nu=(w,\psi)^T\in\mathbb{R}^4$,为涡旋$(a,\eta)$的扰动.$w=A-a$, $\psi=\phi-\eta$.整个非线性 Maxwell-Higgs 方程组(4.7)—(4.11)作为ν的项,具有形式

$$\begin{cases}\partial_t(\partial_1w_1+\partial_2w_2)-\dfrac{i}{2}\partial_t(\eta\overline{\psi}-\overline{\eta}\psi)=\dfrac{i}{2}(\psi\partial_t\overline{\psi}-\overline{\psi}\partial_t\psi),\\ \dfrac{d^2\nu}{dt^2}-L\nu=N(\nu),\end{cases} \tag{4.115}$$

其中L的线性算子部分如同(4.16),非线性项$N(\nu)$为

$$\begin{aligned}&\frac{i}{2}(\psi\partial_k\overline{\psi}-\overline{\psi}\partial_k\psi)-w_k|\psi|^2-w_k(\eta\overline{\psi}+\overline{\eta}\psi)-\alpha_k|\psi|^2\\&\quad -iw_j\partial_j\psi-i\partial_j(w_j\psi)-\omega_j^2\psi-2a_jw_j\psi-\eta w_j^2\\&\quad -\frac{\lambda}{2}[|\psi|^2(\psi+2\eta)+\psi^2\overline{\eta}],\end{aligned}$$

$1\leqslant k\leqslant Z$, $1\leqslant j\leqslant 2$,求和.首先我们需要标准的 Maxwell-Higgs 方程组局部适定性定理.

引理 4.12 令$\nu=\|\nu(0)\|_{H^2(\mathbb{R}^2)}+\|\nu_t(0)\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}<\infty$,则存在$T^0>0$,依赖于$\nu$,使得存在问题(4.115)具初值$\nu|_{t=0}=\nu(0)$, $\nu_t|_{t=0}=\nu_t(0)$的惟一解,且

$$\|\nu(t)\|_{H^2(\mathbb{R}^2)}+\|\nu_t(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}<\infty, \tag{4.116}$$

$$\|F_{\mu\nu}\|_2^2(t)+\|D_\mu\phi\|^2(t)+\frac{\lambda}{4}\||\phi|^2-1\|_2^2(t)=\text{const}, \tag{4.117}$$

其中$A=a+w$, $\phi=\eta+\psi$, $0\leqslant t\leqslant T^0$.

证明的概要,再写 Maxwell-Higgs 方程组为

$$\begin{cases}\partial_t(\partial_1 w_1+\partial_2 w_2)=p_0(\nu),\\ [\partial_{tt}-\Delta]w_k-\partial_k(\operatorname{div}w)=p_k(\nu),\\ [\partial_{tt}-\Delta]\psi=p_\psi(\nu),\end{cases}\tag{4.118}$$

其中 $p=(p_0,p_j,p_\psi)$, $p_0=\frac{i}{2}\partial_t(\eta\bar{\psi}-\bar{\eta}\psi)+\frac{i}{2}(\psi\partial_t\bar{\psi}-\bar{\psi}\partial_t\psi)$, $(p_j,p_\psi)=\bar{L}(\nu)+N(\nu)$, $\bar{L}$ 为线性算子,

$$\begin{pmatrix}-|\eta|^2 & 0 & g_{13}-\eta_2\partial_1 & g_{14}+\eta_1\partial_1\\ 0 & -|\eta|^2 & g_{23}-\eta_2\partial_2 & g_{24}+\eta_1\partial_2\\ g_{31}+\partial_1(\eta_1\times & g_{32}+\partial_2(\eta_2\times & g_{33} & 2a_j\partial_j-\lambda\eta_2\eta_1\\ g_{41}-\partial_1(\eta_1\times & g_{42}-\partial_2(\eta_1\times & -2a_j\partial_j-\lambda\eta_2\eta_1 & g_{44}\end{pmatrix},\tag{4.119}$$

g_{ij}在(4.16)中.在(4.118)左端的线性算子类似于标准的波动算子,方程组(4.115)的初值问题的适定性能用标准的压缩映像定理证明.只需验证.

$$\begin{cases}\|p(\nu(t))\|_{H^1}\leqslant C[\|\nu(t)\|_{H^2}^3+\|\nu_t(t)\|_{H^1}^3+\|\nu(t)\|_{H^2}+\|\nu_t(t)\|_{H^1}],\\ \|p(\nu_1(t))-p(\nu_2(t))\|_{H^1}\leqslant C[\|\nu_1\|_{H^2}+\|\nu^2\|_{H^2}+1]^2\|\nu_1-\nu_2\|_{H^2},\end{cases}\tag{4.120}$$

其中常数 C 依赖于 $\|a\|_{C^1(\mathbb{R}^2)}+\|\eta\|_{C^2(\mathbb{R})^2}$,不等式(4.120)能由 $p(\nu)$的定义及标准的 Sobolev 嵌入定理和 Niremberg-Gagliardo 不等式得到.

$$\begin{aligned}&\|f\|_\infty\leqslant C\|f\|_{H^2(R^2)},\\ &\|f\|_{L^4(R^2)}\leqslant C\|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{1/2}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{1/2},\end{aligned}\tag{4.121}$$

等式(4.117)来自标准的能量估计.

如下的 H^2 模增长率估计对于线性结果到非线性动力学性质是至关重要的.

引理 4.13 设 $\nu(t)$为整个 Maxwell-Higgs 方程组(4.115)的解,且

$$\|\nu(t)\|_{H^1}+\|\nu_t(t)\|_2\leqslant Ce^{\Omega t}[\|\nu(0)\|_{H^1}+\|\nu_t(0)\|_2]\tag{4.122}$$

对 $0\leqslant t\leqslant T,\Omega>0$ 成立,则存在常数 $C_0>0$ 使得如果

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant T}[\|\nu(s)\|_X+\|\nu(s)\|_X^2]\leqslant C_0, \tag{4.123}$$

则对 $0\leqslant t\leqslant T$ 有

$$\begin{aligned}\|\nu(t)\|_{H^2}+\|\nu_t(t)\|_{H^1}\leqslant Ce^{\Omega t}[\|\nu(0)\|_{H^2}\\+\|\nu_t(0)\|_{H^1}],\end{aligned} \tag{4.124}$$

其中常数 C 与 t 无关.

证 证明的主要想法由 $\|\nu\|_{H^1}$ 估计 $\|\nu\|_{H^2}$,(4.115)对空间变元求导一次,$\partial_l=\partial_{Xl}$,得

$$\begin{cases}\partial_t(\partial_t\partial_l w_1+\partial_2\partial_l w_2)-\dfrac{i}{2}\partial_t(\eta\,\overline{\partial_l\psi}-\bar{\eta}\partial_l\psi)\\=\dfrac{i}{2}\partial_t(\partial_l\eta\bar{\psi}-\partial_t\bar{\eta}\psi-\dfrac{i}{2}\partial_l(\psi\,\overline{\partial_t\psi}-\bar{\psi}\partial_t\psi),\\\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\partial_l\nu)-L(\partial_l\nu)=L_1(\nu)+\partial_l N(\nu),\end{cases} \tag{4.125}$$

这里 $L_1(\nu)$ 为

$$\begin{aligned}&\frac{i}{2}[\eta_l\overline{\psi_k}+\psi\,\overline{\eta_{kl}}-\overline{\eta_l}\psi_k-\bar{\psi}\eta_{kl}-\partial_l a_k(\eta\bar{\psi}+\bar{\eta}\psi,\\&-a_k(\eta_l\bar{\psi}+\overline{\eta_l}\psi)-w_k\partial_l|\eta|^2-2i\partial_l a_j\psi_j-2iw_j\eta_{jl}\\&-i\partial_j w_j\eta_l-\partial_l[|a|^2+\lambda|\eta|^2]\psi-2w_j\partial_l(a_j\eta)-\frac{\lambda}{2}\partial_l(\eta^2)\bar{\psi},\end{aligned} \tag{4.126}$$

估计(4.125)右端的 L^2 模. 因 $\|a\|_{C^1}+\|\eta\|_{C^1}$ 为有限,有

$$\begin{aligned}\left\|\frac{i}{2}\partial_t(\partial_l\eta\bar{\psi}-\partial_l\bar{\eta}\psi)\right\|_2+\|L_1(\nu)\|_2\\\leqslant C[\|\nu\|_{H^1}+\|\nu_t\|_2].\end{aligned} \tag{4.127}$$

由(4.121)得

$$\left\|\frac{i}{2}\partial_l(\psi\partial_t\bar{\psi}-\bar{\psi}\partial_t\psi\right\|_2\leqslant C\|\nu\|_X(\|\nu\|_{H^2}+\|\nu_t\|_{H^1}), \tag{4.128}$$

$$\begin{aligned}\|\partial_l N(\nu)\|_2&\leqslant C[\|\nu\|_\infty+\|\nu\|_{H^1}+\|\nu_t\|_2\\&\quad+\|\nu\|_\infty^2](\|\nu\|_{H^1}+\|\nu_t\|_{H^1})\\&\leqslant C[\|\nu\|_X+\|\nu\|_X^2](\|\nu\|_{H^2}+\|\nu_t\|_{H^1}),\end{aligned} \tag{4.129}$$

其中常数 C 依赖于 $\|a\|_{C^1}+\|\eta\|_{C^2}$. 现用能量方法估计 $\|\nu\|_{H^2}$. 乘(4.125)的第一个方程两边以 $(\partial_1\partial_l w_1+\partial_2\partial_l w_2)$ $-\frac{i}{2}(\eta\overline{\partial_l\psi}-\bar{\eta}\partial_l\psi)$,利用(4.128)得

$$\begin{aligned}
&\|\partial_l \mathrm{div} W\|_2^2(t)\\
\leqslant\ & C\|\nu\|_{H^2}^2(0)+C\int_0^t\{\|\nu\|_X[\|\nu\|_{H^2}+\|\nu_t\|_{H^1}]^2\\
&+\|\nu\|_{H^1}+\|\nu_t\|_2^2\}\mathrm{d}t.
\end{aligned}\tag{4.130}$$

乘(4.125)第二个方程以 $\partial_l\nu$,得

$$\begin{aligned}
&\|\partial_l\nu_t\|^2\int_0^t-(L(\partial_l\nu),\partial_l\nu)\Big|_0^t\\
\leqslant\ &\int_0^t\|\frac{i}{2}\partial_t(\partial_l\eta\bar{\psi}-\partial_l\bar{\eta}\psi)\|_2\|\partial_l\nu_t\|_2\mathrm{d}\tau\\
&+\int_0^t[\|L_1(\nu)\|_2+\|\partial_l N(\nu)\|_2\|\partial_l\nu_t\|_2\mathrm{d}\tau\\
\leqslant\ & C\sup_{0\leqslant S\leqslant T}[\|\nu\|_X+\|\nu\|_X^2]\int_0^t\|\nu\|_{H^2}\|\partial_l\nu_t\|_2\mathrm{d}\tau\\
&+C\int_0^t\|\nu\|_{H^1}\|\partial_l\nu_t\|_2\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}\tag{4.131}$$

注意到

$$\begin{aligned}
(-L(\partial_l\nu),\partial_l\nu)\geqslant&\|\mathrm{curl}(\partial_l w)\|_2^2+\|\partial_l w\|_{H^1}^2\\
&-\frac{1}{2}\|\nabla\partial_l\psi\|^2-C\|\partial_l\nu\|_2^2,
\end{aligned}\tag{4.132}$$

联合(4.132),(4.130)和(4.131),令 $y(t)=\|\nu(t)\|_{H^2}^2+\|\nu_t(t)\|_{H^1}^2$,可得

$$\begin{aligned}
y(t)\leqslant\ & C[\|\nu\|_X+\|\nu\|_X^2+\varepsilon]\int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau+C_\varepsilon\int_0^t[\|\nu\|_{H^1}\\
&+\|\nu_t\|_2^2]\mathrm{d}t+C\|\nu(t)\|_{H^1}^2\\
&+C[\|\nu(0)\|_{H^2}+\|\nu_t(0)\|_{H^1}].
\end{aligned}\tag{4.133}$$

这里我们已用到了

$$\int_0^t\|\nu\|_{H^1}\|\partial_l\nu_t\|_2\mathrm{d}\tau\leqslant\int_0^t[C_\varepsilon\|\nu\|_{H^2}^2+\varepsilon\|\partial_l\nu_t\|_2^2]\mathrm{d}\tau,\tag{4.134}$$

选取 C_0 如同在(4.123)中和充分小的 ε 使得

$$\sup_{0\leqslant S\leqslant T}[\|\nu\|_X+\|\nu_t\|^2+\varepsilon]\leqslant\frac{\Omega}{2}.$$

由(4.133)和(4.134)得

$$y(t)\leqslant\frac{\Omega}{2}\int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau+Ce^{2\Omega t}[\|\nu(0)\|_{H^2}^2+\|\nu_t(0)\|_{H^1}^2],\tag{4.135}$$

则由 Gronwall 不等式推出引理.

下面证明我们的主要结果.

定理 4.14 设 (a,η) 为涡旋使得

$$\langle\xi''(\nu_1),\nu_1\rangle<0,\tag{4.136}$$

对某个 $\nu_1\in H^1(\mathbb{R}^2)$,则存在 $\varepsilon_0>0, C>0$,对任何 $\delta>0$,存在 Maxwell-Higgs 方程组的一族解 $\nu^\delta(t)$,使得 $W^\delta(0)$的涡旋数为 0,且

$$\|\nu^\delta(0)\|_X\leqslant\delta,$$

但

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant|\ln\delta|}\|\nu^\delta(t)\|_X\geqslant\varepsilon_0,\tag{4.137}$$

于是我们说(a,η)依模 X 是不稳定的.

证 由定理 4.3,存在线性化方程组(4.12),(4.13),(4.14)的增长模 $\nu_0e^{\omega t}$, $\omega>0$, $\nu_0\in H^2(\mathbb{R}^2)$. 规范化 ν_0,使得 $\|\nu_0\|_{H^2(\mathbb{R}^2)}=1$,现解 Maxwell-Higgs 方程组具有一族初值 $\nu|_{t=0}=\delta\nu_0,\nu_t|_{t=0}=\delta\omega\nu_0$,从(4.52)可知 $a+W$ 的涡旋数同于 a 的涡旋数. 用 $\nu^\delta(t)$表示上述 H^2 解,T_δ^0 表示最大的H^2 存在区间,无损于一般性,设 $C|\ln\delta|\leqslant T_\delta^0$. 事实上,我们断言:如果 $C|\ln\delta|>T_\delta^0$,则有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant C|\ln\delta|}\|\nu^\delta(t)\|_X=\infty,\tag{4.138}$$

因此定理(4.14)得证.

断言的证明. 如果此断言不真,则 $\sup_{0\leqslant t\leqslant C|\ln\delta|}\|\nu^\delta(t)\|_X<\infty$,由能量守恒(4.117)和(4.118)的第一个方程推出 $\|\nu\|_{H^1}+\|\nu_t\|_2$

是有界于$[0, C|\ln\delta|]$. 由引理 4.13 可知 $\|\nu\|_{H^2}+\|\nu_t\|_{H^1}$ 也有界于$[0, C|\ln\delta|]$. 但 $T_\delta^0<C|\ln\delta|$. 这和 T_δ^0 的意义矛盾.

现在 $T_\delta^0\leqslant C|\ln\delta|$, 相应的一族解 $\nu^\delta(t)=\nu(t)$能写成

$$\nu(t)=\delta e^{\omega t}\nu_0+\int_0^t \mathscr{S}(t-\tau)\mathcal{N}(\nu)\mathrm{d}\tau, \tag{4.139}$$

其中 $\mathscr{S}$ 表示线性化 Maxwell-Higgs 方程组(4.12), (4.13), (4.14)的解算子, $\mathcal{N}(\nu)=\left(\frac{i}{2}(\psi\partial_t\bar{\psi}-\bar{\psi}\partial_t\psi), N(\nu)\right)$, 令 $\omega<\Omega<2\omega$.

$$T=\sup\Big\{S: \|\nu(t)-\delta\nu_0 e^{\omega t}\|_{H^1}+\|\nu_t(t)-\omega\delta\nu_0 e^{\omega t}\|_2 \leqslant\frac{1}{2}\delta e^{\omega t}b\Big\}, \tag{4.140}$$

$0\leqslant t\leqslant s$, $b=\|\nu_0\|_{H^1}+\|\omega\nu_0\|_{L^2}$. 对 $0\leqslant t\leqslant T$, 有

$$\|\nu(t)\|_{H^1}+\|\nu_t(t)\|_2\leqslant\frac{3}{2}e^{\omega t}[\|\nu_0\|_{H^1}+\|\omega\nu_0\|_2]. \tag{4.141}$$

令

$$T^*=\sup\{s: \|\nu(t)\|_X\leqslant\varepsilon\}, 0\leqslant t\leqslant s, \tag{4.142}$$

选取 ε 充分小和应用引理 4.13, $\Omega=\omega$ 有

$$\begin{aligned}\|\nu(t)\|_\infty\leqslant C\|\nu(t)\|_{H^2}&\leqslant Ce^{\omega t}[\|\nu_0\|_{H^2}+\|\omega\nu_0\|_{H^1}]\\&=Ce^{\omega t},\end{aligned} \tag{4.143}$$

其中 $0\leqslant t\leqslant\min(T, T^*)$. 由线性化估计(4.57)′和(4.142), 对 $0\leqslant t\leqslant\min(T, T^*)$有

$$\begin{aligned}&\|\nu(t)-\delta e^{\omega t}\nu_0\|_{H^1}+\|\nu_1(t)-\delta\omega e^{\omega t}\nu_0\|_2\\
&\leqslant\int_0^t e^{\frac{3}{2}\omega(t-\tau)}\Big[\|\frac{i}{2}(\psi\partial_t\bar{\psi}-\bar{\psi}\partial_t\psi\|_2+\|\omega(\nu)\|_2\Big]\mathrm{d}\tau\\
&\leqslant C\int_0^t e^{\frac{3}{2}\omega(t-\tau)}[\|\nu(\tau)\|_\infty\|\nu(\tau)\|_{H^1}\\
&\quad+\|\nu(\tau)\|_\infty^2\|\nu(\tau)\|_2]\mathrm{d}\tau\\
&\leqslant C\int_0^t e^{\frac{3}{2}\omega(t-\tau)}\|\nu(\tau)\|_\infty\|\nu(\tau)\|_{H^1}\mathrm{d}\tau\\
&\leqslant C\int_0^t e^{\frac{3}{2}\omega(t-\tau)}(\delta e^{\omega\tau})(\delta e^{\omega\tau})\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

$$\leqslant C(\delta be^{\omega t})^2. \tag{4.144}$$

因此,对 $0\leqslant t\leqslant\min(T,T^*)$有

$$\| \nu(t) \|_{H^1} + \| \nu_t(t) \|_2 \geqslant b\delta e^{\omega t} - C_1(be^{\omega t})^2, \tag{4.145}$$

其中常数 C_1 与 ε, t 无关.我们选取 T^{**} 使得

$$\delta e^{T^{**}\omega} = \frac{1}{2bC_1}. \tag{4.146}$$

令 $0<\varepsilon_0<\min\left(\varepsilon, \frac{1}{2C_1}\right)$. 现考虑三个数 T, T^*, T^{**} 为最小的情况.

(ⅰ)如 $T<\min(T^*, T^{**})$,则有

$$\begin{aligned}
&\| \nu(t) - \delta e^{\omega t}\nu_0 \|_{H^1} + \| \nu_t(t) - \delta\omega e^{\omega t}\nu_0 \|_2 \\
&\leqslant C_1(\delta be^{\omega t})^2 \leqslant C(\delta be^{\omega T})(\delta be^{\omega T^{**}}) = \frac{1}{2}b\delta e^{\omega t}.
\end{aligned} \tag{4.147}$$

它和(4.140)矛盾.

(ⅱ)$T^{**}\leqslant\min(T,T^*)$,则有

$$\| \nu(T^{**}) \|_{H^1} + \| \nu_t(T^{**}) \|_2 \geqslant \frac{1}{2}C_1\delta be^{\omega T^{**}} = \varepsilon_0. \tag{4.148}$$

最后,如 $T^*\leqslant\min(T,T^{**})$,则有

$$\| \nu(t) \|_X \geqslant \varepsilon > \varepsilon_0, t\leqslant T^*.$$

由此推得我们的定理.

推论 4.15 如 $n>n_0, \beta>\beta_0$,则(a,η)为非线性不稳定的.

参 考 文 献

[1] Z. M. Chen, K. H. Hoffmann and J. Liang, On a non-stationary Ginzburg-Landau super conductivity model, Math. Mech. Appl. Sci, 16(1993), 855—876.

[2] Qiang Du, Global existence and uniqueness of solutions of the time-dependent Ginzburg-Landau model for superconductivity, Appl, Anal, 52(1994), 1—17.

[3] Qi Tang, shouhong wang, Time-dependent Ginzburg-Landau equations of superconductivity, preprint.

[4] K. H. Hoffmann and Lishang Jiang, Numerical studies of a non-stationary Ginzburg-Landau model for superconductivity Adv. Math. Sci. Appl. 5(1995), 363—389.

[5] Zhiming Chen, K. H. Hoffmann and Lishang Jiang, On the Lawrence-Doniach model for Layered superconductors, Euro. J. Appl. Math. 8(1997), 369—387.

[6] Y. Yang, Existence, regularity and asyptotic behaviov of the solution to the Ginzburg-Landau equations on $\mathbb{R}^3$, Comm. Math. phys., 123, 1989, 147—161.

[7] Y. Yang, The existence of Ginzburg-Landau solution on the plane by a direct variational method, Ann. Inst. H. Porrcard, Anal. Nonlinear, 11(1994), 517—536.

[8] Boling Guo, Guangwei Yuan, Cauchy problem for the Ginzburg-Landau equation for the superconductivity model, Proceedings of the Royel Society of Edinburgh, 127A, 1997, 1181—1192.

[9] Guo Boling, Wu Yonghui, Finite dimensional benavior of Ginzburg-Landau model for super-conductivity, Prog Nat. Sci., 5(1995), 6, 658—667.

[10] Guo Boling, Gao Hongjun and Yuan Guangwei, Finite energy solution for the hyperbolic type Ginzburg-Landau system, Pro, Nat. Sci., 7(1997), 4, 483—488.

[11] Yan Guo, Instability of symmetric vortices with large charge and coupling Constant, Comm. Pure. Apple. Math, Vol. ⅫⅩ, 1996, 1051 - 1080.

[12] E. M. stein, Singular integrals and differentiability properties of function (Princeton, NJ: Princeton University Press, 1970).

[13] T. Colin, On the Cauchy problem for a nonlocal nonlinear Schrödinger-equation occurring in plasm physics, Diff. Int. Equ., 6(1993), 1431—1450.

[14] R. Taman, Infinite dimensional dynamical system in mechanical and phyics, Springer verlag, New York. 1988.

[15] D. Eardley, V. Moncrief, The global existonce of Yang Mills-Higgs in M^{3+1}, Comm. Math. phys., 83(1982), 171.

[16] S. Klainerman, M. Macheden, on the Maxwell-Klein-Gordon equation with finite energy, Duke Math J., 74(1994), 19.

[17] M. S. Berger, Y. Y. Chen, Symmetric vortices for the Ginzburg-Landau equations of superconductivity and the nonlinear desingularization phenemenon, J. Funct. Anal, 82 (1989), 259—295.

[18] M. Reed, B. simon, Methods of modern mathematical physics, vol. 4, Acedemic press, New York, 1978.

第五章　Ginzburg-Landau 模型方程

这一章主要讨论 Ginzburg-Landau 模型方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = \Delta u_\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon^2} u_\varepsilon(1 - |u_\varepsilon|^2), x \in \Omega, t > 0, \\ u_\varepsilon(x,t) = g(x), x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u_\varepsilon(x,0) = u_0(x), x \in \Omega \end{cases} \tag{I}$$

的定态方程的 Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = \dfrac{1}{\varepsilon^2} u_\varepsilon(1 - |u_\varepsilon|^2), x \in \Omega, \\ u_\varepsilon = g, x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{II}$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时 u_ε 的形态,此时 $d = \deg(g, \partial\Omega)$($g$ 的 Brouwer 度或 Winding 数,g 看成从 $\partial\Omega$ 到 S^1 的一个映照)起着十分重要的作用.

当 $d = 0$ 时,我们将证明 $u_\varepsilon \to u_0$ 依 $C^1(\Omega)$ 模,甚至依 $C^k_{loc}(\Omega)$ 模,$\forall k$,u_0 为一个调和映照.

当 $d \neq 0$ 时,情况比较复杂,因此时 $\int |\nabla u_\varepsilon|^2 \to +\infty$,此时仅能存在一个子序列 u_{ε_n} 在 $\Omega - S$ 的紧集上一致收敛,于此奇性集 S 精确地由 Ω 内 $|d|$ 点组成.为了进一步讨论 u_ε 的形态,类似于调和映照的热流方程,即研究问题(Ⅰ)的解 $u_\varepsilon(x,t)$,当 $t \to \infty$ 时以及 $\varepsilon \to 0$ 时的形态.这一章的主要内容可参见文献[1]以及[2—6]等.

§1　$\deg(g, \partial\Omega) = 0$ 的情形

现设

$$\deg(g, \partial\Omega) = 0, \tag{1.1}$$

由此我们可作 g 的光滑延拓:$\overline{\Omega} \to S^1$.记

$$H_g^1(\Omega;S^1)=\{u\in H^1(\Omega;S^1);u=g,在\ \partial\Omega\ 上\},$$

考虑极小化问题

$$\min_{u\in H_g^1(\Omega;S^1)}\int|\nabla u|^2. \tag{1.2}$$

设 u_0 为(1.2) 的极小元. 由[7] 中 C.Marrey 的古典结果,可知 $u_0(x)$ 为光滑的且满足

$$\begin{cases}-\Delta u_0=u_0|\nabla u_0|^2, & x\in\Omega,\\ |u_0|=1, & x\in\Omega,\\ u_0=g, & x\in\partial\Omega,\end{cases} \tag{1.3}$$

且 u_0 为问题(1.2) 的惟一解,我们有如下结果.

定理 1.1 当 $\varepsilon\to 0$ 时,我们有

$$u_\varepsilon\to u_0,在\ C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})\ 内,\forall\alpha<1, \tag{1.4}$$

$$\|\Delta u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant C, \tag{1.5}$$

$$\|u_\varepsilon-u_0\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant C\varepsilon^2. \tag{1.6}$$

对于每个紧子集 $K\subset\Omega$,和每个正整数 k,

$$\|u_\varepsilon-u_0\|_{C^k(K)}\leqslant C_{K,k}\varepsilon^2, \tag{1.7}$$

$$\left\|\frac{1-|u_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2}-|\nabla u_0|^2\right\|_{C^k(K)}\leqslant C_{k,k}\varepsilon^2. \tag{1.8}$$

定理 1.1 的证明需要几个命题.

命题 1.2 当 $\varepsilon\to 0$ 时,则有

$u_\varepsilon\to u_0$,在 H^1 中强收敛.

证 因 $u_0\in H_g^1(\Omega;S^1)$,我们有

$$\frac{1}{2}\int|\nabla u_\varepsilon|^2+\frac{1}{4\varepsilon^2}\int(|u_\varepsilon|^2-1)^2\leqslant\frac{1}{2}\int|\nabla u_0|^2, \tag{1.9}$$

因此,u_ε 在 H^1 中有界. 于是

$u_{\varepsilon_n}\rightharpoonup u$ 在 H^1 中弱收敛.

由(1.9) 和下半连续性可得

$$\int|\nabla u|^2\leqslant\int|\nabla u_0|^2. \tag{1.10}$$

另一方面，由(1.9)有

$$\int(|u_\varepsilon|^2-1)^2\leqslant C\varepsilon^2,$$

故 $|u|=1$. 因此 $u\in H_g^1(\Omega;S^1)$. 基于(1.10)，u 为(1.2)的极小元，即 $u=u_0$，从

$$\int|\nabla u_\varepsilon|^2\leqslant\int|\nabla u_0|^2$$

推出 $u_\varepsilon\to u$ 在H^1中强收敛，由 u_0 的惟一性，u_ε 的一切序列均收敛.

命题 1.3 $|u_\varepsilon|\leqslant 1, x\in\Omega$.

证 我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|u_\varepsilon|^2&=u_\varepsilon\cdot\Delta u_\varepsilon+|\nabla u_\varepsilon|^2\\&=\frac{1}{\varepsilon^2}|u_\varepsilon|^2(|u_\varepsilon|^2-1)+|\nabla u_\varepsilon|^2\\&\geqslant\frac{1}{\varepsilon^2}|u_\varepsilon|^2(|u_\varepsilon|^2-1).\end{aligned}$$

令 $v=|u_\varepsilon|^2-1$ 满足

$$\begin{cases}-\Delta v+a(x)v\leqslant 0, & x\in\Omega,\\ v(x)=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}$$

其中 $a(x)=\dfrac{2}{\varepsilon}|u_\varepsilon|^2>0$，由极大值原理推得 $v\leqslant 0, x\in\Omega$，命题得证.

命题 1.4 设 u_ε 为

$$\min_{u\in H_g^1}E_\varepsilon(u)\tag{1.11}$$

的极小元，其中

$$E_\varepsilon(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2+\frac{1}{4\varepsilon^2}\int_\Omega(|u|^2-1)^2,\tag{1.12}$$

则

$$\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\boldsymbol{n}}\right|^2\leqslant C,$$

其中常数 C 仅依赖于 g 和 Ω, $\boldsymbol{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向向量.

证 $\partial\Omega$ 单位外法向量 $\boldsymbol{n}$ 扩充成 Ω 的光滑向量场 $V=(v_1, v_2)$,乘(Ⅱ)第一式以 $V\cdot\nabla u_\varepsilon=V_1\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1}+V_2\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_2}$,为简单计,忽略 ε,注意到左端有

$$\int_\Omega \Delta u(V\cdot\nabla u)=\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|^2-\int_\Omega\sum_{i=1}^2 u_{x_i}(V\cdot\nabla u)_{x_i},$$

因 $\int_\Omega|\nabla u_\varepsilon|^2$ 保持有界, $\varepsilon\to 0$,我们有

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_{x_i}(V_1u_{x_1}+V_2u_{x_2})x_i&=\int u_{x_i}(V_1u_{x_1x_i}+V_2u_{x_2x_i})+O(1)\\&=\frac{1}{2}\int_\Omega V_1(|u_{x_i}|^2)_{x_1}+V_2(|u_{x_i}|^2)_{x_2}+O(1)\\&=\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(u_{x_i})^2+O(1).\end{aligned}$$

因此

$$\int\Delta u(V\cdot\nabla u)=\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|^2-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^2+O(1).$$

另一方面,右端为

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon^2}\int_\Omega u(1-|u|^2)(V\cdot\nabla u)&=\frac{1}{2\varepsilon^2}\int_\Omega(1-|u|^2)\sum_{i=1}^2V_i(|u|^2)_{x_i}\\&=\frac{1}{4\varepsilon^2}\int_\Omega(1-|u|^2)^2\operatorname{div}V=O(1)\quad \text{由(1.9))},\end{aligned}$$

由此推出

$$\int_{\partial\Omega}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|^2-\frac{1}{2}|\nabla u|^2\right)=\frac{1}{2}\int\left(\left|\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|^2-\left|\frac{\partial u}{\partial \tau}\right|^2\right)=O(1),$$

其中 $\dfrac{\partial}{\partial\tau}$ 表示切向导数,因 $\dfrac{\partial u}{\partial\tau}=\dfrac{\partial g}{\partial\tau}$,于是命题 1.4 成立.

为了证明定理 1.1,我们分二部分证明:A. 内估计,B. 边界估计.

A. 内估计

step A.1 $|\nabla u_\varepsilon| \leqslant \frac{C_k}{\varepsilon}$,在任意闭子集 $K \subset \Omega$ 上.

证 我们先证一个断言.

断言:设 u 满足

$$-\Delta u = f, x \in \Omega \subset R^N,$$

则有

$$|\nabla u(x)|^2 \leqslant C(\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{1}{\operatorname{dist}^2(x, \partial\Omega)} \|u\|^2_{L^\infty(\Omega)}), \quad x \in \Omega, \tag{1.13}$$

其中 C 为常数仅依赖于 N.

证 为简单计,设 $0 \in \Omega$,令 $d = \operatorname{dist}(0, \partial\Omega)$,证(1.13)在 $x = 0$ 上成立.设 $0 < \lambda \leqslant d$ 为一待定常数.函数

$$v(y) = u(\lambda y)$$

定义在球 $B(0,1) = B_1$ 上,满足

$$-\Delta v(y) = \lambda^2 f(y), \quad \text{in } B_1. \tag{1.14}$$

从标准的椭圆型方程估计在 B_1 上有

$$|\nabla v(0)| \leqslant C(\lambda^2 \|f(xy)\|_{L^\infty(B_1)} + \|v\|_{L^\infty(B)}),$$

其中 C 仅依赖于 N,特别有

$$\lambda |\nabla u(0)| \leqslant C(\lambda^2 \|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u\|_{L^\infty(\Omega)}). \tag{1.15}$$

现分两种情况:

(i) $\left(\frac{\|u\|_{L^\infty}}{\|f\|_{L^\infty}}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant d$,

此时利用(1.15),取

$$\lambda = \left[\frac{\|u\|_{L^\infty}}{\|f\|_{L^\infty}}\right]^{\frac{1}{2}},$$

即得

$$|\nabla u(0)| \leqslant 2C \|f\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty} \|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty},$$

因此　在 $x=0$(1.13) 成立;

(ⅱ) $\left[\dfrac{\|u\|_{L^\infty}}{\|f\|_{L^\infty}}\right]^{\frac{1}{2}} > d$,

此时利用(1.15),$\lambda = d$,有

$$|\nabla u(0)| \leqslant C\left[d\|f\|_{L^\infty} + \frac{1}{d}\|u\|_{L^\infty}\right]$$

$$\leqslant C\left[\|f\|_{L^\infty}\|u\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{d}\|u\|_{L^\infty}\right],$$

此时(1.13) 也成立.

由此断言及命题(1.3) $|u_\varepsilon| \leqslant 1$ 代入 f,即得 $|\nabla u_\varepsilon| \leqslant \dfrac{C_K}{\varepsilon}$.

step A.2　$|u_\varepsilon| \to 1$,在任一紧子集 $K \subset \Omega$ 上一致收敛.

证　由(1.9) 及 $u_\varepsilon \to u_0$ 在 H^1 中可知

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_\Omega (|u_\varepsilon|^2 - 1)^2 \to 0, \tag{1.16}$$

令 $x_0 \in K, \alpha = |u_\varepsilon(x_0)|$,由 step 1 有

$$|u_\varepsilon(x)| \leqslant \alpha + \frac{C}{\varepsilon}\rho,\ |x - x_0| < \rho < d = \operatorname{dist}(K, \partial\Omega),$$

因此

$$1 - |u_\varepsilon(x)| \geqslant 1 - \alpha - \frac{C}{\varepsilon}\rho, \text{在 } B(x_0\rho) \text{ 上},$$

$$(1 - |u_\varepsilon(x)|)^2 \geqslant \left(1 - \alpha - \frac{c}{\varepsilon}\rho\right)^2, \frac{C\rho}{\varepsilon} < 1 - \alpha.$$

因

$$(1 - |u_\varepsilon(x)|^2)^2 \geqslant (1 - |u_\varepsilon(x)|)^2,$$

由(1.16) 得

$$\varepsilon^2 O(1) = \int_{B(x_0,\rho)} (1 - |u_\varepsilon|^2)^2 \geqslant \pi\rho^2\left(1 - \alpha - \frac{C\rho}{\varepsilon}\right)^2.$$

选取

$$\rho = \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{2C} < d \quad (\varepsilon \text{ 充分小}),$$

于是有

$$\varepsilon^2 O(1) \geqslant \pi \frac{\varepsilon^2(1-\alpha)^2}{4C^2} \frac{(1-\alpha)^2}{4}.$$

因此

$$(1-\alpha)^4 \leqslant O(1).$$

即 $|u_\varepsilon| \to 1$ 在 Ω 的紧子集上一致成立.

step A.3　令

$$A_\varepsilon = \frac{1}{2}|\nabla u_\varepsilon|^2,$$

则有

$$-\Delta A_\varepsilon + \frac{1}{2}|D^2 u_\varepsilon|^2 \leqslant \frac{4}{|u_\varepsilon|^2} A_\varepsilon^2, \qquad x \in \Omega, \quad (1.17)$$

其中 $|D^2 u_\varepsilon|^2 = \sum_{i,j=1}^{2} \left(\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2$.

证　忽略 ε，$A_\varepsilon = \frac{1}{2}\sum\sum u_i^\alpha u_i^\alpha$,

$$\partial_j A_\varepsilon = \sum\sum u_{ji}^\alpha u_i^\alpha,$$

$$\partial_j(\partial_j A_\varepsilon) = \sum\sum u_{j\alpha}^\alpha u_{j\alpha}^\alpha + \sum\sum u_i^\alpha u_{jji}^\alpha$$

$$= |D^2 u|^2 + \sum\sum u_i^\alpha (u_{jj}^\alpha)_i.$$

即有

$$\Delta A = |D^2 u|^2 + \sum_{i=1,2} u_{x_i} \Delta(u_{x_i}). \qquad (1.18)$$

再利用 Euler 方程(Ⅱ)可得

$$\Delta u_{x_i} = u_{x_i} \cdot \frac{(|u|^2 - 1)}{\varepsilon^2} + \frac{2}{\varepsilon^2} u(u \cdot u_{x_i}),$$

代入(1.18)得

$$\Delta A = |D^2 u|^2 + |\nabla u|^2 \frac{(|u|^2-1)}{\varepsilon^2} + \frac{2}{\varepsilon^2}(u \cdot \nabla u)^2.$$

于是

$$\nabla A \geqslant |D^2 u|^2 - |\nabla u|^2 \frac{|\Delta u|}{|u|}.$$

因 $|\Delta u| \leqslant \sqrt{2}|D^2 u|$,有

$$-\Delta A + |D^2 u|^2 \leqslant 2\sqrt{2} A \frac{|D^2 u|}{|u|} \leqslant \frac{1}{2}|D^2 u|^2 + 4\frac{A^2}{|u|^2}.$$

step A.4

$$\{u_\varepsilon\} \text{ 在 } H^2_{\text{loc}} \text{ 中有界}, \tag{1.19}$$

$$\{\nabla u_\varepsilon\} \text{ 在 } L^\infty_{\text{loc}} \text{ 中有界}. \tag{1.20}$$

证 给定 $\delta > 0$(待定),选取其充分小使得

$$\int_{B(x_0,R)} |\nabla u_\varepsilon|^2 < \delta, \forall x_0 \in \Omega, \forall \varepsilon \tag{1.21}$$

(这里积分理解为在 $\Omega \cap B(x_0,R)$ 上),这是由于命题 1.2,$u_\varepsilon \to u_0$ 在 $H^1(\Omega)$ 中强收敛.

固定点 $x_0 \in \Omega$,令 $d = \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$,$\zeta(x)$ 为光滑函数,其支集在 $B(x_0,r)$ 中,$r = \min(d/2, R)$,使得在 $B(x_0, r/2)$ 中 $\zeta = 1$.乘(1.17)以 ζ^2 得

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \zeta^2 |D^2 u_\varepsilon|^2 \leqslant 4\int_\Omega \frac{\zeta^2}{|u_\varepsilon|^2} A_\varepsilon^2 + \int_\Omega (\Delta\zeta)^2 A_\varepsilon. \tag{1.22}$$

因 $u_\varepsilon \to 1$ 在 Ω 的紧子集上一致成立,我们有,对 ε 充分小,

$$|u_\varepsilon| > \frac{1}{2} \quad \text{在 } B(x_0,r) \text{ 中}. \tag{1.23}$$

因此我们有

$$\int_\Omega \zeta^2 |D^2 u_\varepsilon|^2 \leqslant C\int_\Omega \zeta^2 |\nabla u_\varepsilon|^4 + C(u_\varepsilon \text{ 在} H^1 \text{ 中有界}),$$

因 $W^{1,1}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$,则

$$\left[\int_\Omega \varphi^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant C\int |\nabla\varphi| + |\varphi|, \forall \varphi \in W^{1,1}(\Omega). \tag{1.24}$$

在(1.24)中,置 $\varphi = \zeta |\nabla u_\varepsilon|^2$,可得

$$\int_\Omega \zeta^2 |\nabla u_\varepsilon|^4 \leqslant C\left[\int_\Omega \zeta |\nabla u_\varepsilon| |D^2 u_\varepsilon|\right]^2 + C.$$

于此我们多次用到 u_ε 在H^1 中的有界性.由 Cauchy-Schwartz 不等式和(1.21)得

$$\int_{\Omega}\zeta^{2}|\nabla u_{\varepsilon}|^{4}\leqslant C\delta\int_{\Omega}\zeta^{2}|D^{2}u_{\varepsilon}|^{2}+C.$$

如选取 δ 充分小，使吸收 $\int_{\Omega}\zeta^{2}|\nabla u_{\varepsilon}|^{4}$ 于(1.24)左端，即得

$$\int_{\Omega}\zeta^{2}|D^{2}u_{\varepsilon}|^{2}\leqslant C.$$

于是证明了(1.19).

从(1.19)和 Sobolev 嵌入可知 ∇u_{ε} 在 $L^{q}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 中有界，$\forall q<\infty$，再回到(1.17)有

$$-\Delta A_{\varepsilon}<f_{\varepsilon},$$

其中 f_{ε} 在 $L^{q}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 中有界，$\forall q<\infty$，这就由标准的椭圆型方程理论推出(A_{ε}) 在 $L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 中有界.

step A.5　我们有

$$\frac{1}{\varepsilon^{2}}(1-|u_{\varepsilon}|^{2})\ \text{在}\ L^{\infty}_{\mathrm{loc}}\ \text{中有界}, \tag{1.25}$$

$$\Delta u_{\varepsilon}\ \text{在}\ L^{\infty}_{\mathrm{loc}}\ \text{中有界}. \tag{1.26}$$

证　如(1.25)成立，则

$$\|\Delta u_{\varepsilon}\|\leqslant\|u_{\varepsilon}(1-|u_{\varepsilon}|^{2})/\varepsilon^{2}\|_{L^{\infty}}\leqslant C,$$

即(1.26)成立. 为证(1.25)成立，需要如下引理.

引理 1.5　设 $w(r)$ 为

$$\begin{cases}-\varepsilon^{2}\Delta w+w=0, x\in B(0,R),\\ w=1, x\in\partial B(0,R)\end{cases}$$

的解，则对 $\varepsilon<\frac{3}{4}R$，有

$$w(r)\leqslant e^{\frac{1}{4\varepsilon R}(r^{2}-R^{2})}, r\in B(0,R).$$

证　容易计算函数 $e^{\frac{1}{4\varepsilon R}(r^{2}-R^{2})}$ 为上解.

现证(1.25)，我们有

$$\begin{aligned}\Delta|u_{\varepsilon}|^{2}&=\nabla(\nabla|u_{\varepsilon}|^{2})=\nabla(\nabla(u_{\varepsilon}\cdot u_{\varepsilon}))\\&=2(\nabla(u_{\varepsilon}\nabla u_{\varepsilon}))=2u_{\varepsilon}\Delta u_{\varepsilon}+2|\nabla u_{\varepsilon}|^{2}\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\varepsilon^2} | u_\varepsilon |^2 (| u_\varepsilon |^2 - 1) + 2 | \nabla u_\varepsilon |^2.$$

于是有

$$\frac{1}{2}\Delta | u_\varepsilon |^2 = \frac{1}{\varepsilon^2} | u_\varepsilon |^2 (| u_\varepsilon |^2 - 1) + | \nabla u_\varepsilon |^2. \qquad (1.27)$$

令 K 为 Ω 的一个紧子集，$d = \mathrm{dist}(K, \partial\Omega)$. 设 $x_0 = 0 \in K$，对 ε 充分小，我们有

$$| u_\varepsilon | \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x \in B\left(0, \frac{d}{2}\right).$$

于是由 step A.4 和(1.27) 有

$$\Delta | u_\varepsilon |^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}(1 - | u_\varepsilon |^2) \leqslant C, \quad x \in B\left(0, \frac{d}{2}\right).$$

置 $\varphi = 1 - | u_\varepsilon |^2$, 可得

$$-\varepsilon^2 \Delta\varphi + \varphi \leqslant \varepsilon^2 C, \quad x \in B\left(0, \frac{d}{2}\right).$$

应用引理 1.4 和最大值原理可得

$$\varphi \leqslant \varepsilon^2 C + e^{\frac{1}{2\varepsilon d}\left(|x|^2 - \frac{d^2}{4}\right)},$$

特别有

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\varphi(0) \leqslant C + \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{d}{8\varepsilon}}.$$

这就证明了(1.25).

B. 边界估计

step B.1　设 u_ε 为(Ⅱ)的解，则

$$| \nabla u_\varepsilon | \leqslant \frac{C}{\varepsilon}, \quad x \in \Omega, \qquad (1.28)$$

其中 C 仅依赖于 g 和 Ω.

证　记 $u_\varepsilon = v_\varepsilon + w$，其中 v_ε 为定解问题

$$\begin{cases} -\Delta v_\varepsilon = \dfrac{1}{\varepsilon^2} u_\varepsilon (1 - | u_\varepsilon |^2), & x \in \Omega, \\ v_\varepsilon = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的解. w 为定解问题

$$\begin{cases} -\Delta w = 0, & x \in \Omega, \\ w = g, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

我们需要如下引理进行估计.

引理 1.6 设 u 满足

$$\begin{cases} -\Delta u = 1, & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.29}$$

其中 Ω 为光滑有界区域,则有

$$\| \nabla u \|^2_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C \| f \|_{L^\infty(\Omega)} \| u \|_{L^\infty(\Omega)}, \tag{1.30}$$

其中 C 仅依赖于 Ω.

证 从椭圆型方程理论,

$$\| u \|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C \| f \|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{1.31}$$

另一方面,如 K 为 Ω 中的紧子集,则由(1.13)联合(1.31)得

$$\| \nabla u \|_{L^\infty(K)} \leqslant C_K \| f \|_{L^\infty(\Omega)} \| u \|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{1.32}$$

因此仅需估计 ∇u 在靠近边界上的界.在靠近边界点 x_0 的局部坐标变换之后,方程(1.29)变为

$$\begin{cases} -\sum \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f, & x \in B_R^+ = \{x \in B_R, x_N > 0\} \\ u = 0, & x \in B_R \cap \{x_N = 0\}, \end{cases} \tag{1.33}$$

其中 $a_{ij}(x)$ 为光滑的,具有一致椭圆型系数(它们仅依赖于 $\partial\Omega$)和 R 能取定,与 x_0 无关.

令

$$v(y) = u(\lambda y + \xi), \text{在 } B_1^+ \text{ 内},$$

其中 $0 < \lambda \leqslant \dfrac{R}{2}$ 待定,ξ 为在 $B_{R/2} \cap \{Y_N = 0\}$ 中的任意点.函数 v 满足

$$-\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(\lambda y + \xi)\frac{\partial v}{\partial y_i}(y)\right) = \lambda^2 f(\lambda y + \xi), y \in B_1^+,$$

$$v = 0, \qquad y \in B_1 \cap (Y_N = 0).$$

标准的椭圆型方程在 B_1^+ 中的估计推出

$$\|\nabla v\|_{L^\infty(B^+_{1/2})} \leqslant C(\lambda^2\|f(\lambda y+\xi)\|_{L^\infty(B_1^+)} + \|v\|_{L^\infty(B_1^+)}),$$

(1.34)

其中 C 依赖于 $a_{ij}(\lambda y+\xi)$ 的椭圆型常数和 $\|a_{ij}(\lambda y+\xi)\|_{C^1(B_1^+)}$.

因所有量被控制得与 λ 和 ξ 无关, $\lambda \leqslant \frac{R}{2}$, $|\xi| \leqslant \frac{R}{2}$, 我们有

$$\lambda\|\nabla u\|_{L^\infty(\xi+B^+_{\lambda/2})} \leqslant C(\lambda^2\|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u\|_{L^\infty(\Omega)}).$$

(1.35)

我们分两种情况讨论.

(i) $\left[\frac{\|u\|_{L^\infty}}{\|f\|_{L^\infty}}\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{R}{2}$.

应用(1.35), $\lambda = \left[\frac{\|u\|_{L^\infty}}{\|f\|_{L^\infty}}\right]^{\frac{1}{2}}$ 得

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\xi+B^+_{\lambda/2})} \leqslant C\|f\|^{1/2}_{L^\infty(\Omega)}\|u\|^{1/2}_{L^\infty(\Omega)}.$$

因 ξ 是任意的, $|\xi| \leqslant \frac{R}{2}$, 推出

$$|\nabla u(x)| \leqslant C\|f\|^{1/2}_{L^\infty(\Omega)}\|u\|^{1/2}_{L^\infty(\Omega)},\ \forall x \in (x', x_N),$$

$$|x'| \leqslant \frac{R}{2}, 0 \leqslant x_N \leqslant \frac{\lambda}{2}.$$

u 回到 Ω 上, 我们已经证明

$$|\nabla u(x)| \leqslant C\|f\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(\Omega)}\|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(\Omega)},\ \forall x \in \Omega, \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \leqslant \frac{\lambda}{K}.$$

其中 K 是某个大的常数, 它仅依赖于 Ω. 另一方面, 如 $\mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{\lambda}{K}$, 则由(1.13) 推得

$$|\nabla u(x)|^2 \leqslant C\left(\|f\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \left\|\frac{K^2}{x^2}\right\|\|u\|^2_{L^\infty(\Omega)}\right)$$

$$= C(1+k^2)\|f\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

因此两种情形(1.30) 均成立.

(ii) $\left[\frac{\|u\|_{L^\infty}}{\|f\|_{L^\infty}}\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{R}{2}$.

此时应用(1.35),$\lambda=\frac{R}{2},\xi=0$有

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(B^+_{R/2})}\leqslant C\left(R\|f\|_{L^\infty(\Omega)}+\frac{1}{R}\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\right)$$

$$\leqslant C\left(2\|f\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(\Omega)}\|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(\Omega)}+\frac{1}{R}\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\right)$$

$$\leqslant C\|f\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(\Omega)}\cdot\|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(\Omega)}.$$

u 回到Ω 得

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant C\|f\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(\Omega)}\|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(\Omega)},$$

其中Ω为$\partial\Omega$的某个固定的邻域,这就完成了引理的证明,因为我们已有内估计(1.32).

由引理1.6和命题1.3,$|u_\varepsilon|\leqslant 1$.有

$$\|\nabla v_\varepsilon\|_{L^\infty}\leqslant\frac{C}{\varepsilon}\|v_\varepsilon\|_{L^\infty}\leqslant\frac{C}{\varepsilon}(\|u_\varepsilon\|_{L^\infty}+\|w\|_{L^\infty})\leqslant\frac{C}{\varepsilon},$$

因此

$$\|\Delta u_\varepsilon\|_{L^\infty}\leqslant\|\Delta V_\varepsilon\|_{L^\infty}+\|\Delta W\|_{L^\infty}\leqslant\frac{C}{\varepsilon}+C.$$

由此得(1.28).

step B.2　$|u_\varepsilon|\to 1$,在$\overline{\Omega}$上一致.

证　如同step A .2所证,取$x_0\in\overline{\Omega}$及利用

$$\text{meas}(\Omega\cap B(x_0,\rho))\geqslant C\rho^2$$

即可.其中常数C仅依赖于$\partial\Omega$的光滑性.

step B.3　u_ε在$H^2(\Omega)$中有界.

证　我们在step A.4中已知$\{u_\varepsilon\}$在$H^2_{\text{loc}}(\Omega)$中有界.因此我们仅需在靠近边界上建立H^2估计,令$x_0\in\partial\Omega$,为方便计,忽略ε.

先设靠近x_0处为平坦的,即

$\Omega\cap B(x_0,d)=\{(x_1,x_2),x_2>0\}\cap B(x_0,d),d>0$,令$\zeta$为一光滑函数,具有支集在$B(x_0,r)$中,$r=\min(d,R)$,使得在$B(x_0,r/2)$上,$\zeta=1$,乘(1,17)以$\zeta^2$,再在$\Omega$上积分得

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}\zeta^2 |D^2u|^2 \leqslant 4\int_{\Omega}\frac{\zeta^2}{|u|^2}A^2 + \int_{\Omega}\zeta^2\Delta A. \qquad (1.36)$$

由 step B.2, $|u_\varepsilon| \to 1$ 在 $\overline{\Omega}$ 上一致收敛且对 ε 充分小.

$$|u_\varepsilon| \geqslant \frac{1}{2}, 在\ \Omega\ 上. \qquad (1.37)$$

由(1.36),(1.37)可得

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}\zeta^2 |D^2u|^2 \leqslant 4\int_{\Omega}\zeta^2 |\nabla u|^4 - \int_{[x_2=0]}\zeta^2\frac{\partial A}{\partial x_2}$$

$$+ \int_{[x_2=0]}\frac{\partial \zeta^2}{\partial x_2}A + \int_{\Omega}\Delta\zeta^2 A. \qquad (1.38)$$

(1.38) 右端最后两个积分由命题 1.4 和(1.9) 知是有界的,我们断言

$$\int_{[x_2=0]}\zeta^2\frac{\partial A}{\partial x_2} \quad 是有界的. \qquad (1.39)$$

事实上,我们有

$$\frac{\partial}{\partial x_2}A = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}|\nabla u|^2 = (u_{x_1}u_{x_1x_2} + u_{x_2}u_{x_2x_2})$$

$$= (u_x u_{x_1x_2} - u_{x_2}\cdot u_{x_1x_1}).$$

这是因为在 $\partial\Omega$ 上,$\Delta u = \frac{1}{\varepsilon^2}u(|u|^2-1) = 0$.因此

$$\int_{[x_2=0]}\zeta^2\frac{\partial A}{\partial x_2} = \int_{[x_2=0]}\zeta^2(g_{x_1}u_{x_1x_2} - g_{x_1x_2}u_{x_2}]$$

$$= -2\int_{[x_2=0]}u_{x_2}(\zeta^2 g_{x_1x_1} + \zeta\zeta_{x_1}g_{x_1}).$$

由命题 1.4 可知,上面等式右端是有界的.

于是我们已证

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}\zeta^2 |D^2u|^2 \leqslant 4\int_{\Omega}\zeta^2 |\nabla u|^4 + C.$$

和 step A.4 相同的方法可证

$$\int_{\Omega}\zeta^2 |D^2u|^2 \leqslant C.$$

对于一般情况,即 Ω 在靠近 x_0 不是平坦的,我们引入局部坐标,把边界拉直,在新坐标下函数 u 变为 $\overline{u}$,定义在

$$U=\{(x_1,x_2);x_2>0\}\cap B(0,d)$$

上,选取坐标变换,$(x_1,x_2)=(x_1,x_2+h(x_1))$,其中 h 表示局部 $\partial\Omega$,方程 Ⅱ 变为

$$\begin{cases}L\overline{u}=\dfrac{1}{\varepsilon^2}\overline{u}(1-|\overline{u}|^2),x\in U,\\ \overline{u}=\overline{g},\ \ x\in[x_2=0]\cap\partial U.\end{cases}\tag{1.40}$$

其中 $L=\sum\limits_{i,j=1}^{2}\dfrac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}\dfrac{\partial}{\partial x_j})$,且

$$a_{11}=1,a_{12}=a_{21}=h',a_{22}=1+h'^2.$$

再令

$$A=\frac{1}{2}|\nabla\overline{u}|^2=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(\overline{u}_{x_k})^2,$$

其中 ∇ 表示在新坐标(x_1,x_2)中的梯度,我们进行如同step A.3的计算,不同的是对算子 L,为简单计,忽略求和号,并写 u 代替 $\overline{u}$.

$$LA=a_{ij}u_{x_i}u_{x_k}u_{x_jx_k}+u_{x_k}\cdot L(u_{x_k}).\tag{1.41}$$

(1.40) 第一个方程对 x_k 微分可得

$$-L(u_{x_k})=(a_{ijx_k}u_{x_i})x_j+\frac{1}{\varepsilon^2}u_{x_k}(1-|u|^2)-\frac{2}{\varepsilon^2}u(u\cdot u_{x_k}),\tag{1.42}$$

代入(1.41)得

$$\begin{aligned}LA\geqslant&\alpha|D^2u|^2+\frac{1}{\varepsilon^2}|\nabla u|^2(|u|^2-1)\\&-C|\nabla u|(|\nabla u|+|D^2u|),\end{aligned}\tag{1.43}$$

其中 α 表示椭圆型常数,C 依赖于 $\|a_{ij}\|_{C^2}$. 于是

$$\begin{aligned}LA&\geqslant\frac{\alpha}{2}|D^2u|^2+\frac{1}{\varepsilon^2}|\nabla u|^2(|u|^2-1)-C|\nabla u|^2\\&\geqslant\frac{\alpha}{2}|D^2u|^2-|\nabla u|^2\frac{|tu|}{|u|}-C|\nabla u|^2.\end{aligned}$$

因

$$|Lu| \leqslant C(|D^2u| + |\nabla u|), \tag{1.44}$$

我们有

$$-LA + \frac{\alpha}{2}|D^2u|^2 \leqslant \frac{C}{|u|}|\nabla u|^2(|D^2u| + |\nabla u|) + C|\nabla u|^2$$

$$\leqslant \frac{\alpha}{4}|D^2u|^2 + C|\nabla u|^4 + C,$$

其中用到了 step B.2 和 Young 不等式.这样我们有

$$-LA + \frac{\alpha}{4}|D^2u|^2 \leqslant C|\nabla u|^4 + C. \tag{1.45}$$

于是

$$\frac{\alpha}{4}\int_U \zeta^2|D^2u|^2 \leqslant C\int_U \zeta^2|\nabla u|^4 + \int_U \zeta^2 LA. \tag{1.46}$$

最后我们断言

$$\left|\int_U \zeta^2 LA\right| \leqslant C. \tag{1.47}$$

事实上,我们有

$$\int_U \zeta^2 LA = \int_U AL(\zeta^2) + 2\int_{[x_2=0]}(\zeta^2)_{x_1} a_{12}A + \int_{[x_2=0]}\zeta^2(a_{12})x_1 A$$

$$-\int_{[x_2=0]} a_{22}\zeta^2(A)_{x_2} + \int_{[x_2=0]} a_{22}(\zeta^2)_{x_2}A. \tag{1.48}$$

在(1.48)右端中的所有积分,除了 $\int_{[x_2=0]} a_{22}\zeta^2(A)_{x_2}$ 外,由于 u 在 $H^1(\Omega)$ 中有界和命题 1.4,因此它们均为有界.

记

$$Ax_2 = u_{x_1}u_{x_1x_2} + u_{x_2}u_{x_2x_2},$$

在 $x_2 = 0$ 上,由(1.40),$Lu = 0$,因此

$$(a_{22}u_{x_2})_{x_2} = -(a_{11}u_{x_1})_{x_1} - (a_{12}u_{x_1})_{x_2} - (a_{21}u_{x_2})_{x_1}.$$

利用 $u_{x_1x_2}u_{x_2} = \frac{1}{2}(u_{x_2}^2)_{x_1}$ 和简单计算,对 x_1 的几项分部积分和命题 1.4,可知积分 $\int_{[x_2=0]} a_{22}\zeta^2(A)_{x_2}$ 是有界的.这就完成了(1.47)

的证明.

最后回到(1.46),利用(1.47)有

$\frac{\alpha}{4}\int_U \zeta^2 |D^2 u|^2 \leqslant C\int_U \zeta^2 |\nabla u|^4 + C$. 如同 step A.4 所证,可得

$$\int_U \zeta^2 |D^2 u|^2 \leqslant C.$$

step B.4　定理 1.1 中(1.5), $\|\Delta u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C$.

证　由 step B.2,设

$$|u_\varepsilon| \geqslant \frac{1}{2}, x \in \Omega.$$

令 $\psi = \frac{1}{\varepsilon^2}(1 - |u_\varepsilon|^2)$. 如 step A.5 所证,

$$-2\varepsilon^2\Delta\psi + \psi \leqslant 4|\nabla u_\varepsilon|^2, x \in \Omega. \tag{1.49}$$

由 step B.3 和 Sobolev 嵌入定理可知 $\{\nabla u_\varepsilon\}$ 在 $L^r_{(\Omega)}$ 中有界, $\forall r < \infty$. 乘(1.49)以 ψ^{q-1},因在 $\partial\Omega$ 上 $\psi = 0$,有

$$\int_\Omega \psi^q \leqslant 4\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 \psi^{q-1},$$

即 $\|\psi\|_{L^q} \leqslant 4\|\nabla u_\varepsilon\|^2_{L^{2q}} \leqslant C_q$.

基于(Ⅱ)推出

$$\|\Delta u_\varepsilon\|_{L^q} \leqslant C_q, \forall q < \infty.$$

特别地,选取 $q > 2$,有

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty} \leqslant C, \tag{1.50}$$

回到(1.49),利用极大值原则得

$$\|\psi\|_{L^\infty} \leqslant 4\|\nabla u_\varepsilon\|^2_{L^\infty} \leqslant C.$$

由于 $-\Delta u_\varepsilon = u_\varepsilon\psi$,即得(1.5).

step B.5　(1.6)的证明, $\|u_\varepsilon - u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C\varepsilon^2$.

证　因 $|u_\varepsilon| \geqslant \frac{1}{2}, x \in \Omega, \varepsilon$ 充分小,可写

$$u_\varepsilon = \rho_\varepsilon e^{i\varphi_\varepsilon}, \quad \rho_\varepsilon = |u_\varepsilon|. \tag{1.51}$$

方程(Ⅱ)变为

$$\rho_\varepsilon \Delta\varphi_\varepsilon + 2\Delta\rho_\varepsilon\varphi_\varepsilon = 0 \quad (\text{比较虚部}), \tag{1.52}$$

即

$$\operatorname{div}(\rho_\varepsilon^2 \nabla \varphi_\varepsilon) = 0 \tag{1.53}$$

和

$$-\Delta\rho_\varepsilon + \rho_\varepsilon |\nabla \varphi_\varepsilon|^2 = \frac{1}{\varepsilon^2}\rho_\varepsilon(1 - \rho_\varepsilon^2)\ (\text{比较实部}). \tag{1.54}$$

由 step B.4 可知

$$\| \rho_\varepsilon - 1 \|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C\varepsilon^2. \tag{1.55}$$

再写(1.53) 为

$$\begin{cases} -\Delta(\varphi_\varepsilon - \varphi_0) = \operatorname{div}((\rho_\varepsilon^2 - 1)\nabla \varphi_\varepsilon), x \in \Omega, \\ \varphi_\varepsilon - \varphi_0 = 0, x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.56}$$

其中 $\Delta\varphi_0 = 0$,由椭圆型方程估计和(1.55),(1.50) 得

$$\| \varphi_\varepsilon - \varphi_0 \|_{L^\infty} \leqslant C \| (\rho_\varepsilon^2 - 1)\nabla \varphi_\varepsilon \|_{L^\infty} \leqslant C\varepsilon^2. \tag{1.57}$$

由(1.55) 和(1.57) 即得(1.6).

step B.6　对每个 k,有

$$\| \nabla \varphi_\varepsilon \|_{C^k_{loc}} \leqslant C, \tag{1.58}$$

$$\left\| \frac{1 - \rho_\varepsilon}{\varepsilon^2} \right\|_{C^k_{loc}} \leqslant C. \tag{1.59}$$

证　用归纳法证明.当 $k = 0$ 时,这些估计已经建立(甚至在 Ω 上是整体的) 见(1.50) 和(1.55).设 k 成立证明 $k + 1$ 也成立.置

$$X_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2}(1 - \rho_\varepsilon), \rho_\varepsilon = |u_\varepsilon|. \tag{1.60}$$

写(1.56) 为

$$-\Delta\rho_\varepsilon = -\rho_\varepsilon |\nabla \varphi_\varepsilon|^2 + \rho_\varepsilon(1 + \rho_\varepsilon)X_\varepsilon. \tag{1.61}$$

(1.61) 的右端由(1.58),(1.59) 在 C^k_{loc} 中保持有界,于是

$$\| \rho_\varepsilon \|_{W^{k+2,p}_{loc}} \leqslant C, \forall p < \infty. \tag{1.62}$$

特别

$$\| \nabla \rho_\varepsilon \|_{C^k_{loc}} \leqslant C. \tag{1.63}$$

由(1.52)有

$$-\Delta\varphi_\varepsilon=2\frac{\nabla\rho_\varepsilon}{\rho_\varepsilon}\nabla\varphi_\varepsilon,x\in\Omega.\tag{1.64}$$

从(1.58),(1.63),(1.64)和椭圆型方程估计得

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{W^{k+2,p}_{loc}}\leqslant C,\forall p<\infty.\tag{1.65}$$

由 Sobolev 嵌入定理推出

$$\|\nabla\varphi_\varepsilon\|_{C^{k+1}_{loc}}\leqslant C.\tag{1.66}$$

因此,(1.58)对 $k+1$ 成立.从 X_ε 的定义和(1.61)有

$$\varepsilon^2\Delta X_\varepsilon=-\rho_\varepsilon|\nabla\varphi_\varepsilon|^2+\rho_\varepsilon(1+\rho_\varepsilon)X_\varepsilon.\tag{1.67}$$

由(1.13)应用于 D^kX_ε 得

$$\|D^{k+1}X_\varepsilon\|^2_{L^\infty(\Omega'')}\leqslant C\|D^kX_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega')}(\|D^kX_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega')}+\|D^k\Delta X_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega')}),\tag{1.68}$$

其中 $\overline{\Omega''}\subset\Omega',\overline{\Omega'}\subset\Omega$.基于(1.59),

$$\|D^kX_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega')}\leqslant C.$$

利用(1.67),(1.58),(1.59)得

$$\|D^k\Delta X_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega')}\leqslant C/\varepsilon^2.$$

由(1.68)推之得

$$\varepsilon\|D^{k+1}X_\varepsilon\|_{L^\infty_{loc}}\leqslant C,$$

即

$$\|\varepsilon X_\varepsilon\|_{C^{k+1}_{loc}}\leqslant C.\tag{1.69}$$

再写(1.67)为

$$-\varepsilon^2\Delta X_\varepsilon+2X_\varepsilon=3\varepsilon^2X_\varepsilon^2-\varepsilon^4X_\varepsilon^3+\rho_\varepsilon|\nabla\varphi_\varepsilon|^2\equiv R_C.\tag{1.70}$$

注意到

$$3\varepsilon^2X_\varepsilon^2-\varepsilon^4X_\varepsilon^3=X_\varepsilon^2(3\varepsilon^2+\rho_\varepsilon-1),$$

$$\|\nabla\varphi_\varepsilon\|_{C^{k+1}_{loc}}\leqslant C,\left\|\frac{1-\rho_\varepsilon}{\varepsilon^2}\right\|_{C^k_{loc}}\leqslant C,\|X\cdot X_\varepsilon\|_{C^{k+1}_{loc}}\leqslant C,$$

可得

$$\|R_\varepsilon\|_{C^{k+1}_{loc}}\leqslant C.\tag{1.71}$$

(1.70) 对 x 微分 $k+1$ 次,得

$$-\varepsilon^2\Delta(D^{k+1}X_\varepsilon)+2D^{k+1}X_\varepsilon=D^{k+1}R_\varepsilon, x\in\Omega'. \quad (1.72)$$

另一方面,

$$\| D^{k+1}X_\varepsilon \|_{L^\infty(\Omega')}\leqslant\frac{C}{\varepsilon}\quad (\text{由}(1.69)),$$

应用引理 1.5 得

$$\| D^{k+1}X_\varepsilon \|_{L^\infty(\Omega'')}\leqslant C+\frac{C}{\varepsilon}e^{-\frac{d}{4\varepsilon}}.$$

其中 $d=\mathrm{dist}(\Omega'',\partial\Omega')$,推出

$$\| X_\varepsilon \|_{C^{k+1}_{\mathrm{loc}}}\leqslant C, \quad (1.73)$$

即(1.59) 对 $k+1$ 成立.

step B.7　估计(1.7) 和(1.8) 的证明.

因 $\Delta\varphi_0=0$,从(1,64) 有

$$-\Delta(\varphi_\varepsilon-\varphi_0)=2\frac{\nabla\rho_\varepsilon}{\rho_\varepsilon}\nabla\varphi_\varepsilon, x\in\Omega.$$

因此,从(1.57),(1.58) 和(1.59) 有

$$\| \varphi_\varepsilon-\varphi_0 \|_{C^{k+1}_{\mathrm{loc}}}\leqslant C\varepsilon^2. \quad (1.74)$$

于是

$$u_\varepsilon-u_0=\rho_\varepsilon e^{i\varphi_\varepsilon}-u_0=(\rho_\varepsilon-1)e^{i\varphi_\varepsilon}+e^{i\varphi_\varepsilon}-e^{i\varphi_0}$$

满足

$$\| u_\varepsilon-u_0 \|_{C^k_{\mathrm{loc}}}\leqslant C\varepsilon^2\quad (\text{由}(1.59)\text{ 和}(1.74)),$$

这就完成了(1.7) 的证明. 现转向(1.8) 的证明. 回到(1.70),写

$$-\varepsilon^2\Delta\left(X_\varepsilon-\frac{1}{2}|\nabla u_0|^2\right)+z\left(X_\varepsilon-\frac{1}{2}|\nabla u_0|^2\right)$$
$$=|\nabla\varphi_\varepsilon|^2-|\nabla\varphi_0|^2+S_\varepsilon, \quad (1.75)$$

其中 $S_\varepsilon=3\varepsilon^2X_\varepsilon^2-\varepsilon^4X_\varepsilon^3+(\rho_\varepsilon-1)|\nabla\varphi_\varepsilon|^2+\frac{1}{2}\varepsilon^2\Delta(|\nabla u_0|^2)$.

因 $u_0=e^{i\varphi_0}$, $|\nabla u_0|=|\nabla\varphi_0|$,由(1.58),(1.59) 和(1.74) 有

$$\| S_\varepsilon \|_{C^k_{loc}} \leqslant C\varepsilon^2,$$

$$\| |\nabla \varphi_\varepsilon|^2 - |\nabla \varphi_0|^2 \|_{C^k_{loc}} \leqslant C\varepsilon^2.$$

再应用引理 1.4 于 $\omega = D^k(X_\varepsilon - \frac{1}{2}|\nabla u_0|^2)$,可得

$$\| X_\varepsilon - \frac{1}{2}|\nabla u_0|^2 \|_{C^k_{loc}} \leqslant C\varepsilon^2\left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{d}{4\varepsilon}}\right).$$

由此完成(1.8)的证明.

以下考虑问题

$$\min_{u \in H^1_g} E_\varepsilon(u). \tag{1.76}$$

其中

$$E_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_\Omega (|u|^2 - 1)^2, \tag{1.77}$$

$$H^1_{g_\varepsilon} = \{u \in H'(\Omega); \mathbb{C}); u = g_\varepsilon, x \in \partial\Omega\}. \tag{1.78}$$

即边界函数 g 依赖于 ε,对应(1.76)的 Euler 方程为

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{1}{\varepsilon^2}u(1 - |u|^2), & x \in \Omega, \\ u = g_\varepsilon, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.79}$$

对 g_ε 作如下假设

$$\| g_\varepsilon \|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant 1, \tag{1.80}$$

$$\| g_\varepsilon \|_{H^1_{(\Omega)}} \leqslant C, \tag{1.81}$$

$$\int_{\partial\Omega} (|g_\varepsilon|^2 - 1)^2 \leqslant C\varepsilon^2, \tag{1.82}$$

且设

$$g_\varepsilon \to g \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上一致收敛}. \tag{1.83}$$

由(1.82)知,$|g| = 1$,因此 $\deg(g, \partial\Omega)$ 有定义,设

$$\deg(g, \partial\Omega) = 0. \tag{1.84}$$

写

$$g = e^{i\varphi_0}, x \in \partial\Omega,$$

其中 φ_0 为某调和函数. 令

$$u_0 = e^{i\varphi_0}, x \in \Omega.$$

主要结果如下：

定理 1.7 在假设(1.80)—(1.84)下，我们有

$$u_\varepsilon \to u_0 \quad 在 H^1(\Omega) 中强收敛; \tag{1.85}$$

$$u_\varepsilon \to u_0 \quad 在 \overline{\Omega} 中一致收敛; \tag{1.86}$$

$$u_\varepsilon \to u_0 \quad 在 C^k_{loc}(\Omega) 中收敛, \forall k; \tag{1.87}$$

$$\frac{1 - |u_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2} \to |\nabla u_0|^2, 在 C^k_{loc}(\Omega) 收敛, \forall k. \tag{1.88}$$

证明分成三步：

step 1 我们有

$$u_\varepsilon \to u_0 在 H^1(\Omega) 中强收敛. \tag{1.89}$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_\Omega (|u_\varepsilon|^2 - 1)^2 \to 0. \tag{1.90}$$

证 我们特殊选取和 u_ε 比较的函数具有形式

$$v_\varepsilon = \eta_\varepsilon e^{i\psi_\varepsilon}, \tag{1.91}$$

其中 η_ε 为如下问题的解

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta \eta_\varepsilon + \eta_\varepsilon = 1, & x \in \Omega, \\ \eta_\varepsilon = |g_\varepsilon|, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.92}$$

和 ψ_ε 为如下问题的解

$$\begin{cases} \Delta \psi_\varepsilon = 0, & x \in \Omega, \\ \psi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.93}$$

其中 $\varphi_\varepsilon: \partial\Omega \to R$，定义为

$$e^{i\varphi_\varepsilon} = g_\varepsilon / |g_\varepsilon|,$$

这是可能的，因 $\deg(g_\varepsilon, \partial\Omega) = 0$，基于(1.83)，我们能选取 φ_ε 使得 $\varphi_\varepsilon \to \varphi_0$，在 $\partial\Omega$ 上一致收敛，我们断言：

$$\int_\Omega |\nabla \eta_\varepsilon|^2 \leqslant C_\varepsilon, \tag{1.94}$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_\Omega (\eta_\varepsilon - 1)^2 \leqslant C_\varepsilon. \tag{1.95}$$

(1.94)、(1.95) 的证明：注意到 η_ε 为问题

$$\int_{\Omega} |\nabla \eta|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\Omega} (\eta - 1)^2 \text{ 在 } H^1_{g_\varepsilon}(\Omega;k) \text{ 上} \tag{1.96}$$

的极小.我们在局部坐标下比较函数为

$$\bar{\eta}_\varepsilon(x_1, x_2) = (|g_\varepsilon(x_1)| - 1)\gamma(x_2) + 1,$$

设靠近边界点 $\Omega = \{(x_1, x_2); x_2 > 0\}$, $\gamma(x)$ 为光滑函数,靠近 0 具有小的支集,且 $\gamma(0) = 1$. 注意到由(1.81),(1.82)有

$$\int_{\Omega} |\nabla \bar{\eta}_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\Omega} (\bar{\eta}_\varepsilon - 1)^2 \leqslant C, \tag{1.97}$$

因此

$$\int_{\Omega} |\nabla \eta_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\Omega} (\eta_\varepsilon - 1)^2 \leqslant C. \tag{1.98}$$

其次,乘(1.92)以 $V \cdot \nabla(\eta_\varepsilon - 1)$,如同命题 1.4 可得

$$\int_{\partial\Omega} \left|\frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial \boldsymbol{n}}\right|^2 \leqslant C. \tag{1.99}$$

以上用到了(1.98),(1.81)和(1.82).最后乘(1.92)以$(\eta_\varepsilon - 1)$分部积分得

$$\begin{aligned}\varepsilon^2\int_{\Omega} |\nabla \eta_\varepsilon|^2 + \int_{\Omega} (\eta_\varepsilon - 1)^2 &\leqslant \varepsilon^2 \int_{\partial\Omega} \left|\frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial n}\right|^2 |\eta_\varepsilon - 1| \\ &\leqslant \varepsilon^2 \left\|\frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial n}\right\|_{L^2_{(\partial\Omega)}} \| |g_\varepsilon| - 1 \|_{L^2_{(\partial\Omega)}} \leqslant C\varepsilon^2.\end{aligned}$$

这就证明了(1.94)和(1.95).

我们断言

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_{\Omega} (|u_\varepsilon|^2 - 1)^2 \leqslant \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla \psi_\varepsilon|^2 + C\varepsilon. \tag{1.100}$$

事实上,由(1.76)知 u_ε 为极小元,比较函数 v_ε 由(1.91)所定义,且由(1.95)注意到

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\Omega} (|v_\varepsilon|^2 - 1)^2 = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\Omega} (\eta_\varepsilon^2 - 1)^2 \leqslant C.$$

另一方面

$$\int_{\Omega} |\nabla v_\varepsilon|^2 = \int_{\Omega} |\nabla \eta_\varepsilon|^2 + \eta_\varepsilon^2 |\nabla \psi_\varepsilon|^2$$

$$\leqslant C\varepsilon + \int_\Omega |\nabla \psi_\varepsilon|^2, \eta_\varepsilon \leqslant 1,$$

这就证明了(1.100).

最后,我们证明 $\psi_\varepsilon \to \varphi_0$ 在 $H^1(\Omega)$ 中强收敛,事实上,φ_ε 在 $H^1(\partial\Omega)$ 中有界(1.81),且 $\varphi_\varepsilon \to \varphi_0$ 在 $\partial\Omega$ 上一致收敛推出 $\varphi_\varepsilon \to \varphi_0$ 在 $H^{1/2}(\partial\Omega)$ 中强收敛,由(1.93)推出 $\psi_\varepsilon \to \varphi_0$ 在 $H^1(\Omega)$ 中强收敛.

从(1.100)可知,$\{u_\varepsilon\}$ 在 H^1 中有界,因此,$u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup u$ 在H^1 中弱收敛.

由(1.100)和下半连续法知

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \leqslant \int_\Omega |\nabla \varphi_0|^2 = \int_\Omega |\nabla u_0|^2. \tag{1.101}$$

另一方面,

$$\int_\Omega (|u_\varepsilon|^2 - 1)^2 \leqslant C\varepsilon^2,$$

因此,$|u| = 1$,a.e., $u \in H_g^1(\Omega, S^1)$,基于(1.101),u 为(1.2)的极小元,即 $u = u_0, u_\varepsilon \to u_0$ 在 H^1 中强收敛来自

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \int |\nabla u_\varepsilon|^2 \leqslant \int |\nabla u_0|^2$$

和 u_0 的惟一性. 回到(1.100)和利用 $u_\varepsilon \to u_0$ 在 H^1 中的强收敛性. 可得(1.90).

step 2 (1.80)的证明.

由 step A.1 和 A.2 可证.

$|u_\varepsilon| \to 1$ 在 Ω 的任何紧子集上一致收敛. 现证

$$|u_\varepsilon| \to 1 \text{ 在 } \overline{\Omega} \text{ 上一致收敛}. \tag{1.102}$$

若不然,则存在序列 $\varepsilon_n \to 0, a_n \in \Omega$,使得

$$|u_{\varepsilon_n}(a_n)| \leqslant 1 - \delta, \delta > 0. \tag{1.103}$$

设 $a_n \to a, a \in \partial\Omega$,置 $u_n = u_{\varepsilon_n}, d_n = \mathrm{dist}(a_n, \partial\Omega)$.

我们断言

$$\frac{d_n}{\varepsilon_n} \to 0. \tag{1.104}$$

证 令 $r_n \leqslant \frac{1}{2} d_m$ 为待定正数序列,由(1.13) 可知

$$|\nabla u_n|^2 \leqslant C\left[\frac{1}{\varepsilon_n^2} + \frac{1}{\operatorname{dist}^2(x, \partial\Omega)}\right], x \in \Omega,$$

其中 C 为某绝对常数,特别有

$$|\nabla u_n(x)| \leqslant C\left[\frac{1}{\varepsilon_n} + \frac{1}{d_n}\right], \forall x \in B(a_n, r_n).$$

因此

$$|u_n(x) - u_n(a_n)| \leqslant Cr_n\left[\frac{1}{\varepsilon_n} + \frac{1}{d_n}\right], \forall x \in B(a_n, r_n).$$

推之, $|u_n(x)| \leqslant |u_n(a_n)| + Cr_n\left[\frac{1}{\varepsilon_n} + \frac{1}{dn}\right], \forall x \in B(a_n, r_n).$

因此

$$1 - |u_n(x)| \geqslant \delta - Cr_n\left[\frac{1}{\varepsilon_n} + \frac{1}{d_n}\right], \forall x \in B(a_n, r_n).$$

选取 r_n 使得

$$\delta - Cr_n\left[\frac{1}{\varepsilon_n} + \frac{1}{d_n}\right] \geqslant \frac{\delta}{2},$$

因此

$$(1 - |u_n|^2)^2 \geqslant \frac{\delta^2}{4}, \quad x \in B(a_n, r_n).$$

于是有

$$\int_\Omega (1 - |u_n|^2)^2 \geqslant \frac{\delta^2}{4} \pi r_n^2,$$

$$\frac{r_n}{\varepsilon_n} \to 0. \tag{1.105}$$

现选取 r_n,使得如下要求满足

$$\frac{r_n}{d_n} \leqslant \frac{1}{2}, \frac{r_n}{\varepsilon_n} \leqslant \frac{\delta}{4C}, \frac{r_n}{d_n} \leqslant \frac{\delta}{4C}.$$

例如可取

$$r_n = \min\left\{\frac{d_n}{2}, \frac{d_n\delta}{4C}, \frac{\varepsilon_n\delta}{4C}\right\}.$$

由(1.105) 推出(1.104).

现用 blow-up 原理证明(1.102),令

$$v_n(y) = u_n(d_n y + a_n), \quad y \in G_n = \frac{1}{d_n}(\Omega - a_n).$$

通过旋转,设

$$G_n \to G = (-1, +\infty) \times \mathbb{R},$$

v_n 满足

$$-\Delta v_n = \left(\frac{d_n}{\varepsilon_n}\right)^2 v_n(1 - |v_n|^2), x \in G_n, \tag{1.106}$$

且

$$\int_{G_n} |\nabla v_n|^2 = \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \leqslant C,$$

通过选取子序列,使 $v_n \to v$ 在 G 的一个紧子集上一致收敛,其中 v 满足

$$\Delta v = 0, x \in G \quad 由(1.104)和(1.106),$$

$$\int_G |\nabla v|^2 < \infty.$$

最后,因 $g_\varepsilon \to g$ 在 $\partial\Omega$ 上一致收敛,易知

$$v = g(a), x \in \partial G.$$

因此,在 G 上 $v \equiv g(a)$. 另一方面,$v_n(0) = u_n(a_n)$,于是 $|v_n(0)| \leqslant 1 - \delta$,因此 $|v(0)| \leqslant 1 - \delta$,它和 $|v(0)| = |g(a)| = 1$ 矛盾. (1.102) 得证.

(1.86) 的证明. 前面已写

$$u_\varepsilon = \rho_\varepsilon e^{i\varphi_\varepsilon}.$$

我们已证 $\rho_\varepsilon \to 1$ 在 $\overline{\Omega}$ 上一致收敛,再写(1.53) 为

$$-\operatorname{div}(\rho_\varepsilon^2 \nabla(\varphi_\varepsilon - \varphi_0)) = \operatorname{div}((\rho_\varepsilon^2 - 1)\nabla\varphi_0). \tag{1.107}$$

这个方程因 $\rho_\varepsilon \to 1$ 在 $\overline{\Omega}$ 上一致收敛为一致椭圆的,从椭圆型方程估计(见[9] 或[10]) 有

$$\|\varphi_\varepsilon - \varphi_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C[\|\varphi_\varepsilon - \varphi_0\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \|(\rho_\varepsilon^2 - 1)\nabla\varphi_0\|_{L^p(\Omega)}),$$

其中 $\forall p > 2$. 因 $g \in H^1(\partial\Omega), \varphi_0 \in H^{3/2}(\Omega)$, 因此 $\nabla\varphi_0 \in H^{1/2}(\Omega) \subset L^4(\Omega)$,我们推出 $\varphi_\varepsilon \to \varphi_0$ 在 $\overline{\Omega}$ 上一致收敛. 于是证明

了(1.86).

step 3. (1.87)和(1.88)的证明.

类似于前面的证明,step A.3,A4 和 A5 没有改变,由此可得

$$u_\varepsilon \text{ 在 } H^2_{\mathrm{loc}} \text{ 中有界}, \tag{1.108}$$

$$\nabla u_\varepsilon \text{ 在 } L^\infty_{\mathrm{loc}} \text{ 中有界}, \tag{1.109}$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2}(1-|u_\varepsilon|^2) \text{ 在 } L^\infty_{\mathrm{loc}} \text{ 中有界}, \tag{1.110}$$

$$\Delta u_\varepsilon \text{ 在 } L^\infty_{\mathrm{loc}} \text{ 中有界}. \tag{1.111}$$

其次证明,对任何正整数 k,

$$\|\nabla \varphi_\varepsilon\|_{C^k_{\mathrm{loc}}} \leqslant C, \tag{1.112}$$

$$\left\|\frac{1-\rho_\varepsilon}{\varepsilon^2}\right\|_{C^k_{\mathrm{loc}}} \leqslant C. \tag{1.113}$$

对 $k=0$,这些估计已建立(见(1.109)(1.110))用归纳法证. 由(1.112),(1.113)有

$$\varphi_\varepsilon \to \varphi_0, \text{在 } C^k_{\mathrm{loc}} \text{ 中}, \tag{1.114}$$

$$\rho_\varepsilon \to 1, \text{在 } C^k_{\mathrm{loc}} \text{ 中}. \tag{1.115}$$

这就推出 $u_\varepsilon = \rho_\varepsilon e^{i\varphi_\varepsilon} \to u_0$ 在 C^k_{loc} 中,这就证明了(1.87).

(1.88)的证明. 由 step B.7(18) 的证明,再用(1.75)式,由(1.113),(1.112)和(1.115)知

$$|\nabla \varphi_\varepsilon|^2 - |\nabla \varphi_0|^2 \to 0, \text{在 } C^k_{\mathrm{loc}} \text{ 中},$$

$$S_\varepsilon = 3\varepsilon^2 X_\varepsilon^2 - \varepsilon^4 X_\varepsilon^3 + (\rho_\varepsilon - 1)|\nabla \varphi_\varepsilon|^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \Delta(|\nabla u_0|^2) \to 0,$$

在 C^k_{loc} 中,另一方面,由(1.113)知 X_ε 在 C^k_{loc} 中有界,再利用一次引理 1.4 于 $\omega = D^k\left(X_\varepsilon - \frac{1}{2}|\nabla u_0|^2\right)$,有

$$\left\|X_\varepsilon - \frac{1}{2}|\nabla u_0|^2\right\|_{C^k_{\mathrm{loc}}} \to 0,$$

这就证明了(1.88).

§2 $\deg(g,\partial\Omega)\neq 0$ 的情形

现考虑极小问题

$$\min_{u\in H_g^1} E_\varepsilon(u), \tag{2.1}$$

其中

$$E_\varepsilon(u) = E_\varepsilon(u,\Omega) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_\Omega (1-|u|^2)^2,$$

$$u\in H_g^1(\Omega,\mathbb{R}^2) \equiv \{u\in H^1(\Omega;\mathbb{R}^2); u = g, x\in\partial\Omega\},$$

$$\deg(g,\partial\Omega) = d > 0.$$

(2.1) 相应的 Euler 方程为

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = \dfrac{1}{\varepsilon^2}u_\varepsilon(1-|u_\varepsilon|^2), & x\in\Omega, \\ u_\varepsilon = g, & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{2.2}$$

有如下主要结果.

定理 2.1 设 Ω 是星形的,则存在子序列 $\varepsilon_n\to 0$ 和恰好 d $(d>0)$ 个点 $a_1,a_2,\cdots,a_d\in\Omega$(在区域内,不在边界上)和光滑调和映射 $u_* = \Omega\setminus\{a_1,a_2,\cdots,a_d\}\to S^1$,使 $u_* = g$ 在边界上,使得

$$u_{\varepsilon_n}\to u_* \text{ 依 } C_{\mathrm{loc}}^k(\Omega\setminus\bigcup_i\{a_i\}) \text{ 收敛}, \forall k, \tag{2.3}$$

$$u_{\varepsilon_n}\to u_* \text{ 依 } C_{\mathrm{loc}}^{1,\alpha}(\overline{\Omega}\setminus\bigcup_i\{a_i\}) \text{ 收敛}, \forall \alpha<1. \tag{2.4}$$

更进一步有,每个奇点具有度为 $+1$,存在复常数$\{\alpha_i\}$, $|\alpha_i| = 1$,使得

$$\left|u_*(z) - \alpha_i\frac{(z-a_i)}{|z-a_i|}\right| \leqslant C|z-a_i|^2, z\to a_i, \forall i. \tag{2.5}$$

定理 2.2 设 a_i 为定理2.1所述,则 a_i 为函数$w(a,d,g)$在 Ω 上的极小,其中

$$w(a,d,g) = -\pi\sum_{i\neq j}\log|a_i-a_j| + \frac{1}{2}\int_{\partial G}\Phi(g\times g_\tau) - \pi\sum_{i=1}^d R(a_i), \tag{2.6}$$

这里 Φ 为如下线性 Neumann 问题的解，

$$\begin{cases} \Delta\Phi = 2\pi \sum_{i=1}^{d} \delta_{a_i}, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial\nu} = g \times g_\tau, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.7}$$

（ν 为 $\partial\Omega$ 的外法线，τ 为 $\partial\Omega$ 的单位切向量.）

$$R(x) = \Phi(x) - \sum_{i=1}^{d} \log|x - a_i|. \tag{2.8}$$

我们先证定理 2.1，我们首先简述一下证明的主要思想，然后再逐步予以证明，先用比较函数法证明能量具有上界

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon, \Omega) \leqslant \pi d|\log\varepsilon| + C, \tag{2.9}$$

其次对于 $|u_{\varepsilon_n}(x_j^{\varepsilon_n})| < \dfrac{1}{2}, n \geqslant N_0$ 有

$$x_j^{\varepsilon_n} \to a_1, \cdots, a_d.$$

再建立下界估计，$|u_{\varepsilon_n}| \geqslant \dfrac{1}{2}$.

$$E_{\varepsilon_n}(u_{\varepsilon_n}, B(a_j, \delta)) \geqslant \pi[|\log\varepsilon_n| - |\log\delta|] - C.$$

由于

$$\begin{aligned} \pi d|\log\varepsilon_n| + C &\geqslant E_{\varepsilon_n}(u_{\varepsilon_n}, \Omega) \\ &\geqslant E_{\varepsilon_n}(u_{\varepsilon_n}, G \setminus \bigcup_{j=1}^{d} B(a_j;\delta)) + E_{\varepsilon_n}(u_{\varepsilon_n}, \bigcup_{j=1}^{d} B(a_j, \delta)), \end{aligned}$$

最后建立估计

$$\int_{\Omega_\delta} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \leqslant C(\delta), \tag{2.10}$$

其中 $\Omega_\delta = \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{d} B(a_j, \delta)$，$C(\delta)$ 仅依赖于 δ, Ω 和 g，但与 ε_n 无关.

现在估计(2.9).

定理 2.3 估计(2.9) 成立，即对 $\varepsilon < \varepsilon_0$，有

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) < \pi d\log|\varepsilon| + C,$$

其中 u_ε 为

$$E_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_\Omega (|u|^2 - 1)^2$$

的极小元,

$$u \in H_g^1(\Omega;\mathbb{R}^2),$$

$$H_g^1(\Omega,\mathbb{R}^2) = \{u \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^2); u = g, x \in \partial\Omega\},$$

$g:\partial\Omega \to \mathbb{R}^2$, $|g(x)| = 1, \forall x \in \partial\Omega, \varepsilon_0$ 和 C 仅依赖于 ε 和 Ω.

证 记

$$g_d(x) = \frac{x - x_d}{|x - x_d|},$$

$$\tilde{g} = \begin{cases} g, \partial\Omega, \\ g_i(x), \partial B(x_i, R), \tilde{\Omega} = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^d B_R(x_i), \end{cases}$$

则 $\deg(\tilde{g}, \partial\tilde{\Omega}) = 0, \tilde{u} \in H^1(\tilde{\Omega}; S^1)$,记

$$I(t) = I(t, 1),$$

其中

$$I(\varepsilon, R) = \min_{u \in H_g^1}\left\{\frac{1}{2}\int_{B_R} |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_{B_R} (|u|^2 - 1)^2\right\}.$$

由伸缩变换易知

$$I(\varepsilon, R) = I\left(\frac{\varepsilon}{R}, 1\right) = I\left(\frac{\varepsilon}{R}\right) = I\left(1, \frac{R}{\varepsilon}\right).$$

可以证明

$$I(t_1) \leqslant \pi \log \frac{t_2}{t_1} + I(t_2), \quad \forall t_1 \leqslant t_2,$$

$$I(t) \leqslant \pi \log \frac{1}{t} + I(1), \quad \forall t \leqslant 1.$$

事实上,$I(t_1) = I\left(1, \frac{1}{t_1}\right)$,设 u_2 为 $I(t_2)$ 的极小元. 选取

$$u = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, \frac{1}{t_2} < |x| < \frac{1}{t_1}, \\ u_2, |x| \leqslant \frac{1}{t_2}, \end{cases} \in H^1_{\frac{x}{|x|}}(B_R(0)),$$

因此

$$I(t_1) \leqslant \frac{1}{2}\int_{B_{\frac{1}{t_1}}} |\nabla u|^2 + \frac{1}{4}\int_{B_{\frac{1}{t_1}}} (1-|u|^2)^2$$

$$= \frac{1}{2}\int_{B_{\frac{1}{t_2}}} |\nabla u_2|^2 + \frac{1}{4}\int_{B_{\frac{1}{t_2}}} (1-|u_2|^2)^2 + \frac{1}{2}\int_{B_{\frac{1}{t_1}}\setminus B_{\frac{1}{t_2}}} \left|\nabla \frac{x}{|x|}\right|^2$$

$$= I(t_2) + \frac{1}{2}\int_{B_{\frac{1}{t_1}}\setminus B_{\frac{1}{t_2}}} |\nabla\theta|^2 \mathrm{d}x \left(\nabla\theta = \frac{1}{|x|^2}(-x_2, x_1)\right)$$

$$= I(t_2) + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{t_2}}^{\frac{1}{t_1}} \frac{2\pi}{r}\mathrm{d}r$$

$$= I(t_2) + \pi\log\frac{t_2}{t_1}.$$

推出

$$I(\varepsilon, R) \leqslant C + \pi\log\frac{1}{\varepsilon}.$$

存在光滑映射 $v:\tilde{\Omega}\to S^1$,使得 $v = g, x\in\partial\Omega$,

$$v(x) = \begin{cases} \tilde{u}, \tilde{\Omega}, & \tilde{u}\,|_{\partial B_{\varepsilon}(x_i)} = g_i. \\ u_i, B_i. \end{cases}$$

我们有

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) \leqslant E_\varepsilon(v) = E_\varepsilon(v, \tilde{\Omega}) + \sum_{i=1}^{d} E_\varepsilon(u_i; B_i)$$

$$\leqslant C + \sum_{i=1}^{d} I(\varepsilon, R) = C + dI(\varepsilon, R)$$

$$\leqslant C + \pi d\log\frac{1}{\varepsilon}.$$

定理 2.3 得证.

定理 2.4 设 Ω 是星形区域($\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\nu}\geqslant\alpha>0, \forall x\in\partial\Omega$),则存在常数 $C=(\Omega, g)$ 使得对(2.2)的任何解 u_ε 有

$$\int_{\partial\Omega} \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_\Omega (1-|u_\varepsilon|^2)^2 \leqslant C. \tag{2.11}$$

证 以 $\boldsymbol{x}\cdot\nabla u_\varepsilon$ 乘(2.2)并在 Ω 上积分得(*Pohozaev* 恒等式

方法）

$$-\int \Delta u_\varepsilon(\boldsymbol{x}\cdot\nabla u_\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_\Omega u_\varepsilon(1-|u_\varepsilon|^2)(\boldsymbol{x}\cdot\nabla u_\varepsilon)$$
$$=\frac{1}{2\varepsilon^2}\int_\Omega(1-|u_\varepsilon|^2)x_i\partial_i|u_\varepsilon|^2$$
$$=-\frac{1}{4\varepsilon^2}\int_\Omega x_i\partial_i(1-|u_\varepsilon|^2)^2$$
$$=\frac{1}{2\varepsilon^2}\int_\Omega(1-|u_\varepsilon|^2),$$

$$-\int \Delta u_\varepsilon(\boldsymbol{x}\cdot\nabla u_\varepsilon)=-\int_\Omega \partial_j\partial_j u_j(x_i\partial_i u_\varepsilon)$$
$$=-\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{x}\cdot\nabla u_\varepsilon+\int_\Omega \partial_j u[\delta_{ij}v_j u_\varepsilon+x_i\partial_j\partial_i u_\varepsilon]$$
$$=-\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{x}\cdot\nabla u_\varepsilon)+\int_\Omega|\nabla u_\varepsilon|^2+\frac{1}{2}\int_\Omega x_i\partial_i$$
$$|\nabla u_\varepsilon|^2+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\nu})|\nabla u_\varepsilon|^2$$
$$=-\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{x}\cdot\nabla u_\varepsilon)+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\nu}|\nabla u_\varepsilon|^2.$$

于是有

$$-\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{x}\cdot\nabla u_\varepsilon)+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\nu})|\nabla u_\varepsilon|^2=\frac{1}{2\varepsilon^2}\int_\Omega(1-|u_\varepsilon|^2)^2. \tag{2.12}$$

因

$$\nabla u_\varepsilon=\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\tau}\tau+\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\nu}\nu,$$
$$\boldsymbol{x}\cdot\nabla u_\varepsilon=\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\tau}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\tau})+\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\nu}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\nu}),$$
$$|\nabla u_\varepsilon|^2=\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\tau}\right|^2+\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\nu}\right|^2.$$

由(2.12)得

$$-\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\nu}\right)^2(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\nu})-\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\nu}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\tau}(x\cdot\tau)+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\nu})\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\nu}\right|^2$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\nu})\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\tau}\right|^2=\frac{1}{2\varepsilon^2}\int(1-|u_\varepsilon|^2)^2,$$

即有

$$\frac{1}{2}\int_\Omega\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\nu}\right|^2(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\nu})+\frac{1}{2\varepsilon^2}\int_\Omega(1-|u_\varepsilon|^2)^2$$

$$=-\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\nu}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\tau}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\tau})+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\nu})\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\tau}\right|^2,\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\nu}\geqslant\alpha>0.$$

由此可得

$$\frac{\alpha}{2}\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\nu}\right|^2+\frac{1}{2\varepsilon^2}\int_\Omega(1-|u_\varepsilon|^2)^2\leqslant\frac{\alpha}{4}\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\nu}\right|^2+C\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial g}{\partial\tau}\right|^2.$$

现考虑所谓“好圆盘”及“坏圆盘”,及其上的性质.

定理 2.5 存在 $\lambda_0=\lambda_0(\Omega,g)>0,\mu_0=\mu_0(\Omega,g)>0$,使得只要 $\frac{l}{\varepsilon}\geqslant\lambda_0,l\leqslant1$,就有

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{B_l\cap\Omega}(1-|u_\varepsilon|^2)^2\leqslant\mu_0.$$

那么

$$|u_\varepsilon(x)|\geqslant\frac{1}{2},x\in B_l\cap\Omega,\tag{2.13}$$

其中 B_l 为 R^2 中半径为 l 的圆盘.

证 首先与以前一样有 $|\nabla u_\varepsilon|\leqslant\frac{C}{\varepsilon}$, 因此

$$|u_\varepsilon(x)-u_\varepsilon(y)|\leqslant\frac{C}{\varepsilon}|x-y|.$$

反设,有 $x_0\in B_l\cap\Omega$,使 $|u_\varepsilon(x_0)|<\frac{1}{2}$,则由上式有

$$|u_\varepsilon(x)|\leqslant\frac{1}{2}+\frac{C}{\varepsilon}\rho,x\in\Omega\cap B_\rho(x_0).$$

于是

$$1-|u_\varepsilon|^2\geqslant1-|u_\varepsilon|\geqslant\frac{1}{2}-\frac{C}{\varepsilon}\rho,x\in\Omega\cap B_\rho(x_0).$$

取 $\rho=\frac{\varepsilon}{4C}$,则有

$$1-|u_\varepsilon|^2 \geqslant \frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}, x \in \Omega \cap \frac{B_\varepsilon}{4C}(x_0).$$

但存在 $\alpha > 0$,使

$$\mathrm{mes}(B_r(x) \cap \Omega) \geqslant \alpha r^2, x \in \Omega.$$

因$\frac{\varepsilon}{4C} \leqslant 1$,当 $x_0 \in B_l, \frac{\varepsilon}{4C} \leqslant l$ 时,$B_{\frac{\varepsilon}{4C}}(x_0) < B_{2l}$,因此

$$\int_{\Omega \cap B_l} (1-|u_\varepsilon|^2)^2 \geqslant \frac{\alpha\varepsilon^2}{(16C)^2}.$$

于是,当 $\lambda_0 = \frac{1}{4C}, \mu_0 < \frac{\alpha}{(16C)^2}$ 时,$\frac{l}{\varepsilon} \geqslant \lambda_0, l \leqslant 1$,推出

$$\mu_0 \geqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega \cap B_{2l}} (1-|u_\varepsilon|^2)^2 > \mu_0.$$

由矛盾定理得证.

把 u_ε, g 延拓到Ω' 上,$\Omega \subset\subset \Omega'$,分别记为 $u_\varepsilon, \overline{g}$,

$$\begin{cases} |\overline{g}| = 1, & x \in \Omega' \setminus \Omega, \\ \overline{g} = g, & x \in \partial\Omega, \\ u_\varepsilon = g, & x \in \Omega' \setminus \Omega. \end{cases}$$

考虑$\{B(x_i, \lambda_0\varepsilon)\}_{\lambda \in I}$,使得当 $x_i \in \Omega$ 时有

$$B\left(x_i, \frac{\lambda_0\varepsilon}{4}\right) \cap B\left(x_i, \frac{\lambda_0\varepsilon}{4}\right) \neq \varnothing, \forall i \neq j,$$

$$\bigcup_{i \in I} B(x_i, \lambda_0\varepsilon) \supset \Omega.$$

定义 称 $B(x, \lambda_0\varepsilon)$ 为好圆盘,如$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{B(x, 2\lambda_0\varepsilon)} (1-|u_\varepsilon|^2)^2 \leqslant \mu_0$(此时有 $|u_\varepsilon| \geqslant \frac{1}{2}, x \in B(x_0, \lambda_0\varepsilon)$),否则,即

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{B(x, 2\lambda_0\varepsilon)} (1-|u_\varepsilon|^2)^2 > \mu_0,$$

称为坏圆盘.

令 $J = \{j \in J : B(x_j, \lambda_0\varepsilon)$ 为坏圆盘$\}$.

引理 2.6 存在正整数 $N = N(g, \Omega)$,与 ε 无关,使得

$$\mathrm{card}\, J \leqslant N. \tag{2.14}$$

证 存在绝对常数 C 使得

$$\sum_{i\in I}\int_{B(x_i,2\lambda_0\varepsilon)}(1-|u_\varepsilon|^2)^2\leqslant C\int_\Omega(1-|u_\varepsilon|^2)^2,$$

这是因为 Ω 中的每一个点能为 C 个圆盘 $B(x_i,2\lambda_0\varepsilon)$ 所遮盖.从上式坏圆盘的定义,以及定理 2.4 有

$$\mu_0\text{card } J\leqslant\frac{C}{\varepsilon^2}\int_\Omega(1-|u_\varepsilon|^2)^2\leqslant C,$$

由此即得(2.14).

引理 2.7 我们有

$$|u_\varepsilon(x)|\geqslant\frac{1}{2},\forall x\in\Omega'\setminus\bigcup_{j\in J}B(x_j,\lambda_0\varepsilon).$$

证 设 $x\in\Omega-\bigcup_{j\in J}B(x_i,\lambda_0\varepsilon)$,则存在 $j\in I\setminus J$ 使得

$$x\in B(x_j,\lambda_0\varepsilon),\text{它是好圆盘},$$

由定理 2.5 得 $|u_\varepsilon(x)|\geqslant\frac{1}{2}$.

下面我们置坏圆盘 $B(x_i,\lambda_0\varepsilon)_{i\in J}$ 以最大的圆盘使奇点拉开.

定理 2.8 能选取子集 $J'\subset J$,和常数 $\lambda\geqslant\lambda_0$,仅依赖于 g 和 Ω,使得

$$|x_i-x_j|\geqslant\delta\lambda\varepsilon,\forall ij\in J',i\neq j,\tag{2.15}$$

$$\bigcup_{i\in J}B(x_i,\lambda_0\varepsilon)\subset\bigcup_{\lambda\in J'}B(x_i,\lambda\varepsilon).\tag{2.16}$$

证 对 card J 进行归纳法证明,首先前面已证 card $J\leqslant 1$,如(2.15),对 $J'=J,\lambda=\lambda_0$ 成立,则已证.否则设有 x_1,x_2,使得

$$|x_1-x_2|<8\lambda_0\varepsilon,\tag{2.17}$$

则取 $\lambda=9\lambda_0,J'=J\setminus\{1\}$,通过有限步(至多为 N 步),则可得到定理结论,$\lambda_0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_0 9^{\text{card }J}\leqslant\lambda_0 9^N$.

现考虑坏圆盘中心的聚点,任给 $\varepsilon_n\to 0$,可选子列 ε_n 使 card $J_{\varepsilon_n}=\text{const}=N_1,x_i=x_i^{\varepsilon_n}\to l_i\in\overline{\Omega},i=1,2,\cdots,N_1$. $l_1,l_2,\cdots,l_{N_1}$ 中不重复的点集记作 $a_1,\cdots,a_{N_2},N_2\leqslant N_1\leqslant N$.然后希望证明:

(1) $\int_K|\nabla u_{\varepsilon_n}|^2\mathrm{d}x$ 有界,$\forall K\subset\subset\overline{\Omega}\setminus\bigcup_{\lambda=1}^{N_2}\{a_i\}$,

(2)$a_j \in \partial\Omega$,

(3) 具有更强的收敛性.

现估计在离开奇点的紧区域上 u_ε 的能量上界.

令 $\Lambda_j = \{j : x_j^{\varepsilon_n} \to a_j\}$, $a_i \neq a_j$, $i = 1, \cdots, N_2$, 固定 $\eta > 0$, $\eta < \operatorname{dist}(\Omega, \partial\Omega')$, $\eta < \frac{1}{2}|a_i - a_j|$, $i \neq j$, 则

$B(a_i, \eta) \subset\subset \Omega'$, $i = 1, \cdots, N_2$, 且彼此分开.

显然, 对于充分大的 n, 存在 $N(\eta) > 0$, 当 $n > N(\eta)$ 时, 有

$$\bigcup_{i \in J} B(x_i^{\varepsilon_n}, \lambda\varepsilon_n) \subset \bigcup_j B(a_j, \eta/4). \tag{2.18}$$

以下用 x 代替 $x_i^{\varepsilon_n}$, 显然

$$|u_{\varepsilon_n}(x)| \geqslant \frac{1}{2}, x \in \partial B(a_j, \eta/2), n \geqslant w(\eta).$$

因此

$$\deg(u_{\varepsilon_n}, \partial B(a_j, \eta/2))$$

是确定的, 且由如下引理它保持有界, $n \to \infty$.

引理 2.9 $\forall j \in J$, 我们有

$$|\deg(u_\varepsilon, \partial B(x_i^\varepsilon, \lambda\varepsilon))| \leqslant C, \tag{2.19}$$

其中常数 C 与 ε 无关.

证
$$\begin{aligned}\deg(u_\varepsilon, \partial B(x_j^\varepsilon, \lambda\varepsilon)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B(x_j^\varepsilon, \lambda\varepsilon)} \frac{u_\varepsilon}{|u_\varepsilon|} \Lambda \left(\frac{u_\varepsilon}{|u_\varepsilon|} \right)_\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B(x_j^\varepsilon, \lambda\varepsilon)} \frac{u_\varepsilon}{|u_\varepsilon|^2} \Lambda u_{\varepsilon_t} \\ &\leqslant \frac{4}{2\pi} \int_{\partial B(x_j^\varepsilon, \lambda\varepsilon)} \frac{C}{\varepsilon} \leqslant C.\end{aligned}$$

于是定义

$$d_j = \deg(u_{\varepsilon_n}, \partial B(x_j^{\varepsilon n}, \lambda_{\varepsilon n})),$$

$$K_j = \deg(u_{\varepsilon_n}, \partial B(a_i, \eta)),$$

均与 ε_n 无关, 且 $K_j = \sum_{j \in \Lambda i} d_j$.

定理 2.10 存在常数 $C = C(g,\Omega)$ 与 η, n 无关,使得当 $n \geqslant N(\eta)$ 时有

$$\int_{\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{N} B(a_i,\eta)} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \leqslant 2\pi d |\log\eta| + C. \tag{2.20}$$

推论 2.11 存在常数 C 与 η, n 无关使得

$$\int_{\Omega_i} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \geqslant 2\pi |K_i| \log\frac{\eta}{\varepsilon_n} - C, \tag{2.21}$$

其中

$$\Omega_i = B(a_i,\eta) \setminus \bigcup_{j\in\Lambda_i} B(x_j^{\varepsilon_n}, \lambda\varepsilon_n).$$

推论 2.12 如果 $d_j \geqslant 0, j \in \Lambda_i$,则

$$\int_{\Omega_i} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \geqslant 2\pi\Big(\sum_{j\in\Lambda_i} d_i^2\Big)\log\frac{\eta}{\varepsilon_n} - C. \tag{2.22}$$

定理 2.13 存在常数 C 与 η, n 无关,使得

$$\int_{\Omega_i} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \geqslant 2\pi |K_i| \log\frac{\eta}{\varepsilon_n} - C. \tag{2.23}$$

定理 2.13 的证明,令

$$u_0(Z) = \prod_{j\in\Lambda_i}\left(\frac{Z - X_j^{\varepsilon_n}}{|Z - X_j^{\varepsilon_n}|}\right)^{d_j}$$

为典则调和映照. $u_0 \in S^1$,且 $\deg(u_0)\partial B(x_i^{\varepsilon_n}, \lambda\varepsilon_n) = d_i$

断言 1.

$$\int_{\Omega_i} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \geqslant \int_{\Omega_i} |\nabla u_0|^2 - C. \tag{2.24}$$

断言 2.

$$\int_{\Omega_i} |\nabla u_0|^2 \geqslant 2\pi |K_i| \log\frac{\eta}{\varepsilon_n} - C. \tag{2.25}$$

在(2.24),(2.25)中,常数 C 均与 η, n 无关,显然由断言 1,2 即得定理 2.13 的证明.

我们先证断言 1,设 B_R 为中心为原点半径为 R 的圆盘. p_1,

$p_2, \cdots, p_m$ 为 B_R 中的点使得

$$|p_j| \leqslant \frac{R}{2}, \quad \forall j, \tag{2.26}$$

$$|p_j - p_k| \geqslant 4R_0, \forall j, k, j \neq k, \tag{2.27}$$

其中 $R_0 \leqslant \frac{R}{4}$. 置

$$\Omega = B_R \setminus \bigcup_{j=1}^{m} B(p_j, R_0).$$

设 u 为光滑映照:$\Omega \to \mathbb{C}$,且作如下假设

$$0 < a \leqslant |u| \leqslant 1, x \in \Omega, \tag{2.28}$$

$$\frac{1}{R_0^2}\int_{\Omega}(|u|^2 - 1)^2 \leqslant K, \tag{2.29}$$

其中 a 和 K 为常数,由(2.28)可知

$$d_j = \deg(u, \partial B(p_j; R_0))$$

是有定义的,考虑"参考映照"

$$u_0(Z) = \prod_{j=1}^{m}\left(\frac{Z - p_j}{|Z - p_j|}\right)^{d_j}.$$

我们有如下定理.

定理 2.14 设(2.28)—(2.29)成立,则有

$$\int_{\Omega}|\nabla u|^2 \geqslant \int_{\Omega}|\nabla u_0|^2 - C\|d\|^2 \cdot m^2, \tag{2.30}$$

其中 $\|d\| = \max_j |d_j|$,C 为常数,仅依赖于 a 和 K,更详细些,如置 $\rho = |u|$,则存在单值函数 $\psi: \Omega \to \mathbb{R}$ 使得

$$u = \rho u_0 e^{i\psi}, x \in \Omega$$

和

$$\int_{\Omega}|\nabla u|^2 \geqslant \int_{\Omega}|\nabla \rho|^2 + \int_{\Omega}|\nabla u_0|^2 + \frac{a^2}{2}\int_{\Omega}|\nabla \psi|^2 - C\|d\|^2 m^2, \tag{2.31}$$

其中常数仅依赖于 a 和 K.

先证一个简单的引理.

引理 2.15 给定函数 ψ 定义在 $B_{2R_0} \setminus B_{R_0}$,则存在 ψ 的一个

扩张 $\overline{\psi}$,定义在 B_{2R_0},使得

$$\int_{B_{2R_0}} |\nabla \overline{\psi}|^2 \leqslant C \int_{B_{2R_0} \setminus B_{R_0}} |\nabla \psi|^2. \tag{2.32}$$

证 由伸缩变换,设 $R_0 = 1$,附加一个常数于 ψ 使得

$$\int_{B_2 \setminus B_1} \psi = 0.$$

于是由 Poincarè 不等式推出

$$\int_{B_2 \setminus B_1} |\psi|^2 \leqslant C \int_{B_2 \setminus B_1} |\nabla \psi|^2.$$

再扩张 ψ 于 B_1,由标准的反射和截断技巧得到.

定理 2.14 的证明,置 $\rho = |u|$,局部表示

$$u = \rho e^{i\varphi},$$

则有

$$|\nabla u|^2 = |\nabla \rho|^2 + \rho^2 |\nabla \varphi|^2. \tag{2.33}$$

类似地,局部表示

$$u_0 = e^{i\varphi_0}$$

具有 $|\nabla u_0| = |\nabla \varphi_0|$,

$$\nabla \varphi_0(z) = \sum_j \frac{d_j V_j(z)}{|z - z_j|}, \tag{2.34}$$

其中 $V_j(z)$ 为单位向量,它和以 ρ_j 为中心,以 $|z - \rho_j|$ 为半径的圆相切,有

$$V_j(z) = \left(-\frac{y - \rho_j}{|z - \rho_j|}, \frac{x - \rho_j}{|z - \rho_j|}\right). \tag{2.35}$$

为方便引入在 Ω 上整体定义的函数 ψ,

$$u = \rho u_0 e^{i\psi}, \tag{2.36}$$

因此

$$|\nabla u|^2 = |\nabla \rho|^2 + \rho^2 |\nabla \varphi_0 + \nabla \psi|^2, \tag{2.37}$$

推之

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \geqslant \int_\Omega |\nabla \rho|^2 + \rho^2 |\nabla u_0|^2 + 2\rho^2 \nabla \varphi_0 \cdot \nabla \psi + \rho^2 |\nabla \psi|^2$$

$$\geqslant \int_{\Omega} |\nabla \rho|^2 + \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 + \int a^2 |\nabla \psi|^2 - X,$$

$$a \leqslant \rho \leqslant 1, \tag{2.38}$$

其中

$$X = \int_{\Omega}(1-\rho^2)|\nabla u_0|^2 + \int_{\Omega} 2(1-\rho^2)\nabla \varphi_0 \cdot \nabla \psi - \int_{\Omega} 2\nabla \varphi_0 \nabla \psi$$

$$= X_1 + X_2 + X_3.$$

先估计 X_1,我们有

$$|\nabla u_0| = |\nabla R| \leqslant \sum_{j=1}^{m} \frac{|d_j|}{|z-\rho_j|}. \tag{2.39}$$

因此

$$\| \nabla u_0 \|_4 \leqslant \| d \| \sum_j \left\| \frac{1}{z-\rho_j} \right\|_4 \leqslant \| d \| m \left(\frac{\pi}{R_0^2} \right)^{1/4}. \tag{2.40}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式,(2.40) 和(2.29) 可得

$$|X_1| \leqslant K^{1/2} \| d \|^2 m^2 \pi^{1/2}. \tag{2.41}$$

估计 X_2,从(2.34) 有

$$|\nabla \varphi_0| \leqslant \frac{m \| d \|}{R_0}. \tag{2.42}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式和(2.42) 得

$$|X_2| \leqslant 2\int (1-\rho^2)|\nabla \varphi_0||\nabla \psi| \leqslant 2K^{1/2} m \| d \| \, \| \nabla \psi \|_2. \tag{2.43}$$

估计 X_3,我们有

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi_0 \nabla \psi = \sum_j d_j \int_{\Omega} \frac{V_j \cdot \nabla \psi}{|z-\rho_j|}.$$

扩张 ψ 在每个圆盘$B(p_j, R_0)$ 的内部,由引理(2.16) 得

$$\int_{\Omega} \frac{V_j \cdot \nabla \psi}{|z-p_j|} = \int_{B_R \setminus B(p_j, R_0)} \frac{V_j \nabla \Psi}{|z-p_j|} - \sum_{k \neq j} \int_{B(p_k, R_0)} \frac{V_j \cdot \nabla \Psi}{|z-p_j|}, \forall j, \tag{2.44}$$

当 $k \neq j$ 时,

$$\left| \int_{B(p_k, R_0)} \frac{V_j \cdot \nabla \overline{\psi}}{|z - p_j|} \right| \leqslant \frac{1}{R_0} \int_{B(p_k, R_0)} |\nabla \overline{\psi}|, \tag{2.45}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式和引理 2.15 有

$$\left| \sum_{k \neq j} \int_{B(p_k, R_0)} \frac{V_j \cdot \nabla \overline{\psi}}{|z - p_j|} \right| \leqslant C(m - 1) \| \nabla \overline{\psi} \|_2, \tag{2.46}$$

其中 C 为某绝对常数.

考虑以 p_j 为中心, $R - |p_j|$ 为半径的圆 $\subset B_R(0)$, 当 $r \in (0, R - |p_j|)$ 时, 在 $S_r = \partial B_r(p_j)$ 上, $V_j = \tau$(切向). 因此

$$\frac{1}{r} \int_{S_r(p_j)} V_j \cdot \nabla \overline{\psi} = \frac{1}{r} \int_{S_r} \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial \tau} = 0.$$

对于 $\rho_j = R - |p_j|$, 我们有

$$\left| \int_{B_R(0) \setminus B_{R_0}(p_j)} \frac{V_j \nabla \overline{\psi}}{|z - p_j|} \right| = \left| \int_{B_R(0) \setminus B_{\rho_j}(p_j)} + \int_{B_{\rho_j}(p_j) \setminus B_{R_0}(p_j)} \right|$$

$$= \left| \int_{B_R(0) \setminus B_{\rho_j}(p_j)} \frac{V_j \nabla \overline{\psi}}{|z - p_j|} \right| \leqslant \frac{1}{\rho_j} \int_{B_R \setminus B(p_j, \rho_j)} |\nabla \overline{\psi}|$$

$$\leqslant \frac{1}{p_j} \| \nabla \overline{\psi} \|_2 (\pi R^2 - \pi \rho_j^2)^{1/2}.$$

因此可得

$$\int_{B_R(0) \setminus B(p_j, R_0)} \frac{V_j \nabla \overline{\psi}}{|z - p_j|} \leqslant C \| \nabla \psi \|_2. \tag{2.47}$$

联合(2.44),(2.46) 和(2.47) 有

$$|X_3| \leqslant Cm \| d \| \| \nabla \psi \|_2. \tag{2.48}$$

连同(2.41),(2.43),(2.48) 可得

$$|X| \leqslant CK^{1/2} \| d \|^2 m^2 + \| d \| m \| \nabla \psi \|_2 (2K^{1/2} + C)$$

$$\leqslant \frac{1}{2} a^2 \| \nabla \psi \|_2^2 + \frac{\| d \|^2}{a^2} m^2 (4K + C).$$

回到(2.40) 可得

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \geqslant \int_\Omega |\nabla \rho|^2 + \int_\Omega |\nabla u_0|^2 + \frac{a^2}{2} \int |\nabla \psi|^2$$

$$-\frac{\| d \|^2}{a^2} m^2(4K + C),$$

其中 C 为某绝对常数,(2.31) 成立,断言 1 也得证.

为证断言 2,利用[1,推论 Ⅱ,1],即有

引理 2.16 设 $G \subset \mathbb{R}^2$ 为有界开集,$\omega_i = B(x_i, \rho), i = 1, 2, \cdots, n, \Omega = G \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \omega_i, d_i \in \mathbb{Z}, d = \sum_{i=1}^{n} d_i$,如满足条件

(1) $\operatorname{dist}(x_i, \partial G) \geqslant 2\mu$,

(2) $\rho \leqslant \frac{1}{2} \operatorname{dist}(x, \partial G)$,

(3) $\delta\rho \leqslant |x_i - x_j| \ (i \neq j)$,

$\mathscr{E} = \{v \in H^1(\Omega; S^1), \deg(v, \partial G) = d, \deg(v, \partial w_i) = d_i\}$,

则对 $v \in \mathscr{E}$ 有

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \geqslant 2\pi |d| \log \frac{\pi}{\mu} - C, \tag{2.49}$$

其中常数 C 依赖于 $\sum_{i=1}^{n} |d_i|$, $\operatorname{diam} G/\mu$,和 n.

对于 $u_0 \in S^1, \deg(u_0, \partial B(x_k^{\varepsilon_n}, \lambda_{\varepsilon_n})) = d_i$,则由(2.11) 即得

$$\int_{\Omega_j} |\nabla u_0|^2 \geqslant 2\pi |k_j| \log(n/\varepsilon_n) - C, \tag{2.50}$$

断言 2 得证.

现证定理 2.10,为此我们需要某些准备的引理和定理.

引理 2.17 我们有

$$k_j \geqslant 0, \forall j.$$

证 由定理 2.13,可知

$$\int_{\Omega_j} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \geqslant 2\pi |k_j| |\log \varepsilon_n| - C(\eta), \tag{2.51}$$

因此

$$\sum_j \int_{\Omega_j} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \geqslant 2\pi |\log \varepsilon_n| \sum_j |k_j| - C(\eta). \tag{2.52}$$

另一方面,由定理 2.3 有

$$\int_G |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \leqslant 2\pi |\log\varepsilon_n| + C. \tag{2.53}$$

联合(2.51) 和(2.52) 得

$$\sum_j |k_j| \leqslant d + \frac{C(\eta)}{|\log \varepsilon_n|}.$$

令 $n \to \infty$(因 K_j 与 n 无关) 得

$$\sum_j |K_j| \leqslant d.$$

另一方面有

$$\sum_j k_j = d.$$

由此推得 $k_j \geqslant 0, \forall j$.

定理 2.18 存在常数 $C = C(g, G)$,使得

$$\int_G |\nabla u_\varepsilon|^2 \geqslant 2\pi d |\log\varepsilon| - C, \forall \varepsilon \leqslant 1. \tag{2.54}$$

证 若不然,(2.54) 不成立,则存在序列 $\varepsilon_n \leqslant 1$,使得

$$\int_G |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 - 2\pi d |\log \varepsilon_n| \to -\infty. \tag{2.55}$$

由定理 2.13 和引理 2.16 有

$$\int_{\Omega_j} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \geqslant 2\pi k_j \log\left(\frac{\eta}{\varepsilon_n}\right) - C.$$

对 j 求和得

$$\int_{\bigcup_j \Omega_j} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \geqslant 2\pi d \log\left(\frac{\eta}{\varepsilon_n}\right) - C, \tag{2.56}$$

这与(2.55) 矛盾,其中 η 为固定,定理得证.

定理 2.10 的证明. 联合(2.56) 和定理 2.3 的上界,即得

$$\int_{G\setminus \bigcup_j B(a_j,\eta)} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \leqslant 2\pi d |\log\eta| + C,$$

定理得证.

前面我们已经知道,存在一个极小元子序列 $\{u_{\varepsilon_n}\}$ 和有限集

$\{a_j\}_{j=1}^{N_2}\in\Omega$ 使得对每一个紧集 $K\subset\Omega'\setminus\sum_{j=1}^{N_2}\{a_j\}$,

$$\int_K |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2\leqslant C_K, \tag{2.57}$$

$$|u_{n(x)}|\geqslant\frac{1}{2},\forall x\in K, \tag{2.58}$$

$$u_{\varepsilon_n}\to u_*,a,e\ 在\ \Omega\ 上, \tag{2.59}$$

$$u_{\varepsilon_n}\to u_*,在\ H^1(K)\ 上弱收敛, \tag{2.60}$$

$$\int_\Omega(|u_{\varepsilon_n}|^2-1)^2\leqslant C\varepsilon_n^2, \tag{2.61}$$

推出 $|u_*|=1$,a.e. 且 $u_*=\bar{g},x\in\Omega'\setminus\Omega,\overline{\Omega}\subset\Omega'$.

我们要证明的主要结果为

定理 2.19 我们有

$$u_*\in C^\infty(\Omega\setminus\bigcup_{j=1}^{N_2}\{a_j\};S^1), \tag{2.62}$$

u_* 为调和映照,即

$$-\Delta u_*=u_*|\nabla u_*|^2,x\in\Omega\setminus\sum_{j=1}^{N_2}\{a_j\}, \tag{2.63}$$

$$u_*=g,x\in\partial\Omega, \tag{2.64}$$

$$\deg(u_*,a_j)\geqslant 0,\forall j, \tag{2.65}$$

$$\sum_j\deg(u_*,a_j)=d. \tag{2.66}$$

对于每一个紧子集 $K\subset\Omega\setminus\bigcup_{j=1}^{N_2}\{a_j\}$ 和任何正整数 k 有

$$u_{\varepsilon_n}\to u_*,在\ C^k(K)\ 中, \tag{2.67}$$

$$\frac{1-|u_{\varepsilon_n}|^2}{\varepsilon_n^2}\to|\nabla u_*|^2\ 在\ C^k(\Omega)\ 中, \tag{2.68}$$

$$u_{\varepsilon_n}\to u_*\ 在\ C^{1,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}\setminus\bigcup_{j=1}^{N_2}\{a_j\}),\forall\alpha<1. \tag{2.69}$$

定理 2.19 的证明. 固定 $x_0\in\Omega\setminus\bigcup_{j=1}^{N_2}\{a_j\}$,选取 $R>0$ 使得

$\overline{B(x_0,2R)} \subset \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{N_2}\{a_j\}$,因

$$\int_{B(x_0,2R)} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \leqslant C,$$

利用 Fubini 定理,能找到 $R' \in (R,2R)$ 使得

$$\int_{\partial B(x_0,R')} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \leqslant C_1. \tag{2.70}$$

$$\int_{\partial B(x_0,R')} (|u_{\varepsilon_n}|^2 - 1)^2 \leqslant C_1 \varepsilon_n^2. \tag{2.71}$$

由(2.70)和(2.59)推出

$$u_{\varepsilon_n} \to u_* \text{ 在 } \partial B(x_0,R') \text{ 中一致收敛}.$$

因

$$\deg(u_{\varepsilon_n},\partial B(x_0,R')) = 0,$$

且 $|u_{\varepsilon_n}| \geqslant \frac{1}{2}, x \in B(x_0,R')$,可得

$$\deg(u_*,\partial B(x_0,R')) = 0. \tag{2.72}$$

由此和前面第 §1 可推出(2.61),(2.63),(2.67),(2.68). 性质(2.66)来自 u_* 远离奇点是光滑的,$|u_*| = 1, \deg(g,\partial\Omega) = \deg(u_*,\partial\Omega) = d$.

现证(2.67),$\deg(u_*,a_j) \geqslant 0, \forall j$.

前面引理 2.17 已证 $k_j = \deg(u_{\varepsilon_n},\partial B(a_j,\eta)) \geqslant 0$, 要证(2.65),只要证 $u_j = \deg(u_*,a_j)$,如果 $a_j \in \Omega$,由于(2.67)成立,

则 $k_j = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B(a_j,\eta)} \frac{u_{\varepsilon_n}}{|u_{\varepsilon_n}|^2} \times (u_{\varepsilon_n})_\tau \to \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B(a_j,\eta)} u_* \times u_{*\tau} =$ $\deg(u_*,a_j)$.

如果 $a_j \in \partial\Omega$,则能选取 $R' > 0$,使得

$$\int_{\partial B(a_j,R')} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \leqslant C,$$

且使得 $\overline{B(a_j,R')}$ 不含有奇性,同上.

$$u_{\varepsilon_n} \to u_* \text{ 在 } \partial B(a_j, R') \text{ 一致收敛.}$$

于是当 n 充分大时,

$k_j = \deg(u_{\varepsilon_n}, \partial B(a_j, R')) = \deg(u_*, \partial B(a_j, R')) \geqslant 0.$

(2.69) 的证明分两步:

step 1 证 $u_{\varepsilon_n} \to u_*$ 在 $H^1_{\text{loc}}(\Omega' \setminus \bigcup_{j=1}^{N_2} \{a_j\})$ 内,

$u_{\varepsilon_n} \to u_*$ 在 $C^0(\Omega' \setminus \bigcup_{j=1}^{N_2} \{a_j\})$ 内.

只要证, $X_0 \in \partial\Omega$, X_0 不是奇点 a_j, 且对某个 $R^1 > 0$, 有

$u_{\varepsilon_n} \to u_*$ 在 $H^1(B(x_0, R^1) \cap \Omega)$ 和 $C^0(\overline{B(x_0, R^1)} \cap \Omega)$ 内.

实际上, 固定 $R < \frac{1}{2}\text{dist}(\Omega, \partial\Omega')$, $B(x_0, 2R)$ 不含有任何奇点, 由 Fubini 定理, 可找到 $R' \in (R, 2R)$, 使得

$$\int_{\partial B(x_0, R')} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \leqslant C,$$

$$\int_{\partial B(x_0, R')} (|u_{\varepsilon_n}|^2 - 1) \leqslant C\varepsilon_n^2.$$

因 $\deg(u_{\varepsilon_n}, \partial B(x_0, R')) = 0$, 由前面第一节可知,

$$u_{\varepsilon_n} \to u_* \text{ 在 } H^1(l \cap B(x_0, R')) \cap C^0(\overline{\Omega \cap B(x_0, R')}),$$

且

$$\frac{1}{\varepsilon_n^2} \int_{B(x_0, R')} (|u_{\varepsilon_n}|^2 - 1)^2 \to 0.$$

step 2 $u_{\varepsilon_n} \to u_*$ 在 $C^{1,\alpha}_{\text{loc}}(\overline{\Omega} \setminus \bigcup_{j=1}^{N_2} \{a_j\})$.

不妨认为 $a_i \notin \Omega$, $i = 1, \cdots, N_2$. 当 $\delta > 0$ 充分小时, $B(a_i, \delta) \subset \Omega$, $B(a_i, \delta) \cap B(a_j, \delta) = \phi$, 令

$$U = \Omega \setminus \sum_{i=1}^{N_2} B(a_i, \delta).$$

由 step 1 可知, $u_{\varepsilon_n} \to u_*$ 在 $H^1(U)$ 和 $C^0(\overline{U})$ 中, 现证 u_ε 在

$H^2(U)$ 中有界.因

$$-\Delta u_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} u_\varepsilon (1 - | u_\varepsilon |^2),$$

记

$$\psi = \frac{1}{\varepsilon^2}(1 - | u_\varepsilon |^2).$$

我们有

$$-2\varepsilon^2 \Delta\psi + \psi \leqslant 4 | \Delta u_\varepsilon |^2 \text{ 在 } U \text{ 中}.$$

两边乘以 ψ^{q-1}, $\forall q > 2$,有

$$\int_U \psi^q \leqslant 4\int_U | \nabla u_\varepsilon |^2 \psi^{q-1} + 2\varepsilon^2 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\nu}} \psi^{q-1}.$$

分 ∂U 为两部分,$\partial U = \Gamma \cup \partial\Omega$,注意到

$$\psi = 0, x \in \partial\Omega,$$

$$\varepsilon^2 \left| \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right| \psi^{q-1} \leqslant C, x \in \Gamma.$$

这是因为由(2.68),ψ 在 $L^\infty(\Gamma)$ 中有界,而 $\varepsilon^2 \dfrac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\nu}} = -\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} | u |^2$,由(2.67) 在 $L^\infty(\Gamma)$ 中有界,由此推出 ψ 在 $L^\infty(U)$ 中有界.

以下证明 u_* 具有性质:奇性度数为 1,且奇点不在 $\partial\Omega$ 上.

定理 2.20 我们有

$$k_j = \deg(u_*, a_j) = 1, \forall j, \tag{2.73}$$

$$a_j \in \Omega, \forall j. \tag{2.74}$$

推之,具有精确的 d 个不同点在集合 $\{a_j\}$ 中.

证 step 1, $k_j = \deg(u_*, a_j) > 0$.

在引理 2.17 中已证 $k_j \geqslant 0$, $\forall j$,现证明 $k_j = 0$ 是不可能的,否则,设对某个 j, $k_j = 0$,则可找到 $R > 0$,使得

$$\int_{\partial B(a_j, R)} | \nabla u_{\varepsilon_n} |^2 \leqslant C,$$

$$\int_{\partial B(a_j, R)} (| u_{\varepsilon_n} |^2 - 1)^2 \leqslant C\varepsilon_n^2,$$

且$\overline{B(a_j,R)}$不含有任何其他奇点，因此 $\deg(u_{\varepsilon_n},\partial B(a_j,R))=k_j=0$，由此可推得

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{B(a_j,R)}(|u_{\varepsilon_n}|^2-1)^2\to 0. \tag{2.75}$$

另一方面，由 a_j 的定义，至少存在一个坏圆盘 $B(x_j,2\lambda\varepsilon_n)\subset B(a_j,R)$，因此

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{B(x_j,2\lambda\varepsilon_n)}(|u_{\varepsilon_n}|^2-1)^2\geqslant\mu_0>0. \tag{2.76}$$

联合(2.75)和(2.76)得矛盾．因此 $k_j>0$.

step 2　$k_j=1$.

固定 $\eta>0$，使得

$$\eta<\frac{1}{8}\min_{j\neq k}|a_j-a_k|+\frac{1}{2}\mathrm{dist}(\Omega,\partial\Omega').$$

利用不等式(2.20)于 Ω' 中，

$$\Omega=\Omega'\setminus\bigcup_j B(a_j,\eta),$$

$\mu=\dfrac{1}{2}\mathrm{dist}(\Omega,\partial\Omega')$，可得

$$\int_\Omega|\nabla u_*|^2\geqslant 2\pi\sum_j k_j^2\left(\log\frac{\mu}{\eta}\right)-C, \tag{2.77}$$

其中常数 C 依赖于 d,Ω,Ω'，再写(2.77)为

$$\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u_*|^2\geqslant\pi\Big(\sum_{j=1}^{N_2}k_j^2\Big)|\log\eta|-C. \tag{2.78}$$

另一方面，由不等式

$$\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u_{\varepsilon_n}|^2\leqslant\pi d|\log\eta|+C,$$

取 $n\to\infty$ 极限，得

$$\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u_*|^2\leqslant\pi d|\log\eta|+C, \tag{2.79}$$

其中在(2.78)，(2.79)中的常数 C 均与 η 无关．由(2.78)，(2.79)得

$$\sum_j (k_j^2 - k_j) \mid \log \eta \mid \leqslant C.$$

令 $\eta \to 0$ 得

$$\sum_j (k_j^2 - k_j) \leqslant 0,$$

$k_j > 0$,所以 $k_j = 1, N_2 = d$.

step 3 $a_j \in \Omega, \forall j$.

至今我们仅知道 $a_j \in \overline{\Omega}$,不排除 $a_j \in \partial\Omega$ 的可能性,现设 $a_j \in \partial\Omega$,对某个 j,简单设 $a_1 \in \partial\Omega, a_2, \cdots, a_d \in \Omega$,取 $R > 0$ 使得

$$\overline{B(a_1, R)} \subset \Omega' \setminus \{a_2, \cdots, a_d\}.$$

选取 $\eta \in (0, R)$,且 $\eta \to 0$,引用如下引理.

引理 2.21 设 $a \in \partial\Omega$,对任何映照 $u \in C^1_{loc}(\overline{B(a,R)} \setminus \{a\}; S^1)$ 使得

$$u = \overline{g}, x \in \Omega' \setminus \Omega \cap B(a, R), \tag{2.80}$$

$$\deg(u, \partial B(a, R)) = 1. \tag{2.81}$$

我们有

$$\frac{1}{2} \int_{B(a,R) \setminus B(a,\eta)} \mid \nabla u \mid^2 \geqslant 2\pi \mid \log \eta \mid - C, \forall \eta \in (0, R),$$

其中常数 C 仅依赖于 $\overline{g}$ 和 R.

现完成 step 3 的证明.应用不等式(2.21)于 $\widetilde{G} = (\Omega' \setminus B(a, R)) \setminus \sum_{j=2}^{d} B(a_j, \eta)$ 可得

$$\frac{1}{2} \int_{\widetilde{G}} \mid \nabla u_* \mid^2 \geqslant \pi(d-1) \mid \log_\eta \mid - C, \tag{2.82}$$

其中常数 C 仅依赖于 R, d, Ω 和 Ω',由引理 2.21 有

$$\frac{1}{2} \int_{B(a_1,R) \setminus B(a_1,\eta)} \mid \nabla u_* \mid^2 \geqslant 2\pi \mid \log \eta \mid - C. \tag{2.83}$$

由(2.82)和(2.83)可得

$$\frac{1}{2} \int_G \mid \nabla u_* \mid^2 \geqslant \pi(d+1) \mid \log \eta \mid - C,$$

其中 $G = \Omega' \setminus \bigcup_{j=1} B(a_j, \eta)$，常数 C 仅依赖于 R, d, Ω, Ω'，如同 step 2 所证，可推出

$$|\log\eta| \leqslant C, \forall \eta \in (0, R),$$

其中 C 与 η 无关，这是不可能的. 于是 step 3 得证.

现证引理 2.21. 通过共形坐标变换不妨认为 $\Omega = \{(x_1, x_2), x_2 > 0\}$，$a = (0,0)$ 在保角变换中，$B(a, R) \setminus B(a, \eta)$ 变换为含于区域 $B(0, R') \setminus B(0, \eta')$ 中，$R' \approx R$，$\eta' \approx \eta$.

考虑中心在 O 点半径为 t 的圆 S_t，$\eta < t < R$，我们有

$$1 = \deg(u, S_t) = \frac{1}{2\pi}\int_{S_t} u \times u_\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{S_t^+} u \times u_\tau + \frac{1}{2\pi}\int_{S_t^-} \bar{g} \times \bar{g}_t,$$

其中 $S_t^+ = S_t \cap \{x_2 > 0\}$，$S_t^- = S_t \cap \{x_2 < 0\}$，注意到

$$\left|\int_{S_t^-} \bar{g} \times \bar{g}_t\right| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} g \times g_\theta d_\theta\right| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t) - \varphi(-t)| \leqslant C\sqrt{t},$$

其中

$$g(te^{i\theta}) = e^{i\varphi(te^{i\theta})}, g_\tau = g_\theta = (i\varphi(te^{i\theta})_\theta e^{i\varphi(te^{i\theta})}, g \in H^1(\partial\Omega),$$

因此

$$1 - C\sqrt{t} \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{S_t^+} u \times u_\tau \leqslant \frac{1}{2\pi}\int |u_\tau|$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\left(\int_{S_t^+} |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}} (\pi t)^{\frac{1}{2}}.$$

于是

$$\int_{S_t^+} |\nabla u|^2 \geqslant \frac{4\pi}{t} - \frac{C}{\sqrt{t}}.$$

上式在[η, R]上积分可得

$$\int_{B(0,R)\setminus B(0,\eta)} |\nabla u|^2 \geqslant 2\pi |\log\eta| - C, \forall \eta \in (0, R),$$

其中 $C = C(\bar{g}, R)$，引理得证.

至此，我们已经完全证明了定理 2.1.

现来证明定理2.2,即奇点$\{a_i\}$为函数W在Ω上的极小,这里

$$W(a,d,g)=-\pi\sum_{i\neq j}\log|a_i-g_j|+\frac{1}{2}\int_{\partial G}\Phi(g\times g_\tau)-\pi\sum_{i=1}^{d}R(a_i),$$

其中Φ,R为(2.7),(2.8)所定义.

为了证明定理2.2,我们需要某些引理和定理.

引理 2.22 设$\overline{a}=\{\overline{a_j}\}$为$\Omega$中的任意不同点,则存在$\rho_0>0$,它仅依赖于$\overline{a}$和$\Omega$,使得对任何$\rho<\rho_0$和$\varepsilon>0$,有

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon)\leqslant dI(\varepsilon,\rho)-W(\overline{a})-\pi d\log\left(\frac{1}{\rho}\right)+O(\rho),\quad (2.84)$$

其中$O(\rho)$表示量X,使得$|X|\leqslant C\rho$,C仅依赖于$\Omega,\overline{a}$和g.

引理 2.23 设$a=\{a_j\}$为$\overline{\Omega}$中有限奇点集,则给定任何ρ(充分小,$\rho<\rho_1$),存在正整数$N=N(\rho)$使得对任何$n\geqslant N$有

$$E_{\varepsilon_n}(u_{\varepsilon_n})\geqslant dI(\varepsilon_n,\rho)+W(a)+\pi d\log\left(\frac{1}{\rho}\right)+O(\rho^2),\quad (2.85)$$

其中$O(\rho^2)$表示对于量Y有$|Y|\leqslant C\rho^2$,常数C仅依赖于Ω,a和g.

$$I(\varepsilon,\rho)=\min_{u\in H_\rho^1}\left\{\frac{1}{2}\int_{B_\rho}|\nabla u_\varepsilon|^2+\frac{1}{4\varepsilon^2}\int_{B_\rho}(|u_\varepsilon|^2-1)^2\right\}.$$

定理2.2的证明.固定$\rho<\min(\rho_0,\rho_1)$,联合(2.84),(2.85)可得,

$$W(a)\leqslant W(\overline{a})+O(\rho).\quad (2.86)$$

令$\rho\to0$有

$$W(a)\leqslant W(\overline{a}).$$

因$\overline{a}$为任意点,由此推出a为W的极小点.

为了证明引理2.22和引理2.23,我们需要以下定理.

定理 2.24 当$\rho\to0$时,我们有

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega\rho}|\nabla\tilde{u}_\rho|^2=\pi\left(\sum_{i=1}^{n}d_i^2\right)^2\log\left(\frac{1}{\rho}\right)+W(a)+O(\rho),\quad (2.87)$$

其中$\tilde{u}_\rho$为

$$\min_{u\in\varepsilon_\rho}\int_{\Omega\rho}|\nabla u|^2\quad (2.88)$$

的极小元.

$$\tilde{\varepsilon}_{\rho}=\left\{v\in H^{1}(\Omega\rho;S^{1})\,\middle|\,\begin{array}{l}v=g,x\in\partial G,\forall i,\exists\alpha_i\in\mathbb{C},|\alpha_i|=1\\ \text{使得}\ x(z)=\dfrac{\alpha_i}{\rho d_i}(z-a_i)^{d_i},z\in\partial B(a_i,\rho)\end{array}\right\}.$$

定理 2.25 设 u_0 为典型调和映照,则当 $\rho\to 0$ 时有

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega\rho}|\nabla u_0|^2=\pi\Big(\sum_{i=1}^{n}d_i^2\Big)\log\Big(\frac{1}{\rho}\Big)+W+O(\rho^2), \tag{2.89}$$

其中 $\Omega_\rho=G\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{B(a_i;\rho)}$.

定理 2.26

$$E'_{\tau}=\operatorname*{Inf}_{v\in\varepsilon_\tau}\int_{\Omega}|\nabla v|^2 \tag{2.90}$$

为某一映照所惟一达到(至少差一位相),其中

$$\varepsilon'_{\tau}=\left\{V\in H^1(\Omega;S^1)\,\middle|\,\begin{array}{l}\forall i=0,1,\cdots,n,\exists\alpha_i\in\mathbb{C},\\ |\alpha_i|=1,v=d_ig_i,x\in\partial W_i\end{array}\right\}, \tag{2.91}$$

$$\overline{W_i}\subset\Omega,\overline{W_\varepsilon}\cap\overline{W_j}=\varnothing,i\neq j,\Omega=G\setminus\bigcup_{i=1}^{n}\overline{W_i},$$

进一步有

$$E'_{\tau}=\int_{\Omega}|\nabla\Phi_\tau|^2, \tag{2.92}$$

其中 Φ_τ 为问题

$$\begin{cases}\Delta\Phi_\tau=0, & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial\Phi_\tau}{\partial\tau}=g\times\dfrac{\partial g_1}{\partial\tau}, & x\in\partial w_i,i=0,1,2,\cdots,n\end{cases} \tag{2.93}$$

的解.

定理 2.27 存在 $\mathbb{C}$ 和 $\mathscr{Y}$ 的一对一对应,更详细些,给定任何 $u\in\mathbb{C}$,存在惟一 $\psi\in\mathscr{Y}$,使得

$$u=\Omega^{i\psi}u_0, \tag{2.94}$$

其中

$$\mathscr{Y}=\{\psi:\Omega\to R,\psi\ \text{连续到}\ \partial\Omega,\text{且}$$

$$
\begin{cases} \Delta\psi = 0, & x \in \Omega \\ \psi = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases},
$$

u_0 为典则调和映照，

$$
u_0(z) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{z-a_i}{|z-a_i|}\right)^{d_i} e^{ih_0(z)}, \Delta h_0(z) = 0, \tag{2.95}
$$

. 我们先证明引理 2.22 和引理 2.23，最后证明定理 2.24，定理 2.25，定理 2.26 和定理 2.27.

引理 2.22 的证明. 应用定理 2.24 于点 $\overline{a}$，对于任意的 $\rho < \rho_0 = \min\limits_{j\neq k}\left\{\frac{1}{2}|\overline{a_j}-\overline{a_k}|, \mathrm{dist}(\overline{a_j}, \partial G)\right\}$，某映照 $\tilde{u}_\rho: \Omega\rho \to S^1$，使得 $\tilde{u}_\rho = g, x \in \partial G, \tilde{u}_\rho(z) = \alpha_i \frac{z-\overline{a_j}}{|z-\overline{a_j}|}, z \in \partial B(\overline{a_j}-\rho)\ |\alpha_j| = 1$，且

$$
\frac{1}{2}\int_{\Omega\rho} |\nabla \tilde{u}_\rho|^2 = \pi d\log(1/\rho) + W(\overline{a}) + O(\rho). \tag{2.96}
$$

另一方面，对每一个 j，由 $I(\varepsilon,\rho)$ 的定义，能找到函数 $v_j: B(a_j,\rho) \to \mathbb{C}$，使得 $v_j(z) = \alpha^j \frac{(z-\overline{a_j})}{|z-\overline{a_j}|}, z \in \partial B(\overline{a_j};\rho)$ 且

$$
\frac{1}{2}\int_{B(\overline{a}_j,\rho)} |\nabla v_j|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_{B(\overline{a}_j,\rho)} (|v_j|^2-1)^2 = I(\varepsilon,\rho). \tag{2.97}
$$

令

$$
W = \begin{cases} \tilde{u}_\rho, x \in \Omega\rho \\ v_j, x \in B(\overline{a}_j,\rho)\ , j = 1,2,\cdots,d. \end{cases}
$$

联合(2.95) 和(2.96) 得

$$
E_\varepsilon(W) = dI(\varepsilon,\rho) + W(\overline{a}) + \pi d\log(1/\rho) + O(\rho),
$$

引理得证.

引理 2.23 的证明. 已知 u_{ε_n} 依 $H^1_{loc}\{\overline{G}, \bigcup\limits_j\{a_j\}\}$ 收敛于 u_*，因此，对任何固定的 $\rho, \rho < \rho_1 = \min\limits_{j\neq k}\left\{\frac{1}{2}|a_j-a_k|, \mathrm{dist}(a_j;\partial G)\right\}$ 有

$$
\frac{1}{2}\int_{\Omega\rho} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \to \frac{1}{2}\int_{\Omega\rho} |\nabla u_*|^2. \tag{2.98}
$$

特别,存在正整数 $N_1 = N_1(\rho)$,使得对每个 $n \geqslant N_1$,有

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega\rho} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \geqslant \frac{1}{2}\int_{\Omega\rho} |\nabla u_*|^2 - \rho^2.$$

另一方面,由定理 2.25 有

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega\rho} |\nabla u_*|^2 = \pi d\log(1/\rho) + W(a) + O(\rho^2), \qquad (2.99)$$

联合(2.98) 和(2.99) 可知对 $n \geqslant N_1(\rho)$ 有

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega\rho} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_n^2}\int_{\Omega\rho} (|u_{\varepsilon_n}|^2 - 1)^2 \geqslant \pi d\log(1/\rho) + W(a) + O(\rho^2). \qquad (2.100)$$

现转到在球 $B(a_j,\rho)$ 上的能量估计,我们断言,对任何给定 $\rho,\rho < \rho_1$,存在正整数 $N_2 = N_2(\rho)$,使得对每一个 $n \geqslant N_2$ 有

$$\frac{1}{2}\int_{B(a_j,\rho)} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_n^2}\int_{B(a_j,\rho)} (|u_{\varepsilon_n}|^2 - 1)^2 \geqslant I(\varepsilon_n,\rho) + O(\rho^2). \qquad (2.101)$$

联合(2.100) 和(2.101) 即得引理 2.23 的结论.

断言(2.101) 的证明,由定理 2.27 可知在靠近 a_j 附近有

$$u_*(z) = e^{i(\theta + H_j(z))}, \qquad (2.102)$$

其中 $e^{i\theta} = \dfrac{z - a_j}{|z - a_j|}$,$H_j(z)$ 为 a_j 邻域的实值光滑调和映照,且有

$$\nabla H_j(a_j) = 0. \qquad (2.103)$$

前面已证,对任意给定 $\rho < \rho_1$,能找到正整数 $N_3 = N_3(\rho)$ 使得对一切 $n \geqslant N_3$ 有

$$\| u_{\varepsilon_n} - u_* \|_{L^\infty(B(a_j,\rho),B(a_j,\rho/2))} \leqslant \rho^2, \qquad (2.104)$$

$$\| \nabla u_{\varepsilon_n} - \nabla u_* \|_{L^\infty(B(a_j,\rho),B(a_j,\rho/2))} \leqslant \rho. \qquad (2.105)$$

同时可设对 $n \geqslant N_3$ 有

$$\frac{1 - |u_{\varepsilon_n}|^2}{\varepsilon_n^2} \leqslant |\nabla u_*|^2 + 1, x \in B(a_j,\rho) \setminus B(a_j,\rho/2). \qquad (2.106)$$

从(2.102)和(2.103)有

$$|\nabla u_*| \leqslant 2/\rho + o(\rho), x \in B(a_j,\rho) \setminus B(a_j,\rho/2), \tag{2.107}$$

联合(2.106)和(2.107)可得

$$\frac{1-|u_{\varepsilon_n}|^2}{\varepsilon_n^2} \leqslant \frac{4}{\rho^2} + C \equiv K(\rho), x \in B(a_j,\rho) \setminus B(a_j,\rho/2), \tag{2.108}$$

其中 C 表示与 n,ρ 无关的常数.

考虑映照

$$w_n(z) = \left(\frac{2(z-a_j)}{\rho} - 1\right)(e^{i(\theta+H_j(a_j))} - u_{\varepsilon_n}(z)) + u_{\varepsilon_n}(z), \tag{2.109}$$

$Z \in B(a_j,\rho) \setminus B(a_j,\rho/2)$,我们有如下引理.

引理2.28 存在正整数 $N_4 = N_4(\rho)$ 使得对任何 $n \geqslant N_4$,有

$$\| w_n - u_{\varepsilon_n} \|_{L^\infty(B(a_j,\rho),B(a_j,\rho/2))} \leqslant C\rho^2, \tag{2.110}$$

$$\| \nabla u_n - \nabla u_{\varepsilon_n} \|_{L^\infty(B(a_j,\rho),B(a_j,\rho/2))} \leqslant C\rho \tag{2.111}$$

和

$$|w_n(z)|^2 \geqslant 1 - C\rho^4, \forall z \in B(a_j,\rho) \setminus B(a_j,\rho/2). \tag{2.112}$$

证 从(2.99)有

$$|w_n - u_{\varepsilon_n}| \leqslant |e^{i(\theta+H_j(a_j))} - u_*| + |u_* - u_{\varepsilon_n}|,$$

则由(2.102),(2.103)和(2.104).可得(2.110).对任何 $n \geqslant N_3$,微分(2.109)易知

$|\nabla w_n - \nabla u_{\varepsilon_n}| \leqslant \frac{2}{\rho} |e^{i(\theta+H_j(a_j))} - u_{\varepsilon_n}| + |\nabla e^{i(\theta+H_j(a_j))} - \nabla u_{\varepsilon_n}|$,则对任何 $n \geqslant N_3$, 由(2.102), (2.103), (2.104)和(2.105)得(2.111).

(2.112)的证明来自下列恒等式

$$\begin{aligned} |ta+(1-t)b|^2 &= t|a|^2 + (1-t)|b|^2 + t(1-t)|a-b|^2 \\ &\geqslant t|a|^2 + (1-t)|b|^2 - \frac{1}{4}|a-b|^2, \\ &\quad \forall t \in [0,1]. \end{aligned} \tag{2.113}$$

应用(2.113)，$a = e^{i(\theta+H_j(a_j))}$，$b = u_{\varepsilon_n}(t)$，$t = \left(\frac{2|z-a_j|}{\rho} - 1\right)$，由(2.106)得

$$|w_n(z)|^2 \geq 1 - 2K(\rho)\varepsilon_n^2 - \frac{1}{4}|e^{i(\theta+H_j(a_j))} - u_{\varepsilon_n}(z)|^2, \tag{2.114}$$

最后选取 $N_4(\rho) \geq N_3(\rho)$ 使得

$$K(\rho)\varepsilon_n^2 \leqslant \rho^4, \forall n \geq N_4(\rho). \tag{2.115}$$

由(2.114)，(2.115)，(2.102)，(2.103)和(2.104)得(2.112).

现证断言(2.103)，置

$$R = R(n,\rho) = \sqrt{1 - k(\rho)\varepsilon_n^2}. \tag{2.116}$$

可设 $n \geq N_4(\rho)$，$\rho < 1$，于是 R 是确定的，考虑映照 $p = p(n,\rho): \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 为

$$p(\xi) = \begin{cases} \xi, & |\xi| \geq R, \\ R\dfrac{\xi}{|\xi|}, & |\xi| < R. \end{cases}$$

标准的计算表明

$$\|\nabla p(\xi)\| \leqslant \begin{cases} 1, & |\xi| \geq R, \\ \dfrac{R}{|\xi|}, & |\xi| < R. \end{cases} \tag{2.117}$$

考虑映照 $v_n: B(a_j,\rho) \to \mathbb{C}$ 为

$$v_n(z) = \begin{cases} u_{\varepsilon_n}(z), & z \in B(a_j,\rho/2), \\ pw_n(z), & z \in B(a_j,\rho) \setminus B(a_j,\rho/2). \end{cases} \tag{2.118}$$

在 $\partial B(a_j,\rho)$ 上，$w_n(z) = e^{i(\theta+H_j(a_j))}$，因此

$$v_n(z) = e^{i(\theta+H_j'(a_j))}.$$

从 $I(\varepsilon_n,\rho)$ 的定义有

$$\frac{1}{2}\int_{B(a_j,\rho)} |\nabla v_n|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_n}\int_{B(a_j,\rho)} (|v_n|^2 - 1)^2 \geq I(\varepsilon_n,\rho), \tag{2.119}$$

注意到在 $\partial B\left(a_j,\frac{\rho}{2}\right)$ 上，$w_n = u_{\varepsilon_n}$，因此 $v_n = u_{\varepsilon_n}$，由(2.108)知

$|u_{\varepsilon_n}| \geqslant R$,因此,$v_n \in H^1(B(a_j,\rho))$.

从(2.118),(2.119)得

$$\frac{1}{2}\int_{B(a_j,\rho)} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_n^2}\int_{B(a_j,\rho)} (|u_{\varepsilon_n}|^2 - 1)^2 \geqslant I(\varepsilon_n,\rho) - U - V, \tag{2.120}$$

其中 $U = U(n,\rho)$,$V = V(n,\rho)$ 定义为

$$U = \frac{1}{2}\int_{B(a_j,\rho)\setminus B\left(a_j,\frac{\rho}{2}\right)} (|\nabla v_n|^2 - |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2). \tag{2.121}$$

$$V = \frac{1}{4\varepsilon_n^2}\int_{B(a_j,\rho)\setminus B\left(a_j,\frac{\rho}{2}\right)} [(|v_n|^2 - 1)^2 - (|u_\varepsilon|^2 - 1)^2]. \tag{2.122}$$

首先估计 V,因 $|W_n| \leqslant 1$(由于 W_n 是 u_{ε_n} 和 $e^{i(\theta+H_j(a_j))}$ 的凸组合),我们有 $R \leqslant |v_n| \leqslant 1$,且

$$(|v_n|^2 - 1)^2 \leqslant (1 - R^2)^2 = K^2(\rho)\varepsilon_n^4.$$

从(2.108)和(2.115)有

$$V \leqslant \pi\rho^2 K^2(\rho)\varepsilon_n^2 \leqslant C\rho^4,\ \forall\, n \geqslant N_4(\rho). \tag{2.123}$$

现估计 U,在 $B(a_j,\rho)\setminus B(a_j,\rho/2)$ 上,由(2.117)和(2.112)有

$$|\nabla v_n|^2 \leqslant \|\nabla \rho(w_n)\|^2 |\nabla w_n|^2 \leqslant \frac{1}{(1 - C\rho^4)} |\nabla w_n|^2. \tag{2.124}$$

由(2.124)和(2.111)可得

$$|\nabla v_n|^2 \leqslant \frac{1}{(1 - C\rho^4)}(|\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 + 2C\rho|\nabla u_{\varepsilon_n}| + C^2\rho^2). \tag{2.125}$$

因此

$$|\nabla v_n|^2 - |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \leqslant C(\rho^4|\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 + \rho|\nabla u_{\varepsilon_n}| + \rho^2). \tag{2.126}$$

另一方面,由(2.102),(2.103)有

$$\|\nabla u_*\|_{L^\infty\left(B(a_j,\rho)\setminus B\left(a_j,\frac{\rho}{2}\right)\right)} \leqslant C/\rho, \tag{2.127}$$

联合(2.117)和(2.105)得

$$\|\nabla u_{\epsilon_n}\|_{L^\infty\left(B(a_j,\rho)\setminus B\left(a_j,\frac{\rho}{2}\right)\right)} \leqslant C/\rho, \tag{2.128}$$

回到(2.126)可得

$$U \leqslant C\rho^2. \tag{2.129}$$

从(2.120)、(2.123)和(2.129)即得估计(2.101).

以下证明定理2.26、定理2.27、定理2.24和定理2.25.

设G为$\mathbb{R}^2$中光滑有界、单连通区域,$w_i \in G, i = 1,2,\cdots,n$. $\overline{w_i} \cap \overline{w_j} = \varnothing, \overline{w_i} \subset G$,

$$\Omega = G \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{w_i}, d, d_i \in \mathbb{Z}, d = \sum_{i=1}^{n} d_i.$$

考虑极小问题

$$E = \inf_{\varepsilon}\int_{\Omega} |\nabla u|^2, \varepsilon = \{v \in (H^1(\Omega); S^1), \deg(v, \partial G) = d,$$

$$\deg(v, \partial w_i) = d_i\} \tag{2.130}$$

和辅助问题

$$\begin{cases} \Delta\Phi = 0, x \in \Omega, \\ \Phi = \text{const}, x \in \partial w_i, \\ \Phi = 0, x \in \partial G, \\ \int_{\partial w_i} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 2\pi d_i, i = 1,2,\cdots,n. \end{cases} \tag{2.131}$$

定理2.29 下确界E被$\mathscr{E}$中元素u所取到,如果$u_1, u_2 \in \mathscr{E}$,取得E,则$u_1 = \alpha u_2, |\alpha| = 1$,且

$$E = \int_{\Omega} |\nabla \Phi|^2, \tag{2.132}$$

其中Φ是泛函$F(\varphi) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 + 2\pi\sum_{i=1}^{d} d_i p|_{\partial w_i}$在空间$V = \{\varphi \in H^1(\Omega; R): \varphi = 0, x \in \partial G, \varphi|_{\partial w_i} = \text{const}\}$中的极小元.

证 step 1 首先证明,$\forall v \in \mathscr{E}$,有

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \geqslant \int_{\Omega} |\nabla \Phi|^2.$$

step 1 的证明.因 v 取值在S^1,即 $v \in \mathcal{E}$, $|v|=1$,故有 $v \cdot v_{x_i} = 0 (i = 1,2)$, $v_{x_1} \times v_{x_2} = 0$.因此

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(v \times v_{x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(-v \times v_{x_1}) = 0. \tag{2.133}$$

定义 $D = (-v \times v_{x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, v \times v_{x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2})$,则从(2.131)和(2.133)有

$$\operatorname{div} D = 0, x \in \Omega. \tag{2.134}$$

另一方面,有

$$\int_{\partial w_i} D \cdot \boldsymbol{\nu} = \int_{\partial w_i} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\nu}} - \int_{\partial w_i} v \times v_\tau = 0, \tag{2.135}$$

其中 τ 为 ∂w_i 的单位切向量,(ν, τ) 为右手系,(2.135) 是从以下得到的

$$\int_{\partial w_i} v \times v_\tau = 2\pi \deg(v, \partial w_i) = 2\pi d_i,$$

$$\int_{\partial w_i} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 2\pi d_i.$$

引理 2.30 设 Ω 为$\mathbb{R}^2$中的任何光滑开区域(不必单连通),D 为Ω 上的一个向量场使得

且 $\qquad \operatorname{div} D = 0,$

$$\int_{\Gamma_i} D \cdot \boldsymbol{\nu} = 0,$$

对 $\partial\Omega$ 的任一连通分支 Γ_i 上成立,则存在 Ω 上的函数 H,使得

$$D = \left(\frac{\partial H}{\partial x_2}, -\frac{\partial H}{\partial x_1}\right).$$

证 如 Ω 为单连通区域,它是已知的 Poincarè 引理对于一般区域 Ω(设它是连通的),我们解每个由 Γ_i 所包围的区域 w_i 上的边值问题

$$\Delta w_i = 0, \quad x \in w_i,$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial \boldsymbol{\nu}} = D \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad x \in \partial w_i.$$

向量场

$$\tilde{D}=\begin{cases}D, x\in\Omega,\\ \nabla w_i, x\in w_i, \quad i=1,2,\cdots,n,\end{cases}$$

满足 $\operatorname{div}\tilde{D}=0, x\in G=\Omega\cup(\bigcup_{i=1}^{n}\overline{w_i})$,它是单连通的,引理得证.

由引理 2.30,存在向量函数 H 使得

$$\begin{cases}v\times\dfrac{\partial v}{\partial x_1}=-\dfrac{\partial H}{\partial x_1}-\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_1},\\ v\times\dfrac{\partial v}{\partial x_2}=-\dfrac{\partial H}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_1},\end{cases}\tag{2.136}$$

由于 $|v|=1$,有

$$\begin{aligned}|\nabla v|^2&=|v\times v_{x_1}|^2+|v\times v_{x_2}|^2\\&=|\nabla H|^2+|\nabla\Phi|^2+2\left(\frac{\partial H}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}-\frac{\partial H}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right).\end{aligned}\tag{2.137}$$

注意到

$$\begin{aligned}\int_\Omega\left(\frac{\partial H}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}-\frac{\partial H}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right)&=\int_\Omega\operatorname{div}\left(H\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}-H\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right)\\&=\int_{\partial\Omega}H\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}=0,\end{aligned}\tag{2.138}$$

这是因为 $\Phi|_{\partial G}=0, \Phi|_{\partial w_i}=\text{const}$,推出 $\dfrac{\partial\Phi}{\partial\tau}=0$,于是由(2.137),(2.138)得

$$\int_\Omega|\nabla \boldsymbol{v}|^2=\int_\Omega|\nabla H|^2+\int_\Omega|\nabla\Phi|^2\geqslant\int_\Omega|\nabla\Phi|^2.\tag{2.139}$$

step 2　存在某个 $u\in\mathscr{E}$ 使得

$$\int_\Omega|\nabla u|^2=\int_\Omega|\nabla\Phi|^2.$$

step 2 的证明.基于(2.139),我们可找到某个 $u\in\mathscr{E}$,使它满足

$$\begin{cases}u\times\dfrac{\partial u}{\partial x_1}=-\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_2},\\ u\times\dfrac{\partial u}{\partial x_2}=\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_1}.\end{cases}\tag{2.140}$$

更一般地,我们在任意光滑连通区域 Ω 上考虑问题

$$\begin{cases} u \times \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = F_1, & x \in \Omega, \\ u \times \dfrac{\partial u}{\partial x_2} = F_2, & x \in \Omega. \end{cases} \tag{2.141}$$

这个问题有解 $u:\Omega \to S^1$ 当且仅当

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}$$

和

$$\int_{\Gamma_i} F \cdot \tau \in 2\pi/\mathbb{Z}, F = (F_1, F_2), \tag{2.142}$$

其中 Γ_i 为 $\partial\Omega$ 的连通分支,事实上局部表示 $u = e^{i\psi}$,则(2.141)为

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = F_1,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = F_2. \tag{2.143}$$

(2.144) 可解的充要条件为满足(2.142). 如果 u_1, u_2 均为(2.144)的局部解,则有 $u_1 = \alpha u_2, \alpha$ 为复数, $|\alpha| = 1$,局部可由道路积分延拓到整体解.

$$\int_{\Gamma i} F \cdot \tau \mathrm{d}s = \int_{\Gamma i} F_1 \mathrm{d}x_1 + F_2 \mathrm{d}x_2 = 2\pi/\mathbb{Z},$$

相应的积分是不同的,其差属于 $2\pi/\mathbb{Z}$,进一步,$u \in \mathscr{E}$,因

$$2\pi \deg(u, \partial G) = \int_{\partial G} (u \times u_{x_2}, -u \times u_{x_1}) \cdot \boldsymbol{\nu} = \int_{\partial G} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 2\pi d,$$

$$2\pi \deg(u, \partial w_i) = \int_{\partial w_i} (u \times u_{x_2}, -u \times u_{x_1}) \cdot \boldsymbol{\nu} = \int_{\partial w_i} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 2\pi d_i.$$

注意到在我们的情况下,(2.142) 是满足的,因 Φ 是调和的,且 $F \cdot \tau = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\nu}}$,(2.143) 是满足的.

现考虑定理 2.29 的各种变形,考虑

$$\mathscr{E}_1 = \left\{ v \in H^1(\Omega; S^1) \;\middle|\; \begin{array}{l} v = g, x \in \partial G, \\ \deg(v, \partial w_i) = d_i, i = 1, 2, \cdots, n \end{array} \right\},$$

其中 $g:\partial G \to S^1$ 满足

$$\deg(g,\partial G) = d = \sum_{i=1}^{n} d_i.$$

研究极小值问题

$$E_1 = \inf_{v \in \mathcal{E}_1} \int_\Omega |\nabla v|^2. \tag{2.144}$$

考虑辅助问题

$$\begin{cases} \Delta \Phi_1 = 0, x \in \Omega, \\ \int_{\partial w_i} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 2\pi d_i, \\ \Phi_1 = \text{const}, x \in \partial w_i, \\ \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial \boldsymbol{\nu}} = g \times g_\tau, x \in \partial G. \end{cases} \tag{2.145}$$

定理 2.31 下确界 E_1 被某个 $u \in \mathcal{E}_1$ 取到,且

$$E_1 = \int_\Omega |\nabla \Phi_1|^2,$$

证 $\forall v \in \mathcal{E}_1$,有$\int_\Omega |\nabla v|^2 \geqslant \int_\Omega |\nabla \Phi_1|^2$,事实上

$$\int_\Omega \text{div}\left[H \cdot \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2}, -\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}\right)\right] = \int_{\partial\Omega} H \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau}$$

$$= \int_{\partial G} H \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau} - \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial w_i} H \cdot \frac{\partial \Phi_i}{\partial \tau} = \int_{\partial G} H \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau}$$

$$= -\int_{\partial G} \Phi_1 \frac{\partial H}{\partial \tau}$$

$$= -\int_{\partial G} \Phi_1 \left(\left(-v \times v_{x_2} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}\right)\nu_1 + \left(v \times v_{x_1} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2}\right)\nu_2\right)$$

$$= -\int_{\partial G} \Phi_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\nu}} - v \times \gamma_\tau\right) = 0.$$

于是有

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 \geqslant \int_\Omega |\nabla \Phi_1|^2.$$

由于(2.136) 可知

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\nu}} - v \times v_{\tau} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\nu}} - g \times g_{\tau} = 0, x \in \partial G, H = 0,$$于是可找到 $v \in \varepsilon_1$ 使得满足

$$v \times v_{x_1} = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2},$$

$$v \times v_{x_2} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}.$$

由此推出

$$v \times v_{\tau} = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = g \times g_{\tau}, x \in \partial G,$$

于是 $v = \alpha g, x \in \partial G, \alpha$ 为复数，$|\alpha| = 1$，则 $u = \alpha^{-1} v$ 满足所有要求的性质.

考虑

$$\mathscr{E}_2^1 = \left\{ v \in H^1(\Omega; S^1) \,\middle|\, \begin{array}{l} \forall i = 0,1,2,\cdots,n, \exists \alpha_i \in \mathbb{C}, \\ |\alpha_i| = 1, \text{使得 } v = \alpha_i g_i, x \in \partial w_i, i = 1,2,\cdots,n \end{array} \right\}.$$

类似于定理 2.31 可得定理 2.26，即有

$$E_2' = \inf_{u \in \mathscr{E}_2^1} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \tag{2.146}$$

为某个 u 取到，且

$$E_2' = \int_{\Omega} |\nabla \Phi_2|^2, \tag{2.147}$$

其中

$$\begin{cases} \Delta \Phi_2 = 0, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial \boldsymbol{\nu}} = g_1 \times \dfrac{\partial g_1}{\partial \tau}, & x \in \partial w_i, i = 0,1,2,\cdots,n. \end{cases} \tag{2.148}$$

现考虑 $G \subset \mathbb{R}^2$ 为有界的光滑的单连通区域，$a_1, \cdots, a_n \in G$，$d_1, d_2, \cdots, d_n \in \mathbb{Z}, d = \sum_{i=1}^{n} d_i, g: \partial G \to S^1, \deg(g, \partial G) = d$.

$C = \{u: G \setminus \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \to S^1$，光滑调和映照，(i) $\deg(u, a_i) = d_i$，(ii) u 连续到 ∂G，$u|_{\partial G} = g\}$.

辅助问题

$$
\begin{cases}
\Delta\Phi_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} \partial\pi d_i \delta a_i, x \in G, \\
\dfrac{\partial\Phi_0}{\partial\nu} = g \times g_\tau, x \in \partial G.
\end{cases}
\tag{2.149}
$$

于此 Φ_0 惟一确定到差一常数,为确定,令

$$
\int_{\partial G} \Phi_0 = 0.
$$

则存在惟一的调和映照 $u_0 \in \mathcal{C}$:

$$
\begin{cases}
u_0 \times \dfrac{\partial u_0}{\partial x_1} = -\dfrac{\partial\Phi_0}{\partial x_2}, x \in \Omega, \\
u_0 \times \dfrac{\partial u_0}{\partial x_2} = \dfrac{\partial\Phi_0}{\partial x_1}, x \in \Omega,
\end{cases}
\tag{2.150}
$$

这可从 $\Delta\Phi_0 = 0, x \in \Omega, \dfrac{\partial\Phi_0}{\partial\nu} = g \times g_\tau, x \in \partial G, d_i \in \mathbb{Z}$ 得到.由(2.151)所决定的 u_0 称为与(a_i),(d_i),g 相关的典则调和映照.可以证明

$$
u_0(z) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{z - a_i}{|z - a_i|} \right)^{d_i} e^{ih_0(z)}, \Delta h_0(z) = 0.
$$

引入 $\mathscr{G} = \{\psi: \Omega \to \mathbb{R}, \Omega = G \setminus \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}, \psi$ 连续到 ∂G,且 $\Delta\psi = 0, x \in \Omega, \psi \mid \partial G = 0\}$.

现在证明定理2.27,即对 $u \in \mathcal{C}$,存在 $\psi \in \mathscr{L}$,使得

$$
u = e^{i\psi} u_0.
$$

证 $\forall u \in \mathcal{C}$,考虑方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial\hat{\psi}}{\partial x_1} = u \times u_{x_1} + \dfrac{\partial\Phi_0}{\partial x_2} \equiv F_1, \\
\dfrac{\partial\hat{\psi}}{\partial x_2} = u \times u_{x_2} - \dfrac{\partial\Phi_0}{\partial x_1} = F_2,
\end{cases}
\quad x \in \Omega.
\tag{2.151}
$$

因$\dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1}$,所以可局部可解 $\hat{\psi}$,在 Ω 中任给一闭路 C,C 内部为 w.

$$\int_C F \cdot \tau = \int_C u \times u_\tau - \int_C \frac{\partial \Phi_0}{\partial \tau} = 2\pi \deg(u, C) - 2\pi \sum_{a_i \in w} d_i = 0,$$

因此 $\hat{\psi}$ 可全局延拓,成为整体解.

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \tau} = u \times u_\tau - \frac{\partial \Phi_0}{\partial \tau} = g \times g_\tau - g \times g_\tau = 0, \text{在 } \partial G \text{ 上},$$

推出 $\hat{\psi}|_{\partial G} = \text{const}$.

令 $\psi = \hat{\psi} - \hat{\psi}|_{\partial G} \in \mathcal{Y}$,则

$$\begin{cases} \Delta \psi = \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(u \times \dfrac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(u \times \dfrac{\partial u}{\partial x_2}\right) = u \times \Delta u = 0, x \in \Omega, \\ \psi|_{\partial G} = 0. \end{cases}$$

现证 $u = e^{i\psi} u_0$.

首先,局部地有 $u = e^{i\varphi}, u_0 = e^{i\varphi_0}$,于是

$$\begin{cases} u_0 \times u_{0x_1} = -\dfrac{\partial \Phi_0}{\partial x_2}, \\ u_0 \times u_{0x_2} = -\dfrac{\partial \Phi_0}{\partial x_1}, \end{cases}$$

变为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_0}{\partial x_1} = -\dfrac{\partial \Phi_0}{\partial x_2}, \\ \dfrac{\partial \varphi_0}{\partial x_2} = \dfrac{\partial \Phi_0}{\partial x_1}. \end{cases}$$

(2.154) 变为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial x_1} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \Phi_0}{\partial x_2}, \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x_2} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \Phi_0}{\partial x_1}. \end{cases}$$

由此可得

$$\nabla(\varphi_0 + \psi - \varphi) = 0, x \in \Omega.$$

因此在 Ω 的每个局域有

$$\varphi_0 + \psi - \varphi = \text{const}.$$

但

$$\varphi_0 + \psi - \varphi \mid_{\partial G} = 0,$$

推出

$$\varphi_0 + \psi - \varphi \equiv 0, x \in G,$$

推出

$$\psi = \varphi - \varphi_0, \varphi = \psi + \varphi_0.$$

因此

$$u = e^{i\varphi} = e^{i\psi}e^{i\varphi_0} = e^{i\psi}u_0.$$

定理得证.

现证明定理 2.25 和定理 2.24.

定理 2.25 的证明.

由(2.151)有 $|\nabla u_0| = |\nabla \Phi_0|$,因此

$$\int_{\Omega\rho} |\nabla u_0|^2 = \int_{\Omega\rho} |\nabla \Phi_0|^2 = \int_{\partial G} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \nu}\Phi_0 - \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial B(a_i,\rho)} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \nu}\Phi_0$$

$$= \int_{\partial G}\Phi_0(g \times g_\tau) - \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial B(a_i,\rho)} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \nu}\Phi_0, \tag{2.152}$$

$$R_0(X) = \Phi_0(x) - \sum_{j=1}^{n} d_i \log |x - a_j|$$

为 G 上的光滑调和函数.置

$$\begin{aligned} S_i(x) &= \Phi_0(x) - d_i \log |x - a_i| \\ &= R_0(x) + \sum_{j\neq i} d_i \log |x - a_j| \end{aligned} \tag{2.153}$$

为包含 a_i 的某个邻域上的光滑调和函数,且

$$S_i(x) = \Phi_0(x) - d_i \log\rho, x \in \partial B(a_i,\rho),$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial \nu} = \frac{\partial \Phi_0(x)}{\partial \nu} - \frac{d_i}{\rho}, x \in \partial B(a_i,\rho),$$

$$S_i(a_i) = R_0(a_i) + \sum_{j\neq i} d_j \log |a_i - a_j|.$$

因此,我们有

$$\int_{\partial B(a_i,\rho)} \Phi_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \int_{\partial B(a_i,\rho)} \left(\frac{\partial S_i}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \frac{d_i}{\rho}\right)(S_i + d_i \log |x - a_i|)$$

$$= \int_{\partial B(a_i,\rho)} S_i \frac{\partial S_i}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \frac{\partial \pi d_i}{\partial \pi \rho} \int_{\partial B(a_i,\rho)} S_i + d_i \log\rho \int_{\partial B(a_i,\rho)} \frac{\partial S_i}{\partial \boldsymbol{\nu}} + 2\pi d_i^2 \log\rho$$

$$= 2\pi d_i^2 \log\rho + 2\pi d_i S_i(a_i) + O(\rho^2), \tag{2.154}$$

其中我们用到了

$$\int_{\partial B(a_i,\rho)} \frac{\partial S_i}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \int_{B(a_i,\rho)} \Delta S_i = 0,$$

$$\int_{\partial B(a_i,\rho)} S_i \frac{\partial S_i}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \int_{B(a_i,\rho)} S_i \Delta S_i + \int_{B(a_i,\rho)} |\nabla S_i|^2$$

$$= O(\rho^2).$$

由(2.153)和(2.154)和 $S_i(a_i) = R_0(a_i) + \sum_{j \neq i} d_j \log |a_i - a_j|$ 可得

$$\int_{\Omega_\rho} |\nabla u_0|^2 = 2\pi\left(\sum_{i=1}^n d_i^2\right)\log\left(\frac{1}{\rho}\right) + 2w + O(\rho^2).$$

现考虑极小问题.

$$\min_{u \in \mathscr{E}_\rho} \int_{\Omega_\rho} |\nabla u|^2, \tag{2.155}$$

其中

$$\hat{\mathscr{E}}_\rho = \left\{ v \in H^1(\Omega_\rho; S^1) \;\middle|\; \begin{array}{l} v = g, x \in \partial G, \forall i, \exists \alpha_i \in \mathbb{C}, |\alpha_i| = 1 \\ \text{使得 } v(z) = \dfrac{\alpha_i}{\rho d_i}(z - a_i)^{d_i}, z \in \partial B(a_i, \rho) \end{array} \right\},$$

由定理 2.26 可知存在惟一极小元 $\hat{u}_\rho$.

现证定理 2.24, 即当 $\rho \to 0$, 我们有

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} |\nabla \hat{u}_\rho|^2$$

$$= \pi\left(\sum_{i=1}^n d_i\right)^2 \log\left(\frac{1}{\rho}\right) + w(a) + O(\rho), \tag{2.156}$$

证 由定理 2.26 可知

$$\int_{\Omega_\rho} |\nabla \hat{u}_\rho|^2 = \int_{\Omega_\rho} |\nabla \hat{\Phi}_\rho|^2, \tag{$*$}$$

其中 $\hat{\Phi}_\rho$ 为如下线性问题的解：

$$\begin{cases}\Delta\hat{\Phi}_\rho = 0, x \in \Omega\rho, \\ \dfrac{\partial\hat{\Phi}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = g \times g_\tau, x \in \partial G, \\ \dfrac{\partial\hat{\Phi}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \dfrac{d_i}{\rho}, x \in \partial B(a_i, \rho), \\ \displaystyle\int_{\partial G}\hat{\Phi} = 0. \end{cases} \tag{2.157}$$

置

$$\psi_\rho(x) = \hat{\Phi}_\rho(x) - \sum_{j=1}^{n} d_j \log|x - a_j|. \tag{2.158}$$

我们需要如下引理

引理 2.32 当 $\rho \to 0$ 时，我们有

$$\|\psi_\rho - R_0\|_{L^\infty(\partial G)} \leqslant C\rho, \tag{2.159}$$

$$\|\psi_\rho\|_{L^\infty(\partial B(a_i, \rho))} \leqslant C. \tag{2.160}$$

证 函数 ψ_ρ 满足

$$\begin{cases}\Delta\psi_\rho = 0, x \in \Omega\rho, \\ \dfrac{\partial\psi_\rho}{\partial\boldsymbol{\nu}} = g \times g_\tau - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} d_j \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}}\log|x - a_j| \equiv f, x \in \partial G, \\ \dfrac{\partial\psi_\rho}{\partial\boldsymbol{\nu}} = -\displaystyle\sum_{j\neq i}^{n} d_j \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}}\log|x - a_j| \equiv g_i, \forall i, x \in \partial B(a_i, \rho).\end{cases} \tag{2.161}$$

设 ψ_ρ^* 为 ψ_ρ 的调和共轭，即 ψ_ρ^* 为如下问题的解：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi_\rho^*}{\partial x_1} = -\dfrac{\partial\psi_\rho}{\partial x_2} \equiv F_1, \\ \dfrac{\partial\psi_\rho^*}{\partial x_2} = \dfrac{\partial\psi_\rho}{\partial x_1} \equiv F_2.\end{cases} \tag{2.162}$$

因 $\dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1}$，因此 ψ_ρ^* 可整体定义在 Ω_ρ 上，且因

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial \psi_\rho}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0, \Gamma \text{ 为 } \partial \Omega_\rho \text{ 的连通分支}, \tag{2.163}$$

ψ_ρ^* 为单值函数，ψ_ρ^* 满足

$$\begin{cases} \Delta \psi_\rho^* = 0, x \in \Omega_\rho, \\ \dfrac{\partial \psi_\rho^*}{\partial \tau} = f, x \in \partial G, \\ \dfrac{\partial \psi_\rho^*}{\partial \boldsymbol{\nu}} = g_i, x \in \partial B(a_i, \rho), i = 1,2,\cdots,n. \end{cases}$$

因此我们有

$$\begin{cases} \Delta \psi_\rho^* = 0, x \in \Omega_\rho, \\ \psi_\rho^* = F, x \in \partial G, \\ \psi_\rho^* = G_i, x \in \partial B(a_i, \rho), \quad i = 1,2,\cdots,n, \\ \displaystyle\int_{\partial B(a_i,\rho)} \frac{\partial \psi_\rho^*}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0, \quad i = 1,2,\cdots,n, \end{cases} \tag{2.164}$$

其中 F 和 G_i 分别表示 f 和 g_j 的原函数，即

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = f, \frac{\partial G_i}{\partial \tau} = g_i.$$

因 $\int_{\partial G} f = 0$，$\int_{\partial B(a_i,\rho)} g_i = 0$，$F$ 和 G 均为单值函数，考虑一个如下的辅助问题

$$\begin{cases} \Delta \psi^* = 0, & x \in G, \\ \psi^* = F, & x \in \partial G. \end{cases} \tag{2.165}$$

我们需要如下一个引理

引理 2.33[1] 设 G 为 $\mathbb{R}^2$ 中的一个光滑有界区域，w_i 为 G 中的光滑不同子域使得 $\Omega = G \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{w_i}$ 为连通的，该函数 v 满足

$$\begin{cases} \Delta v = 0, x \in \Omega, \\ \displaystyle\int_{\partial w_j} \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0, j = 1,2,\cdots,n, \end{cases} \tag{2.166}$$

则

$$\sup_{\Omega} v - \inf_{\Omega} v \leqslant \sum_{j=1}^{n} (\sup_{\partial w_j} v - \inf_{\partial w_j} v) + \sup_{\partial G} v - \inf_{\partial G} v. \tag{2.167}$$

特别地,对于 $v = 0, x \in \partial G$,则有

$$\| v \|_{L^{\infty}(\Omega)} \leqslant \sum_{j=1}^{n} (\sup_{\partial w_j} v - \inf_{\partial w_j} v). \tag{2.168}$$

应用引理 2.33 于 $v = \psi_{\rho}^{*} - \psi^{*}$,有

$$\begin{aligned} \| \psi_{\rho}^{*} - \psi^{*} \|_{L^{\infty}(\Omega_{\rho})} &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \sup_{\partial B(a_i, \rho)} (G_i - \psi^{*}) - \inf_{\partial B(a_i, \rho)} (G_i - \psi^{*}) \\ &= O(\rho), \end{aligned} \tag{2.169}$$

其中 $\| g_i \|_{L^{\infty}(\partial B(a_i, \rho))} \leqslant C, G_i = \int_0^l g_i \leqslant Cl \leqslant 2\pi C\rho$. 由(2.165),(2.166),(2.169) 和标准的椭圆型方程估计,可知对任何紧集 $\overline{K \subset G} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \{a_i\}$ 有

$$\| \nabla(\psi_{\rho}^{*} - \psi^{*}) \|_{L^{\infty}(K)} \leqslant C_K \rho. \tag{2.170}$$

设 ψ 为 ψ^{*} 的调和共轭,即

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial x_1} = \dfrac{\partial \psi^{*}}{\partial x_2}, & x \in G, \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x_2} = -\dfrac{\partial \psi^{*}}{\partial x_1}, & x \in G. \end{cases} \tag{2.171}$$

因此 ψ 满足

$$\begin{cases} \Delta \psi = 0, & x \in G, \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \dfrac{\partial \psi^{*}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = f, & x \in \partial G. \end{cases} \tag{2.172}$$

现 $R_0(x) := \Phi_0(x) - \sum_{i=1}^{n} d_j \log | x - a_j |$ 也满足(2.172),可选

$$\psi(x) = R_0(x). \tag{2.173}$$

从(2.163) 和(2.172) 有

$$| \nabla(\psi_{\rho}^{*} - \psi^{*}) | = | \nabla(\psi_{\rho} - \psi) |.$$

由(2.171) 和(2.173) 推出

$$\| \nabla(\psi_\rho - R_0) \|_{L^\infty(K)} \leqslant C_K \rho. \tag{2.174}$$

最后为规范化,选取

$$\int_{\partial G} (\psi_\rho - R_0) = 0 \left(\int_{\partial G} \hat{\Phi}_\rho = \int_{\partial G} \Phi_0 = 0 \right). \tag{2.175}$$

从(2.174) 和(2.175) 得

$$\| \psi_\rho - R_0 \|_{L^\infty(K)} \leqslant C_K \rho. \tag{2.176}$$

特别,我们已证(2.160)

现转向(2.161) 的证明,令

$$w_i(x) = \sum_{j \neq i} d_j \log |x - a_j|.$$

任给固定 $\alpha \geqslant 0$ 使得$\overline{B(a_i,\alpha)} \subset G$,$\overline{B(a_i,\alpha)}$,不含有其他点 a_j,$j \neq i$,由(2.162) 有

$$\Delta(\psi_\rho + w_i) = 0, x \in B(a_i,\alpha) \setminus B(a_i,\rho),$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(\psi_\rho + w_i) = 0, x \in \partial B(a_i,\rho).$$

由极大值原则和(2.176) 推出

$$\| \psi_\rho + w_i \|_{L^\infty(B(a_i,\alpha) \setminus B(a_i,\rho))} \leqslant \| \psi_\rho + w_i \|_{L^\infty(\partial B(a_i,\alpha))} \leqslant C.$$

特别有

$$\| \psi_\rho + w_i \|_{L^\infty(\partial B(a_i,\rho))} \leqslant C,$$

这就推出(2.161).

现证明定理 2.24,由(*) 和(2.161) 可写

$$\int_{\Omega_\rho} |\nabla \hat{u}_\rho|^2 = \int_{\Omega_\rho} \left| \nabla \left(\psi_\rho + \sum_{j=1}^{n} d_j \log |x - a_j| \right) \right|^2,$$

因此有

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla \hat{u}_\rho|^2 &= \int_\Omega |\nabla \psi_\rho|^2 + 2\int_{\Omega_\rho} \nabla \psi_\rho \nabla \left(\sum_{j=1}^{n} d_j \log |x - a_j| \right) \\ &\quad + \int_{\Omega_\rho} \left| \nabla \left(\sum_{j=1}^{n} d_j \log |x - a_j| \right) \right|^2 \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \tag{2.177}$$

分部积分,利用(2.162) 和引理 2.31 可得

$$I_1 = \int_{\Omega\rho} |\nabla \psi_\rho|^2 = \int_{\partial\Omega\rho} \psi_\rho \frac{\partial \psi_\rho}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \int_{\partial G} f\psi_\rho - \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial B(a_j,\rho)} g_i \psi_\rho$$

$$= \int_{\partial\Omega} fR_0 + O(\rho) = \int_{\partial G} \frac{\partial R_0}{\partial \boldsymbol{\nu}} R_0 + O(\rho) = \int_G |\nabla R_0|^2 + O(\rho)$$

$$= \int_{\Omega\rho} |\nabla R_0|^2 + O(\rho), \tag{2.178}$$

$$\int_{\Omega\rho} (\nabla \psi_\rho - \nabla R_0) \nabla (\sum_{j=1}^{n} d_j \log |x - a_j|)$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \int_{\partial B(a_i,\rho)} (g_i - \frac{\partial R_0}{\partial \boldsymbol{\nu}}) w_i = O(\rho). \tag{2.179}$$

联合(2.178),(2.179)和(2.177)得

$$\int_{\Omega\rho} |\nabla \hat{u}_\rho|^2 = \int_{\Omega\rho} \left| \nabla (R_0 + \sum_{j=1}^{n} d_j \log |x - a_j|) \right|^2 + O(\rho)$$

$$= \int_{\Omega\rho} |\nabla \Phi_0|^2 + O(\rho)$$

$$= \int_{\Omega\rho} |\nabla u_0|^2 + O(\rho).$$

定理得证.

至此,$\deg(g, \partial\Omega) \neq 0$ 的情形,定理 2.1,定理 2.2,全部证明完毕.

§3 Ginzburg-Landau 热流方程

现考虑 Ginzburg-Landau 热流的涡度运动.

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2}(1 - |u|^2), (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, & (3.1) \\ u(x,t) = g(x), x \in \partial\Omega, t > 0, & (3.2) \\ u(x,0) = u_0(x), x \in \Omega, & (3.3) \end{cases}$$

其中 Ω 为二维光滑有界区域,$\varepsilon > 0$ 为参数 $u: \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$, $g: \partial\Omega \to \mathbb{R}^2$ 为光滑的,且 $|g(x)| = 1, x \in \partial\Omega$,自然设相容条件

满足：$u_0(x) = g(x), x \in \partial\Omega$.

方程组(3.1)—(3.3)可看作一般 Ginzburg-Landau 方程和超导理论的 Ginzburg-Landau 方程的模型方程，当 $t \to \infty$ 时，(3.1)—(3.3)的解 u 趋于定态解 u_ε，它是能量泛函

$$E_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[|\nabla u|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2}(|u|^2 - 1)^2 \right] dx \tag{3.4}$$

的临界点，这些在§2中我们已经详细讨论过.

J. vew[5] 等运用渐近展开的方法得到了涡度的方程

$$m_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} a_i(t) = -\nabla_{a_i} w_g(a), i = 1,2,\cdots,d, \tag{3.5}$$

其中 $m_i \sim |\log\varepsilon|, a_i(t), i = 1,2,\cdots,d$ 为涡度，$a_i(0) = a_i$，

$$W_g(a) = -\pi \sum_{j \neq i} \log|a_i - b_j| + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \Phi(g \wedge g_\tau) - \pi \sum_{j=1}^{d} R(a_j), \tag{3.6}$$

Φ 为如下问题的解

$$\begin{cases} \Delta\Phi = 2\pi \sum_{j=1}^{d} d_{a_j}, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\nu}} = g \wedge g_t, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.7}$$

$$R(x) = \Phi(x) - \sum_{j=1}^{d} \log|x - a_j|. \tag{3.8}$$

我们先研究在有限时刻，方程组(3.1)—(3.3)具初值 u_0 的解当 $\varepsilon \to 0$ 时的形态.

假设 3.1

(i) u_0 是光滑的，且 $|u_0(x)| \leqslant 1, x \in \Omega$.

(ii) $E_\varepsilon(u_0) \leqslant \pi d \log \frac{1}{\varepsilon} + K_1$，$K_1$ 为正常数.

(iii) $\int_\Omega \rho^2(x) e_\varepsilon(u_0) dx \leqslant K_2$，$K_2$ 为正常数，$\rho(x) = \mathrm{dist}(x, \{b_1, \cdots, b_d\})$，且 $b_1, \cdots, b_d$ 为 Ω 中的不同点，$E_\varepsilon(u) = \int_\Omega e_\varepsilon(u) \mathrm{d}x$.

在假设 3.1 和关于 g 和 Ω 的假设下，初边值问题

(1.1)—(1.3) 有惟一的光滑解 $u_\varepsilon(x,t)$,进一步

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_\varepsilon(u_\varepsilon(\cdot,t)) = -\int_\Omega\left|\frac{\partial}{\partial t}u_\varepsilon(x,t)\right|^2\mathrm{d}x,$$

因此

$$\sup_{t>0}\int_0^t\int\left|\frac{\partial}{\partial t}u_\varepsilon(x,t)\right|^2 dxd\tau + E_\varepsilon(u_\varepsilon(\cdot,t))$$

$$\leqslant E_\varepsilon(u_0)\leqslant \pi d\log\frac{1}{\varepsilon}+K. \tag{3.9}$$

由伸缩变换和通常的抛物型估计,易得

$$|\nabla u_\varepsilon(x,t)|^2+\left|\frac{\partial}{\partial t}u_\varepsilon(x,t)\right|\leqslant\frac{C_*}{\varepsilon^2}, \tag{3.10}$$

其中常数 C^* 仅依赖于 g 和 $\Omega, t\geqslant\varepsilon^2$. 如果设 $u_0^\varepsilon(x)=u_0(\varepsilon x)$ 满足

$$\|\nabla u_0^\varepsilon(x)\|_{L^\infty}+\sup_{x,y}\frac{|\nabla u_0^\varepsilon(x)-\nabla u_0^\varepsilon(y)|}{|x-y|^\alpha}\leqslant K_3, \tag{3.11}$$

则(3.10)对 $0<t<\varepsilon^2$ 也真,此时,常数 C_* 还依赖于 K_3 和 α.

由 (3.9), (3.10) 推出, $u_\varepsilon(x,t)\in S_g(\lambda K)$: $\{u:\Omega\to\mathbb{R}^2$: (ⅰ) $u\in H^1(\Omega), u=g, x\in\partial\Omega$; $|u(x)|\leqslant1, x\in\Omega$. (ⅱ) 如 $|u(x_0)|\leqslant\frac{1}{2}, x_0\in\Omega$,则 $|u(x)|\leqslant\frac{3}{4}, x\in\Omega, |x-x_0|\leqslant\lambda\varepsilon$. (ⅲ) $E_\varepsilon(u)\leqslant\pi d\log\frac{1}{\varepsilon}+K\}$. 易知

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon(\cdot,t))\geqslant\pi d\log\frac{1}{\varepsilon}-C_1.$$

因此

$$\int_0^\infty\int_\Omega\left|\frac{\partial}{\partial t}u_\varepsilon(x,t)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C_1+K_1. \tag{3.12}$$

其次,我们计算可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\rho^2(x)\,e_\varepsilon(u_\varepsilon(x,t))\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\int_\Omega\rho^2(x)|\nabla_\varepsilon u|dx+2\int_\Omega\left|\frac{\partial}{\partial t}u_\varepsilon\right|^2dx, \tag{3.13}$$

其中我们用到了 $|\nabla\rho(x)|\leqslant1, x\in\Omega$,因此

$$\int_{\Omega}\rho^2(x)e_\varepsilon(u_\varepsilon(x,t))dx \leqslant 2e^t\int_0^t\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right|^2 dxdt + K_2, \quad (3.14)$$

对任何 $T \in (0,\infty)$ 和任何 $\delta \in (0,\delta_0)$,其中

$$2\delta_0 = \min\{|b_i - b_j|, \mathrm{dist}(b_i,\partial\Omega): i \neq j, i,j = 1,2,\cdots,d\}.$$

令 $\Omega_\delta = \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{d} B_\delta(b_j)$, $\mathcal{Q}_{\delta,T} = \Omega_\delta \times [0,T]$,从(3.12)和(3.14)有 $u_\varepsilon \in H^1(\mathcal{Q}_\delta, T)$,且

$$\int_{\Omega_\delta} e_\varepsilon(u_\varepsilon(x,t))dx \leqslant C(\delta, K_1, K_2)e^T, \forall t \in [0,T]. \quad (3.15)$$

为了研究初边值问题的解 u_ε 和当 $\varepsilon \to 0$ 时的渐近形态,我们需对初值 u_0 作附加假设.

假设 3.2 初值 $u_0^\varepsilon(x)$ 当 $\varepsilon \to 0$ 时收敛于

$$\prod_{j=1}^{d}\frac{x-b_j}{|x-b_j|}e^{ih_0(x)},$$

其中 $h_0(x) \in H^1(\Omega)$.

现对任何序列 $\varepsilon_n \to 0$, 存在一个子序列, 仍记为 ε_n, 使得 $u_{\varepsilon_n}(x,t) \to u_0(x,t)$ 在 $H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega} \setminus \{b_1,\cdots,b_d\} \times \mathbb{R}^+)$ 中弱收敛,且在 $L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+)$ 中强收敛. 这是由于 $|u_\varepsilon(x,t)| \leqslant 1$,可证 $|u_\varepsilon(x,t)| = 1$, a.e 在 $\Omega \times \mathbb{R}^+$上.

因 $u_\varepsilon \wedge \frac{\partial}{\partial t}u_\varepsilon = \mathrm{div}(u_\varepsilon \wedge \nabla u_\varepsilon), (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$,推出

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_0}{\partial t} = \nabla u_0 + |\nabla u_0|^2 u_0, (x,t) \in \Omega \setminus \{b_1,\cdots,b_d\} \times \mathbb{R}^+, \\ u_0(x,0) = \displaystyle\prod_{j=1}^{d}\frac{x-b_j}{|x-b_j|}e^{ih_0(x)}, \\ u_0 = g, x \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+.\end{cases} \quad (3.16)$$

因 $u_0(x,t)$ 的像位于单位圆上,函数 $u_0(x,t)$ 在 $\overline{\Omega} \setminus (b_1,\cdots,b_d) \times \mathbb{R}^+$上光滑. 进一步,由(3.12)和(3.15)推出,对任何 $t > 0, 0 < \delta \leqslant \delta_0$,度 $\deg(u_0(\cdot,t), \partial B_\rho(b_j)), j = 1,\cdots,d$,都是确定的,由假设 3.2,它都等于 1. 因此,我们能写

$$u_0(x,t) = \prod_{j=1}^{d} \frac{x - b_j}{|x - b_j|} e^{ih_0(x,t)}. \tag{3.17}$$

显然有

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} h_0(x,t) = \Delta h_0(x,t), (x,t) \in \Omega \setminus \{b_1, \cdots, b_d\} \times \mathbb{R}^+, \\ h_0(x,t) = h_0(x), x \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ h_0(x,0) = h_0(x), \end{cases} \tag{3.18}$$

这里我们不知道 $h_0(x,t)$ 是否在 $\Omega \times \mathbb{R}^+$ 上满足热方程,也不知道如此 $h_0(x,t)$ 能否被 $\{u_\varepsilon(x,t)\}$ 的一切序列的极限所决定.

定理 3.1 满足(3.18)的函数 $h_0(x,t)$ 满足

$$\sup_{t>0}\left[\|\nabla h_0(x,t)\|_{L^2}^2\right] + \int_0^t \int_\Omega \left|\frac{\partial}{\partial t} h_0(x,t)\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant C,$$

这里常数 C 仅依赖于 g, Ω 和 $K = \max(K_1, K_2, K_3)$. 特别 $h_0(x,t)$ 在 $\Omega \times \mathbb{R}^+$ 上满足热方程,推之有

$$u_\varepsilon(x,t) \to \prod_{j=1}^{d} \frac{x - b_j}{|x - b_j|} e^{ih_0(x,t)}, \quad \varepsilon \to 0,$$

在 $L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+)$ 强收敛,和在 $H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega} \setminus \{b_1, \cdots, b_d\} \times \mathbb{R}^+)$ 上弱收敛.

证 考虑函数 $u \in S_g(\lambda, k)$, B_1, B_{N_ε} 为给定的球,令 $x_1^\varepsilon, \cdots, x_d^\varepsilon$ 分别为球 $B_1, \cdots, B_d$ 的中心,则有

$$u(x) = \prod_{j=1}^{d} \frac{x - x_j^\varepsilon}{|x - x_j^\varepsilon|} e^{ih_\varepsilon(x)} \cdot \rho_\varepsilon(x), \forall x \in \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{N_\varepsilon} B_j = \Omega_\varepsilon, \tag{3.19}$$

其中 $h_\varepsilon(x)$ 为在 Ω_ε 上确定的单值函数,且

$$\frac{1}{2} \leqslant \rho_\varepsilon(x) \leqslant 1, x \in \Omega_\varepsilon.$$

如 $h_\varepsilon(x_0) \in [0, 2\pi]$, $x_0 \in \partial\Omega$,则 h_ε 可惟一确定,(3.12)是成立的,因

$$\deg(u, \partial B_j) = 0, j = d+1, \cdots, N_\varepsilon.$$

一方面,我们有

$$\int_{\Omega_\varepsilon} e_\varepsilon(u)dx \leqslant \pi\sum_{j=1}^{d}\alpha_j \log\frac{1}{\varepsilon} + C(\lambda,K),$$

另一方面，有

$$\int_{\Omega_\varepsilon} e_\varepsilon(u)\mathrm{d}x \geqslant \int_{\Omega_\varepsilon} \rho_\varepsilon^2 |\nabla\theta|^2 + \rho_\varepsilon^2 |\nabla h_\varepsilon|^2 + 2\rho_\varepsilon^2 \nabla\theta_\varepsilon \cdot \nabla h_\varepsilon,$$

其中 θ_ε 为 Ω_ε 中的多值调和函数

$$e^{i\theta_\varepsilon} = \prod_{j=1}^{d} \frac{x - x_j^\varepsilon}{|x - x_j^\varepsilon|^\varepsilon}.$$

因 $|\nabla\theta_\varepsilon(x)| \leqslant \varepsilon^{-\alpha}, x \in \Omega_\varepsilon$，我们有

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\rho_\varepsilon^2 - 1| |\nabla\theta_\varepsilon|^2 \leqslant \varepsilon^{-2\alpha}\left(\int_{\Omega_\varepsilon}(\rho_\varepsilon^2 - 1)^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} |\Omega|^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant C(K,\Omega)\varepsilon^{-2\alpha+1}\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}, \alpha < \frac{1}{2}.$$

因

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla\theta_\varepsilon|^2 \geqslant \pi\sum_{j=1}^{d}\alpha_j\log\frac{1}{\varepsilon} - C(\lambda,K),$$

我们有

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (\rho_\varepsilon^2 |\nabla h_\varepsilon|^2 + 2\rho_\varepsilon^2 \nabla\theta_\varepsilon \cdot \nabla h_\varepsilon) \leqslant C(\lambda,K).$$

类似有

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\rho_\varepsilon^2 - 1| |\nabla\theta_\varepsilon| |\nabla h_\varepsilon| \leqslant O(1) \|\nabla h_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}.$$

为证 $\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla h_\varepsilon|^2 \leqslant C(\lambda,K)$，充分估计

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla\theta_\varepsilon \cdot \nabla h_\varepsilon \mathrm{d}x$$

是有界的，我们计算

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla\theta_\varepsilon \cdot \nabla h_\varepsilon = \int_{\partial\Omega} h_\varepsilon \frac{\partial\theta_\varepsilon}{\partial\nu} + \sum_{j=1}^{N_\varepsilon}\int_{\partial B_j}(h_\varepsilon - \overline{h}_\varepsilon)\frac{\partial\theta_\varepsilon}{\partial\nu} \leqslant C(\lambda,K),$$

其中 $\overline{h}_\varepsilon = \int_{\partial B_j} h_\varepsilon$. 这里我们用到了

$$\int_{\partial B_j} \frac{\partial \theta_\varepsilon}{\partial \nu} = 0, \ | h_\varepsilon - \overline{h}_\varepsilon | \leqslant C(\lambda, K), \text{对每个 } \partial B_j, j = 1, \cdots, N_\varepsilon.$$

我们应用上述原理对于每一个函数 $u_\varepsilon(x,t) \in S_g(\lambda, K)$, $t > 0$, 从(3.15)知 $X_j^\varepsilon \to b_j(\varepsilon \to 0)$, $j = 1, \cdots, d$, 因对几乎处处的 t, $u_{\varepsilon_n}(x,t) \to \prod_{j=1}^{d} \frac{x - b_j}{|x - b_j|} e^{ih_0(x,t)}$, 可知 $h_0(x,t)$ 为 $h_{\varepsilon_n}(x,t)$ 在 $H^1(\Omega)$ 中的弱极限. 为确定计, 设 $h_0(x_0) \in (0, 2\pi)$, $x_0 \in \partial\Omega$, 因此 $\int_\Omega |\nabla h_0(x,t)|^2 \mathrm{d}x \leqslant C(\lambda, K)$. $\forall t > 0$, 由此易知 $h_{0(x,t)}$ 在 $\Omega \times \mathbb{R}^+$ 上满足热方程, 由此得到定理的结论.

现考虑如下问题.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\log \dfrac{1}{\varepsilon}} \dfrac{\partial}{\partial t} U_\varepsilon = \Delta U_\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon^2} U_\varepsilon (1 - |U_\varepsilon|^2), (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ U_\varepsilon(x,t) = g(x), (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ U_\varepsilon(x,0) = U_\varepsilon^0(x), x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.20}$$

其中 Ω 为 $\mathbb{R}^2$ 中的有界光滑区域, $\varepsilon > 0$ 为正参数, U_ε^0, g 和 U_ε 为 $\mathbb{R}^2$ 中光滑函数, $|g(x)| = 1$, $x \in \partial\Omega$.

设 $U_\varepsilon^0(x)$ 满足假设

$$E_\varepsilon(U_\varepsilon^0) \leqslant \pi d \log \frac{1}{\varepsilon} + K, \ \| \nabla U_\varepsilon^0 \|_{L^\infty} \leqslant \frac{K}{\varepsilon}, \tag{H}$$

且 $U_\varepsilon^0(x) \to \prod_{j=1}^{d} \frac{x - b_j}{|x - b_j|} e^{ih(x)}$ 在 $H_{\mathrm{loc}}^1(\overline{\Omega} \setminus \{b_1, \cdots, b_d\})$ 中弱收敛, d 个不同的点. $b_1, \cdots, b_d$ 在 Ω 中, $h \in H^1(\Omega)$, $d = \deg(g, \partial\Omega)$, $g: \partial\Omega \to S^1$.

定理3.2 设 $U_\varepsilon(x,t)(\varepsilon \to 0)$ 为问题(3.20)满足条件(H)的解, 则 $U_\varepsilon(x,t) \to U_*(x,t)$, $U_*(x,t) = \prod_{j=1}^{d} \frac{x - a_j(t)}{|x - a_j(t)|} e^{ih_a(x)}$ 在 $H_{\mathrm{loc}}^1(\overline{\Omega} \setminus \{a_1(t), \cdots, a_d(t)\}$ 中弱收敛, $t > 0$, $\varepsilon \to 0$. 其中

$a_j(t), j = 1,2,\cdots,d$,为 Ω 中不同的点,$\Delta h_a = 0, x \in \Omega, U_* = g, x \in \partial\Omega$,更进一步,$a(t) = \{a_1(t),\cdots,a_d(t)\}$ 满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a(t) = -\operatorname{grad}W_g(a), t > 0,$$
$$a(0) = b = (b_1,\cdots,b_d), \tag{3.21}$$

其中 $W_g(a)$ 已为(3.6)中所定义.

证 我们首先注意到,只需充分证明定理在 $0 \leqslant t \leqslant \delta$ 上,其中 $\delta = \delta(K,g,\Omega) > 0$.

对每个 $t > 0$,令 $S_*(t)$ 表示一切 V 的集合,即存在一个序列 $\varepsilon_n \to 0$ 使得 $U_{\varepsilon_n}(x,t) \to V$ 依 $L^2(\Omega)$ 模. 由下列的引理.

引理 3.3[1](一般收敛定理) 令 $U_\varepsilon \in S_g(a,K)$,则对任何序列 $\varepsilon_n \to 0$,存在 $\{U_{\varepsilon_n}\}$ 的一个子序列收敛于一个映照具有形式

$$\prod_{j=1}^{d}\frac{x-b_j}{|x-b_j|}e^{ih(x)}$$

在 $L^2(\Omega)$ 中强收敛和在 $H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}\setminus\{b_1,\cdots,b_d\}$ 中弱收敛,这里 $\{b_1,\cdots,b_d\}$ 为 Ω 中 d 个不同的点,$h(x) \in H^1(\Omega)$.

我们看到,如果 $V \in S_*(t)$,则

$$V(x) = \prod_{j=1}^{d}\frac{x-b_j(t)}{|x-b_j(t)|}e^{ih(x)}, \quad h \in H^1(\Omega),$$

$\{b_1(t),\cdots,b_d(t)\}$ 为 Ω 中 d 个不同的点. 进一步,$U_{\varepsilon_n}(\cdot,t)$ 在 $H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}\setminus\{b_1(t),\cdots,b_d(t)\}$ 中弱收敛于 V,且 $\|h\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C(g,K,\Omega)$.

令 $A_*(t) = \{b(t) = (b_1(t),\cdots,b_d(t))\}$,存在 $V \in S_*(t)$,且

$$V(x) = \prod_{j=1}^{d}\frac{x-b_j(t)}{|x-b_j(t)|}e^{ih(x)}.$$

[1]中定理5.1推出 Hausdorff 距离$(A_*(t),A_*(t+\Delta t)) \leqslant \eta(\Delta t), \forall t > 0, \Delta t > 0, \eta(\Delta t) \to 0, \Delta t \to 0^+$.

进一步由引理 3.3 可知,

$d_0(t) = \inf\{b_i(t) - b_j(t), \mathrm{dist}(b_j(t),\partial\Omega), j,i = 1,\cdots,d, i \neq j\}$

$$\geqslant \delta = \delta(K, g, \Omega) > 0, \forall t > 0$$

令 $R_0 = \dfrac{\delta_0}{4}$,选取 $\delta = \delta(K, g, \Omega)$,使得 $\eta(\delta) \leqslant \dfrac{R_0}{4}$,则对 $\theta \leqslant t \leqslant \delta$ 有 $A_*(t) \subset B_{R_0/4}(b), b = (b_1, \cdots, b_d)$.

对任何 $j = 1, 2, \cdots, d, R \in \left[\dfrac{R_0}{2}, R_0\right]$,我们有

$$\frac{1}{4\varepsilon^2}\int_{\partial B_R(b_j)} (|U_\varepsilon|^2 - 1)^2 \cdot \nu + \frac{1}{2}\int_{\partial B_R(b_j)} |\nabla U_\varepsilon|^2 \cdot \nu - \int_{\partial B_R(b_j)} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \nu} \cdot \nabla U_\varepsilon$$

$$= \frac{1}{\log \frac{1}{\varepsilon}} \int_{B_R(b_j)} \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial t} \cdot \nabla U_\varepsilon \mathrm{d}x.$$

另一方面,$e_\varepsilon = \dfrac{1}{2}\left[|\nabla U_\varepsilon|^2 + \dfrac{1}{2\varepsilon^2}(|U_\varepsilon|^2 - 1)^2\right]$,由计算得

$$\frac{1}{\log \frac{1}{\varepsilon}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{B_R(b_j)} x \cdot e_\varepsilon(u) \mathrm{d}x = -\frac{1}{\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^2} \int_{B_R(b_j)} x \left|\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial t}\right|^2$$

$$-\frac{1}{\log \frac{1}{\varepsilon}} \int_{B_R(b_j)} \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial t} \cdot \nabla U_\varepsilon \mathrm{d}x + \frac{1}{\log \frac{1}{\varepsilon}} \int_{\partial B_R(b_j)} x \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial \nu} \cdot \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial t},$$

对 $R \in \left[\dfrac{R_0}{2}, R_0\right]$,再对 t 积分,有 $f_\varepsilon(t) = g_\varepsilon(t) + h_\varepsilon(t)$,其中

$$f_\varepsilon(t) = \int_{R_0/2}^{R_0} \int_{B_R(b_j)} x \cdot \left[\frac{e_\varepsilon(U)(t)}{\log \frac{1}{\varepsilon}} - \frac{e_\varepsilon(U)(o)}{\log \frac{1}{\varepsilon}}\right] \mathrm{d}x \mathrm{d}R,$$

$$g_\varepsilon(t) = -\int_0^t \int_{R_0/2}^{R_0} \left(\int_{\partial B_R(b_j)} G_\varepsilon(U)\right) \mathrm{d}R \mathrm{d}t,$$

$$G_\varepsilon(u) = \frac{(|U_\varepsilon|^2 - 1)^2}{4\varepsilon^2}\nu + \frac{1}{2}|\nabla U_\varepsilon|^2 \nu - \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial \nu} \cdot \nabla U_\varepsilon,$$

$$h_\varepsilon(t) = -\int_{R_0/2}^{R_0} \int_0^t \frac{1}{\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^2} \int_{B_R(b_j)} x \left|\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial t}\right|^2 \mathrm{d}x \mathrm{d}t \mathrm{d}R$$

$$+ \frac{2}{R_0 \log \frac{1}{\varepsilon}} \int_0^t \int_{B_{R_0} \setminus B_{R_0/2}(b_j)} x \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial \nu} \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial t} \mathrm{d}x \mathrm{d}t.$$

由引理 3.3 和 $A_*(t) \subset B_{R_0/4}(b)$ 有

$$\int_{B_{R_0} \setminus B_{R_0/2}(b_j)} |G_\varepsilon(u)| \mathrm{d}x \leqslant \int_{B_{R_0} \setminus B_{R_0/2}(b_j)} \left[\frac{1}{4\varepsilon^2}(|U_\varepsilon|^2 - 1)^2 + \frac{3}{2}|\nabla U_\varepsilon|^2\right] \mathrm{d}x$$

$$\leqslant C(K, g, \Omega).$$

因此，$g_\varepsilon(t)$ 在 $[0, \delta]$ Lip 连续. 且对 ε 是一致的.

同样，由 $\int_0^\infty \int_\Omega \frac{1}{\log \frac{1}{\varepsilon}} \left|\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial t}\right|^2 \mathrm{d}x \mathrm{d}\tau \leqslant C(K, g, \Omega)$，我们有 $h_\varepsilon(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\log \frac{1}{\varepsilon}}}\right)$，$\forall 0 \leqslant t \leqslant \delta$，选取 $\varepsilon_n \to 0$，使得 $g_{\varepsilon_n}(t) \to g_0(t)$ 一致收敛. 因此 $g_0(t)$ 在 $[0, \delta]$ 上 Lip 连续，于是 $f_{\varepsilon_n}(t) \to f_0(t)$ 对 t 一致收敛.

$S(t)$：称 $V(x) = \prod_{j=1}^d \frac{x - a_j}{|x - a_j|} e^{ih_a(x)} \in S(t)$，如存在 $\{U_n(x)\}$ 的子序列，$u_n(x) = u_{\varepsilon_n}(x, t)$，依 $L^2(\Omega)$ 强收敛于 $V(x)$，和依 $H^1_{\mathrm{loc}}C(\Omega \setminus \{a_1, \cdots, a_d\})$ 弱收敛于 $V(x)$.

$A(t) = \{a(t) = (a_1(t), \cdots, a_d(t))$：存在 $V(x) \in S(t)$，$V(x) = \prod_{j=1}^d \frac{x - a_j(t)}{|x - a_j(t)|} e^{ih(x)}\}$ 对任何 $V(x) = \prod_{j=1}^d \frac{x - b_j(t)}{|x - b_j(t)|} e^{ih(x)} \in S(t)$，存在 $\{U_{\varepsilon_n}(x, t)\}$ 的子序列 $\{U_{\varepsilon'_n}\}$ 依 $H^1(\overline{\Omega} \setminus \{b_1, \cdots, b_d\})$ 弱收敛于 $V(x)$，对此子序列，易知

$$\frac{1}{\log \frac{1}{\varepsilon_n}} e_{\varepsilon'_n}(U_{\varepsilon'_n})(t) \to \pi \sum_{j=1}^d \delta_{b_j}(t).$$

因此，$f_{\varepsilon'_n}(t) \to \pi(b_j(t) - b_j) = g_0(t)$，这就推出 $A(t)$ 仅含有单点，表以 $a(t) = (a_1(t), \cdots, a_d(t))$.

最后，由 [1，定理 5.11] 有 $\int_{B_{R_0} \setminus B_{R_0/2}(b_j)} G_{\varepsilon_n}(U) \mathrm{d}x$ 收敛于

$\frac{\pi R_0}{2}\nabla_{a_j}W_g(a(t))$，对几乎一切 $t>0$ 成立.

令 $b_j=a_j(0)$，则

$$\pi(a_j(t)-a_j(0))=-\pi\int_0^t\nabla a_jW_g(a(\tau))\mathrm{d}\tau,$$

$$\frac{\mathrm{d}a_j(t)}{\mathrm{d}t}=-\nabla a_jW_g(a(t)),$$

$$a_j(0)=b_j,j=1,2,\cdots,d.$$

因 $a(t)$ 惟一地由(3.21)决定，初值 $a(0)=b$，易见

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}f_\varepsilon(t)=\lim_{\varepsilon\to0^+}g_\varepsilon(t)=a(t),$$

定理得证.

考虑 Ginzburg-Landau 热流问题.

$$\frac{1}{\lambda_\varepsilon}\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial t}=\Delta U_\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon^2}U_\varepsilon(1-|U_\varepsilon|^2),(x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}^+,\quad(3.22)$$

$$U_\varepsilon(x,t)=g(x),x\in\partial\Omega,t\geqslant0,\quad(3.23)$$

$$U_\varepsilon(x,0)=U_\varepsilon^0(x),x\in\Omega.\quad(3.24)$$

这里 Ω 为二维光滑有界区域，ε 和 λ_ε 为正参数，$U_\varepsilon:\Omega\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^2$，$g:\partial R\to\mathbb{R}^2$为光滑的，且 $|g(x)|=1,x\in\partial\Omega$，且设满足相容条件 $U_\varepsilon^0(x)=g(x),x\in\partial\Omega$.

对于初值作如下假设：

(ⅰ) $|U_\varepsilon^0(x)|\leqslant1,\ |\nabla U_\varepsilon^0(x)|\leqslant K/\varepsilon,x\in\Omega,$

(ⅱ) $E_\varepsilon(U_\varepsilon^0)=\frac{1}{2}\int_\Omega[|\nabla U_\varepsilon^0|^2+\frac{1}{2\varepsilon^2}(|U_\varepsilon^0|^2-1)^2]\mathrm{d}x$

$$\leqslant\pi d\log\frac{1}{\varepsilon}+K,$$

(ⅲ) $\int_\Omega\rho^2(x)e_\varepsilon(V_\varepsilon^0)\mathrm{d}x\leqslant K,$

其中 $\rho(x)=\mathrm{dist}(x,\{b_1,b_2,\cdots,b_d\})$，$b_1,\cdots,b_d$ 为 Ω 中的不同点，且

$U_\varepsilon^0(x)\to\prod_{j=1}^d\frac{x-b_j}{|x-b_j|}e^{ih(x)}$ 在 $H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}\setminus\{b_1,\cdots,b_d\})$ 中弱收敛，这里 K 为正常数，与 ε 无关，$d>0$ 为映照 g 的拓扑度，

$g:\partial\Omega \to S^1$.

在[3]中证明了如下结果.

定理 3.4 如 $\lambda_\varepsilon = 1$，则当 $\varepsilon \to 0$ 时，初边值问题(3.22)—(3.24)的解 $U_\varepsilon(x,t)$ 在 $H^1_{loc}(\overline{\Omega}\setminus\{b_1,\cdots,b_d\})$ 中弱收敛于 $U_0(x,t) = \prod_{j=1}^{d} \frac{x-b_j}{|x-b_j|} e^{ih(x,t)}$，这里函数 $h(x,t)$ 满足

$$
\begin{cases}
\frac{\partial h}{\partial t} = \Delta h, (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, & (3.25)\\
h(x,0) = h(x), x \in \Omega, & (3.26)\\
\prod_{j=1}^{d} \frac{x-b_j}{|x-b_j|} e^{ih(x,t)} \equiv g(x), x \in \partial\Omega. & (3.27)
\end{cases}
$$

当 $\lambda_\varepsilon \to \infty$ 和 $\lambda_\varepsilon / \log 1/\varepsilon \to \infty$ 时($\varepsilon \to 0$)，则初边值问题的解 $U_\varepsilon(x,t)$ 依 $H^1_{loc}(\overline{\Omega}\setminus\{b_1,\cdots,b_d\})$ 弱收敛于 $\prod_{j=1}^{d} \frac{x-b_j}{|x-b_j|} e^{ih_b(x)}$，其中 $\Delta h_a = 0, x \in \Omega, a = \{a_1,\cdots,a_d\}$ 为重整化能量 $W_g(a)$ 的临界点，$W_g(a)$ 定义为

$$
W_g(x_1,x_2,\cdots,x_d) = -\sum_{i\neq j}\log|x_i - x_j| - \sum_{j=1}^{d} R(x_j) + \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega}\left(R + \sum_{j=1}^{d}\log|x - x_j|\right) g \wedge g_\tau, \quad (3.28)
$$

其中

$$
\begin{cases}
\Delta R = 0, x \in \Omega,\\
\frac{\partial R}{\partial \boldsymbol{\nu}} = g \wedge g_\tau - \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\sum_{j=1}^{d}\log|x - x_j|\right), x \in \partial\Omega.
\end{cases} \quad (3.29)
$$

最后，如 $\lambda_\varepsilon = \log\frac{1}{\varepsilon}$，则当 $\varepsilon \to 0$ 时

$U_\varepsilon(x,t) \to \prod_{j=1}^{d} \frac{x-a_j(t)}{|x-a_j(t)|} e^{ih_{a(t)}(x)}$ 在 $H^1_{loc}(\Omega\setminus\{a_1(t),\cdots,a_d(t)\})$ 中弱收敛，$\forall\, t > 0$，

$\Delta h_{a(t)}(x) \equiv 0, x \in \Omega$,

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a(t) = -\operatorname{grad}W_g(a(t)), 0 < t < \infty, \\ a(0) = b = (b_1, \cdots, b_d).\end{cases} \tag{3.30}$$

在[4]中对于钉扎问题,考虑如下问题

$$\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{a(x)}\operatorname{div}(a(x)\nabla U_\varepsilon) + \frac{U_\varepsilon(1-|U_\varepsilon|^2)}{\varepsilon^2}, (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \tag{3.31}$$

$$U_\varepsilon(x,0) = U_\varepsilon^0(x), \quad x \in \Omega, \tag{3.32}$$

$$U_\varepsilon(x,t) = g(x), \quad x \in \partial\Omega, t \geqslant 0, \tag{3.33}$$

其中 $a(x)$ 为正的 C^2 函数在 $\overline{\Omega}$ 上.

初值 $U_\varepsilon^0(x)$ 满足如下假设:

(A_1) $U_\varepsilon^0(x) \to \prod_{j=1}^{k}\left(\frac{x-b_j}{|x-b_j|}\right)^{d_k} e^{ih_0(x)}$ 依 $H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}\setminus\{b_1,\cdots,b_k\})$ 弱收敛,$(b_1,\cdots,b_k)$ 为 Ω 中的 k 个不同的点,$\sum_{j=1}^{k} d_j = d \equiv \deg(g)$,$d_j \neq 0$;

(A_2) $\int_\Omega \rho^2(x)\left[|\nabla U_\varepsilon^2(x)|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2}(|U_\varepsilon^0(x)|^2-1)^2\right]\mathrm{d}x \leqslant K$,$K$ 为正常数,与 ε 无关,$\rho(x) = \min\{|x-b_j|, j=1,\cdots,k\}$;

(A_3) $E_\varepsilon(U_\varepsilon^0) \equiv \frac{1}{2}\int_\Omega\left[|\nabla U_\varepsilon^0(x)|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2}(|U_\varepsilon(x)|^2-1)^2\right]\mathrm{d}x$
$\leqslant K[|\log\varepsilon|+1]$.

为方便计,设相容条件满足:$U_\varepsilon^0(x) = g(x), x \in \partial\Omega$.

定理 3.5 在假设(A_1),(A_2),(A_3)下,则对任何 $0 < t < T$ 我们有

$$U_\varepsilon(x,t) \to \prod_{j=1}^{k}\left(\frac{x-a_j(t)}{|x-a_j(t)|}\right)^{d_j} e^{ih(x,t)} \text{ 依 } H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}\setminus\{a_1(t), \cdots, a_k(t)\}) \text{ 收敛}, \tag{3.34}$$

这里收敛理解为对 ε 的任何序列趋于零,存在一个子序列使(3.34)成立.更进一步,对任何极限函数 $h(x,t)$,在远离点集 $\{a_j(t), j=1,\cdots,k, t>0\} \subseteq \Omega \times \mathbb{R}^+$,它满足线性抛物型方程,

函数 $a_j(t)\in\Omega, j=1,\cdots,k$,满足 ODE:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_j(t)=-\dfrac{\nabla a(a_j(t))}{a(a_j(t))}, & j=1,\cdots,k,\\ a_j(0)=b_j, & 0\leqslant t\leqslant T.\end{cases}\tag{3.35}$$

这里 T 选取使得 $a_j(t)$ 停留在 Ω 内,且 $a_l(t)\neq a_j(t), \forall 0<t<T, l,j=1,\cdots,k$.

对于 Neumann 边界条件,我们考虑如下问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U_\varepsilon}{\partial t}=\Delta U_\varepsilon+\dfrac{1}{\varepsilon^2}U_\varepsilon(1-|U_\varepsilon|^2), & (x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}^+, & (3.36)\\ U_\varepsilon(x,0)=U_\varepsilon^0(x), & x\in\Omega, & (3.37)\\ \dfrac{\partial U_\varepsilon}{\partial \boldsymbol{\nu}}(x,t)=0, & x\in\partial\Omega. & (3.38)\end{cases}$$

设初值满足以下条件:

$(A_4)E_\varepsilon(U_\varepsilon^0)\leqslant \pi d\log\dfrac{1}{\varepsilon}+K, \|\nabla U_\varepsilon^0\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant\dfrac{K}{\varepsilon}$;

$(A_5)U_\varepsilon^0(x)\rightharpoonup\prod\limits_{j=1}^{d}\left(\dfrac{x-b_j}{|x-b_j|}\right)^{d_j}e^{ih_0(x)}, d_j=\pm1$,

依 $H^1_{loc}(\overline{\Omega}\setminus\{b_1,\cdots,b_d\})$ 弱收敛,$(b_1,\cdots,b_d)$ 为 Ω 中的 d 个不同的点,$h_0(x)\in H^1(\Omega)$;

$(A_6)\{x:|U_\varepsilon^0(x)|\leqslant\dfrac{1}{2}\}\subseteq\bigcup\limits_{j=1}^{d}B_{\delta_0}(b_j)\subseteq\{x\in\Omega;\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)\geqslant\delta_0\}$.

进一步考虑一族问题代替问题(3.36),(3.37),(3.38):

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda_\varepsilon}\dfrac{\partial U_\varepsilon}{\partial t}=\Delta U_\varepsilon+\dfrac{U_\varepsilon}{\varepsilon^2}(1-|U_\varepsilon|^2),(x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}^+;\lambda_\varepsilon>0, & (3.39)\\ U_\varepsilon(x,0)=U_\varepsilon^0(x),x\in\Omega, & (3.40)\\ \dfrac{\partial U_\varepsilon}{\partial\boldsymbol{\nu}}(x,t)=0,x\in\partial\Omega. & (3.41)\end{cases}$$

定理 3.6 设 $U_\varepsilon(x,t)$ 为问题(3.39)—(3.41)的解,$U_\varepsilon^0(x)$ 满足假设(A_4)—(A_6),则有如下结论:

(i) 如 $\lambda_\varepsilon\equiv1$,则

$$U_\varepsilon(x,t)\rightharpoonup\prod_{j=1}^{d}\left(\frac{x-b_j}{|x-b_j|}\right)^{d_j}e^{ih(x,t)}=e^{i(\theta_b+h(x,t))}$$

依 $H^1_{loc}(\overline{\Omega}\setminus\{b_1,\cdots,b_d\})$ 弱收敛,其中 $h(x,t)$ 为如下问题的解:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial h}{\partial t}=\Delta h,(x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}^+,\\ \dfrac{\partial h}{\partial \boldsymbol{v}}=-\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}}\theta_b,x\in\partial\Omega,\\ h(x,0)=h_0(x),x\in\Omega.\end{cases}\tag{3.42}$$

(ⅱ) 如 $\lambda_\varepsilon\to+\infty,\lambda_\varepsilon/\log\varepsilon\to 0,\varepsilon\to 0$,则

$$U_\varepsilon(x,t)\to\prod_{j=1}^{d}\left(\frac{x-b_j}{|x-b_j|}\right)^{d_j}e^{ih(x)}\text{ 依 }L^2_{loc}(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^+)\text{ 强收敛}$$

和依 $H^1_{loc}(\overline{\Omega}\setminus\{b_1,\cdots,b_d\})$ 弱收敛,$t>0,\varepsilon\to 0$,其中 $\Delta h=0$, $x\in\Omega,\dfrac{\partial h}{\partial \boldsymbol{v}}=-\dfrac{\partial\theta_b}{\partial \boldsymbol{v}},x\in\partial\Omega$;

(ⅲ) 如 $\lambda_\varepsilon=\log\dfrac{1}{\varepsilon}$,则

$$U_\varepsilon(x,t)\to\prod_{j=1}^{d}\left(\frac{x-a_j(t)}{|x-a_j(t)|}\right)^{d_j}e^{ih_a(x)}$$

依 $H^1_{loc}(\overline{\Omega}\setminus\{a_1(t),\cdots,a_d(t)\})$ 弱收敛,$\forall 0<t\leqslant T,\varepsilon\to 0$,其中 $a_j(t),j=1,\cdots,d$ 为 Ω 中 d 个不同的点,$\Delta h_a=0,x\in\Omega$.

$$\frac{\partial h_a}{\partial \boldsymbol{v}}=-\frac{\partial\theta_{a(t)}}{\partial \boldsymbol{v}},x\in\partial\Omega.$$

更进一步,函数 $a(t)=(a_1(t),\cdots,a_d(t))$ 满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a(t)=-\operatorname{grad}W(a),t\in(0,T],\tag{3.43}$$

且 $a(0)=b=(b_1,\cdots,b_d)$,T 选取使得所有 $a_j(t)$ 停留在 Ω 内,$j=1,\cdots,d,0\leqslant t\leqslant T,a_j(t)\neq a_l(t),j\neq l$.

现在 Riemann 流形上考虑上述问题.

设 M 为紧的光滑的无边的 Riemann 流形,令 $g=g_{ij}(x)d_{x_i}\otimes d_{x_j}$ 为 M 上的度量,设至少为 C^3. 考虑

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}=\Delta_M u_\varepsilon+\dfrac{u_\varepsilon}{\varepsilon^2}(1-|u_\varepsilon|^2),(x,t)\in M\times\mathbb{R}^+, & (3.44)\\ u_\varepsilon(x,0)=u^0_\varepsilon(x),x\in M, & (3.45)\end{cases}$$

其中 Δ_M 为在 (M,g) 上的 Laplace-Beltrami 算子.

设 Γ_0 为 $n-2$ 维的可嵌入的 C^2 子流形的并，$n=\dim M$，$T>0$，设 $\{\Gamma_t\}$，$0\leqslant t\leqslant T$ 为一族由 Γ_0 依平均曲率运动得到的 M 的可嵌入 C^2 子流形. 初值 $u_\varepsilon^0(x)$ 满足如下的$(\mathrm{H}_1)(\mathrm{H}_2)(\mathrm{H}_3)$:

$$(\mathrm{H}_1)\int_M \rho^2(x)\left[|\nabla u_\varepsilon^0|^2+\frac{1}{2\varepsilon^2}(|u_\varepsilon^0|^2-1)^2\right]\mathrm{d}x\leqslant K,$$

其中 K 为某正常数，$0<\varepsilon\leqslant 1$，$\rho(x)\leqslant \mathrm{dist}_Q(x,T_0)$；

(H_2) u_ε^0 依C^0 模收敛于远离 Γ_0 的映照$(\varepsilon\to 0)$，它的像为 S^1；

(H_3) 令 Γ_0^i，$i=1,\cdots,k$，为 Γ_0 的连通分量，$\delta>0$，选取得使得集合 $\Gamma_0^i(\delta)$，$i=1,\cdots,k$，为两两不相交，这里

$$\Gamma_0^i(\delta)=\{x\in Q:\mathrm{dist}_Q(x,\Gamma_0^i)\leqslant\delta\}.$$

令 S 为 $\partial\Gamma_0^i(\delta)$ 的嵌入圆，使得 S 对Γ_0^i 的环绕数为 1，则我们能设映照 $\hat{u}_\varepsilon^0:S\to S^1$ 的度为 ± 1，(小的 $\varepsilon>0$). 进一步，测度

$$\mu_\varepsilon^0=\frac{\frac{1}{2}\left[|\nabla u_\varepsilon|^2+\frac{1}{2\varepsilon^2}(|u_\varepsilon^0|^2-1)^2\right]\mathrm{d}x}{\log\frac{1}{\varepsilon}}$$

当 $\varepsilon\to 0^+$ 时弱收敛于 $\mu(0)$，使得 $\mu(0)\leqslant C_1H^{n-2}L\Gamma_0$，这里 $H^{n-2}L\Gamma_0$ 表示$(n-1)$ 维限制于 Γ_0 的 Hausdorff 测度.

我们有如下定理.

定理3.7 在上述假设下，问题(3.44)，(3.45)的解 $u_\varepsilon(x,t)$ 依 $H_{\mathrm{loc}}^1(M\setminus\Gamma_t)$ 收敛于映照 $u_*(x,t)$，这里 $u_*(x,t)$ 远离 Γ_t 是光滑的，其值为 S^1，满足调和映照到 S^1 的热流方程. 进一步，测度

$$\mu_\varepsilon(t)=\frac{\frac{1}{2}\left[|\nabla_M u_\varepsilon|^2(x,t)+\frac{(|u_\varepsilon|^2-1)^2}{2\varepsilon^2}(x,t)\right]}{\log 1/\varepsilon}\mathrm{d}x$$

收敛于 $\mu(t)$，使得 $\pi H^{n-2}L\Gamma_t\leqslant\mu(t)\leqslant C_0H^{n-2}L\Gamma_t$.

考虑如下定解问题:

$$\begin{cases}u_t=\Delta u+\frac{1}{\varepsilon^2}(1-|u|^2)u, & (x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}^+,\\ u(x,t)=g(x), & x\in\partial\Omega,\quad t>0,\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\Omega,\end{cases}\tag{3.46}$$

其中 Ω 为二维的光滑有界区域，$\varepsilon > 0, u:\Omega \to \mathbb{R}^2, g:\partial\Omega \to \mathbb{R}^2$ 为光滑的，且 $|g| = 1$. 且设 $u_0(x) = g(x), x \in \partial\Omega$.

定理 3.8[6] （ⅰ）$\lim\limits_{t\to\infty} u_\varepsilon(x,t) = u_\varepsilon(x)$ 存在，且 $u_\varepsilon(x)$ 为问题(3.46) 的一个定态解.

（ⅱ）$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(x)$ 存在，进一步 $u_\varepsilon(x)$ 两极限为 $u^*(x)$，$u^*(x)$

$$= \prod_{j=1}^{k}\left(\frac{z-a_j}{|z-a_j|}\right)^{d_j} e^{ih(x)}, x \in \Omega \subset \mathbb{C}, \sum_{j=1}^{k} d_j = d = \text{degree of } g,$$

$$\Delta h = 0, x \in \Omega, u^*|_{\partial\Omega} = g.$$

如适当选取初值 $u_0^\varepsilon(x)$，则 $k = d, d_j = 1, j = 1,2,\cdots,d$，奇点 $a(a_1,\cdots,a_d)$ 为 W_g 的临界点.

（ⅲ）恰当地选取初值 $u_0^\varepsilon(x)$，有 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(x,t) = u_0(x)$，$u_0(x)$ 具有形式

$$u_0(x) = \prod_{j=1}^{d} \frac{x-b_j}{|x-b_j|} e^{ih_0(x)},$$

其中 $\Delta h_0(x) = 0, x \in \Omega, b = (b_1,\cdots,b_d)$ 为 Ω 中的任意点（依赖于 u_0^ε），使得 $b_i \neq b_j, i \neq j$.

§4 Ginzburg-Landau 方程和平均曲率流

我们首先研究 Allen-Cahn 方程的渐近状态，即考虑如下 Allen-Cahn 方程的初值问题，

$$\begin{cases} V_t^\varepsilon - \Delta V^\varepsilon - \dfrac{1}{\varepsilon^2} f(V^\varepsilon) = 0, \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ V^\varepsilon = h^\varepsilon, \end{cases} \tag{4.1}$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时 V^ε 的极限状态，其中 $f(z) = 2(z^3 - z)$. 为此，我们需要有关由平均流运动引起的距离函数和 Allen-Cahn 方程上下解的知识.

给定紧子集 $\Gamma_0 \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2$，选取连续函数 $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 满足

$$\Gamma_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\} \tag{4.2}$$

和

$$g \text{ 在某个球外为常数.} \tag{4.3}$$

考虑如下平均曲率发展方程,

$$\begin{cases} u_t = \left(\delta_{ij} - \dfrac{u_{x_i} u_{x_j}}{|Du|^2}\right) u_{x_i x_j}, & \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g, & \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{4.4}$$

对于方程(4.4),已经断言:对于 u 的每一个水平集依平均曲率流发展,至少在 $Du \neq 0$ 的区域内 u 为光滑的,且存在(4.4)惟一的连续的弱解,定义紧集

$$\Gamma_t \equiv \{x \in R^n \mid u(x,t) = 0\}, t \geqslant 0, \tag{*}$$

称 $\{\Gamma_t\}_{t \geqslant 0}$ 为水平集,从 Γ_0 开始依平均流运动.

令 $t^* = \inf\{t > 0 \mid \Gamma_t = \varnothing\}$ 表示熄灭时间,对任何有限时间 $0 \leqslant t \leqslant t^*$,让

$$d(x,t) \equiv \operatorname{dist}(x, \Gamma_t), x \in \mathbb{R}^n, \tag{4.5}$$

表示在 $\mathbb{R}^n$ 中 x 到 Γ_t 的距离,由 u 的连续性推出 Γ_{t^*} 为非空的,函数 d 对变量 x 是连续的,但对时间 t 可能是不连续的,例如 Γ_t 可能分裂为两块,其中之一在另一个之前发展成为空集.

命题 4.1

(ⅰ) 对 $\forall x \in \mathbb{R}^n, 0 \leqslant t \leqslant t^*$,

$$d(x,t) \leqslant \liminf_{\substack{y \to x \\ s \to t}} d(y,s).$$

(ⅱ) 对 $x \in \mathbb{R}^n, 0 < t \leqslant t^*$,

$$d(x,t) \leqslant \lim_{\substack{y \to x \\ s \downarrow t}} d(y,s).$$

证 (1) 选取 $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$, $\{s_k\}_{k=1}^\infty \subset [0, t^*]$ 使得 $y_k \to x$, $s_k \to t$ 和

$$d(y_k, s_k) \longrightarrow \liminf_{\substack{y \to x \\ s \to t}} d(y,s).$$

Γ_{s_k} 是紧的,非空的,则存在一点 $z_k \in \Gamma_{s_k}$ 使得

$$d(y_k, s_k) = \operatorname{dist}(y_k, \Gamma_{s_k}) = |y_k - z_k|, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

我们选取子序列$\{z_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$和一点$z \in \mathbb{R}^n$使得$z_{k_j} \to z$，当$z_k \in \Gamma_{s_k}$时，$u(z_k, s_k) = 0(k = 1,2,\cdots)$，推之，$u(z,t) = 0$，因此，$z \in \Gamma_t$. 于是

$$d(x,t) = \mathrm{dist}(x, \Gamma_t) \leqslant |x - z| = \lim_{j \to \infty} |y_{k_j} - z_{k_j}|$$
$$= \lim_{j \to \infty} d(y_k, s_{k_j}) = \lim_{\substack{y \to x \\ s \to t}} \inf d(y,s).$$

这就证明了(i).

(2) 为验证(ii)，设$d(x,t) < \limsup\limits_{\substack{y \to x \\ s \uparrow t}} d(y,s)$，选取$\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$，$\{s_k\}_{k=1}^{\infty} \subset [0,t]$满足$y_k \to x$，$s_k \uparrow t$且

$d(y_k, s_k) \to \limsup\limits_{\substack{y \to x \\ s \uparrow t}} d(y,s)$，则存在$r \in \mathbb{R}$满足

$$d(x,t) < r < d(y_k, s_k), \forall k \text{ 充分大}, k \geqslant k_0. \tag{4.6}$$

特别，

$$B(y_k, r) \subset [\mathbb{R}^d \setminus \Gamma_{s_k}], k \geqslant k_0. \tag{4.7}$$

令$B(y_k, r) = \Delta_{s_k}^k$，设$\{\Delta_s^k\}_{s \geqslant s_k}$表示球$\Delta_{s_k}^k$依平均曲率流发展的子序列，则由(4.7)推出$\Delta_s^k \cap \Gamma_s = \varnothing, \forall s \geqslant s_k$，由直接计算知，$\Delta_s^k = B(y_k, r_k(s))(s_k \leqslant s < t)$，其中$r_k(s) = [r^2 - 2(n-1)/(s - s_k)]^{1/2}$，当$\Delta_t^k \cap \Gamma_t = \varnothing$时，推出$d_{(y_k,t)} \geqslant r_k(t)(k \geqslant k_0)$，令$k \to \infty$，可知$d(x,t) \geqslant r$和(4.6)矛盾.

定理 4.2 设d为距离函数，则

$$d_t - \Delta d \geqslant 0, \text{当} \{d > 0\} \subset \mathbb{R}^n \times (0, t^*). \tag{4.8}$$

如Γ依平均曲率光滑运动，直接计算验证$d_t - \Delta d \geqslant 0$，在靠近$\Gamma$的区域，$d$为光滑的，实际上，函数$d$为热传导方程的整体上界(弱解)，即为黏性解.

证 (1) 固定试验函数$\phi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$，且设

$$d - \phi \text{ 在点}(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, t^*) \text{ 上达到极小}, \tag{4.9}$$

其中

$$d(x_0, t_0) > 0. \tag{4.10}$$

我们必须证明

$$\phi_t - \Delta\phi \geqslant 0, 在(x_0, t_0) 上. \tag{4.11}$$

(2) 如必要加一常数于 ϕ,使得

$$\phi(x_0, t_0) = d(x_0, t_0) \equiv \delta > 0. \tag{4.12}$$

由于(4.9) 和(4.11),我们有

$$d(x, t) \geqslant \phi(x, t), x \in \mathbb{R}^n, 0 < t < t^*. \tag{4.13}$$

选取 $z_0 \in \Gamma_{t_0}$ 使得

$$d(x_0, t_0) = |x_0 - z_0| = \delta. \tag{4.14}$$

利用旋转坐标,可设

$$x_0 = z_0 + \delta e_n, \tag{4.15}$$

其中 $e_n = (0, \cdots, 0, 1)$. 置

$$\psi(x, t) = \phi(x + x_0 - z_0, t) - \delta, x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \tag{4.16}$$

则

$$\psi(z_0, t_0) = 0. \tag{4.17}$$

(3) 我们断言

$$\{\psi > 0\} \subseteq \{d > 0\}. \tag{4.18}$$

为验证这个结论,选取任意点 $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, t^*)$,其中 $\psi(x, t)$ 为(4.16) 所确定,则由(4.13),(4.16) 有 $d(x + x_0 - z_0, t) \geqslant \phi(x + x_0 - z_0, t) > \delta$,如 $d(x, t) = 0$,则 $\delta < d(x + x_0 - z_0, t) - d(x, t) \leqslant |x_0 - z_0| = \delta$. 矛盾,断言(4.18) 成立.

(4) 现验证

$$D\phi(x_0, t_0) = e_n, \tag{4.19}$$

$$\phi_{x_n x_n}(x_0, t_0) \leqslant 0. \tag{4.20}$$

事实上,由(4.12),(4.13) 推出

$$\begin{aligned}\phi(x, t_0) - \phi(x_0, t_0) &\leqslant d(x, t_0) - d(x_0, t_0) \\ &\leqslant |x - x_0|, x \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

推之,$|D\phi(x, t_0)| \leqslant 1$. 另一方面,考虑数量函数 $\Phi(s) = \phi(z_0 + se_n, t_0)(s > 0)$,由(4.13) 有

$$\Phi(s) \leqslant d(z_0 + se_n, t_0) \leqslant \delta.$$

因 $z_0 \in \Gamma_0$,再有 $\Phi(s) = \phi(z_0 + \delta e_n, t_0) = d(x_0, t_0) = \delta$,则

$$\Phi'(\delta) = 1, \Phi''(\delta) \leqslant 0.$$

即有 $\phi_{x_n}(x_0, t_0) = 1, \phi_{x_n x_n}(x_0, t_0) \leqslant 0$.

(5) 再回到主要任务. 验证不等式(4.11). 必要时, 可置换 u 为 $|u|$. 能设

$$u \geqslant 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty).$$

因此 $\{d > 0\} = \{u > 0\}$, 由(4.18)推出

$$\{\psi > 0\} \subseteq \{u > 0\}. \tag{4.21}$$

我们构造连续函数 $\psi: [0, \infty) \to [0, \infty)$. 使得

$$\psi(0) = 0, \psi(z) > 0, z > 0, \tag{4.22}$$

$$\psi(z, t) \leqslant \psi(u(z, t)), (z, t) \text{ 靠近} (z_0, t_0). \tag{4.23}$$

为此, 定义紧集

$E_k = \{x \in \mathbb{R}^n, 0 < t < t^* \mid \psi(x, t) \geqslant \frac{1}{k}, |x - x_0| \leqslant 1$, $|t - t_0| \leqslant 1\}, k = 1, 2, \cdots$. 记 $\beta_k = \inf\limits_{E_k} u$, 由于(4.21), $\beta_1 \geqslant \cdots \geqslant \beta_k \geqslant \beta_{k+1} \geqslant \cdots > 0$, 且有 $\lim\limits_{k \to \infty} \beta_k = 0$, 因 $u(z, t_0) = \psi(z_0, t_0) = 0$, 选取子序列 $\{\beta_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$, 满足 $\beta_{k_j} > \beta_{k_{j+1}} (j = 1, 2, \cdots)$, 定义 $\psi: [0, \infty) \to \mathbb{R}$.

$$\psi(\beta_{k_{j+1}}) = \frac{1}{k_j}, \quad j = 1, 2, \cdots,$$

ψ 在 $[\beta_{k_{j+1}}, \beta_{k_j}]$ 上是线性的, 则如 $(x, t) \in E_{k_{j+1}} \setminus E_{k_j}$, 因此在集合

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} E_{k_{j+1}} \setminus E_{k_j} = \left\{0 < \psi < \frac{1}{k_1}\right\}$$

(4.23) 是正确的, 因(4.23) 在 $\{\psi \leqslant 0\}$ 上是平凡的, 我们推出(4.23) 对所有点靠近 (z_0, t_0) 是对的.

(6) 可让 $\psi(u)$ 为平均曲率方程的解. 由(4.17), (4.23) 推出 $\psi(u) - \psi$ 在 (z_0, t_0) 具有局部极小. 我们有

$$\psi_t - \left(\delta_{ij} - \frac{\psi_{x_i}\psi_{x_j}}{|D\psi|^2}\right)\psi_{x_i x_j} \geqslant 0, \quad \text{在} (z_0, t_0) \text{ 上},$$

依(4.16)

$$\psi_t(z_0,t_0)=\phi_t(x_0,t_0), D\psi(z_0,t_0)=D\phi(x_0,t_0),$$
$$D^2\psi(z_0,t_0)=D^2\phi(x_0,t_0).$$

因此,由(4.19),(4.20)得到

$$\phi_t-\Delta\phi=\phi_t-\left(\delta_{ij}-\frac{\phi_{x_i}\phi_{x_j}}{|D\phi|^2}\right)\phi_{x_ix_j}-\phi_{x_nx_n}\geqslant 0,\quad 在(z_0,t_0)上.$$

这就是不等式(4.11).

以上的证明可给出一个几何解释.基于(4.16),(4.19),集合$\{\psi=0\}$为靠近(z_0,t_0)点的光滑超曲面S,它正切于集合Γ(可能不光滑)于(z_0,t_0)点.从平均曲率流方程解的定义有

$$\psi_t-\left(\delta_{ij}-\frac{\psi_{x_i}\psi_{x_j}}{|D\psi|^2}\right)\psi_{x_ix_j}\geqslant 0,\quad 在(z_0,t_0)上.$$

这意味S在(z_0,t_0)上的速度$\geqslant S$在(z_0,t_0)处的平均曲率($n-1$次).

附注,事实上d为热传导方程$t\leqslant t^*$上的上解,即有

$$d_t-\Delta d\geqslant 0,\{d>0\}\subset\mathbb{R}^n\times(0,t^*]. \qquad (4.24)$$

为验证这个,设对上述的ϕ有

$$d-\phi\ 在(x_0,t_0)上取得极小.$$

其中$t_0=t^*$,$d(x_0,t_0)>0$,通过修定,可设$d-\phi$在(x_0,t_0)达到严格极小.给定$\varepsilon>0$,记

$$\psi^{\varepsilon}(x,t)\equiv\phi(x,t)+\frac{\varepsilon}{t-t^*},x\in\mathbb{R}^n,0<t<t^*.$$

因d是下半连续,$\phi^{\varepsilon}=-\infty,t=t^*$,$d-\phi^{\varepsilon}$在$(x_{\varepsilon},t_{\varepsilon})\in\mathbb{R}^n\times(0,t^*)$具有极小,且

$$x_{\varepsilon}\to x_0,t_{\varepsilon}\to t_0=t^*,\varepsilon\to 0. \qquad (4.25)$$

因$d(x_0,t_0)>0$,d为下半连续,我们有$d(x_{\varepsilon},t_{\varepsilon})>0$,$\varepsilon$充分小.由定理4.2推出.

$$\phi_t^{\varepsilon}-\Delta\phi^{\varepsilon}\geqslant 0,在(x_{\varepsilon},t_{\varepsilon})上,$$

因为$\phi_t^{\varepsilon}(x,t)=\phi_t(x,t)-\dfrac{\varepsilon}{(t-t^*)^2}\leqslant\phi_t(x,t)$.因此,$\phi_t-\Delta\phi\geqslant 0$,在$(x_{\varepsilon},t_{\varepsilon})$上.令$\varepsilon\to 0$,即得.

我们利用新的符号,设Γ_0为有界开集$U\subset\mathbb{R}^n$的边界,选取

连续函数 g，使得

$$g(x)\begin{cases}>0, x\in U,\\ =0, x\in \Gamma_0,\\ <0, x\in \mathbb{R}^n-\overline{U}.\end{cases} \tag{4.26}$$

解平均曲率方程(4.4). 定义

$$I_t=\{x\in\mathbb{R}^n \mid u(x,t)>0\}, \tag{4.27}$$

$$O_t=\{x\in\mathbb{R}^n \mid u(x,t)<0\}. \tag{4.28}$$

由于(*)和(4.26)，可把 I_t 看作"内部"，O_t 为"外部". 记

$$I\equiv\{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty)\mid u(x,t)>0\}, \tag{4.29}$$

$$O\equiv\{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty)\mid u(x,t)<0\}. \tag{4.30}$$

改写

$$d(x,t)=\begin{cases}\operatorname{dist}(x,\Gamma_t), \quad x\in I_t,\\ 0, x\in\Gamma_t, x\in\mathbb{R}^n, \quad 0\leqslant t\leqslant t^*,\\ -\operatorname{dist}(x,\Gamma_t), \quad x\in O_t.\end{cases} \tag{4.31}$$

则定理(4.2)可写成

定理 4.3 设 d 为符号距离函数，则

$$d_t-\Delta d\geqslant 0, I\cap(\mathbb{R}^n\times(0,t^*]), \tag{4.32}$$

$$d_t-\Delta d\leqslant 0, O\cap(\mathbb{R}^n\times(0,t^*]).$$

显然，$d_t-\Delta d=0$，在 Γ 上.

下面，我们利用符号距离函数 d 定义 Allen-Cahn 方程的上、下解.

取单位体积的自由解 F 为

$$F(z)=\frac{1}{2}(z^2-1)^2, z\in\mathbb{R}. \tag{4.33}$$

因此，

$$f(z)=F'(z)=2(z^3-z), z\in\mathbb{R}. \tag{4.34}$$

对于自由解常微分方程

$$\begin{cases}q''(s)=f(q(s)),\\ \lim\limits_{s\to\pm\infty}q(s)=\pm 1,\end{cases} \quad s\in\mathbb{R} \tag{4.35}$$

具有显式驻定波解

$$q(s) = \tanh(s) = \frac{e^{2s}-1}{e^{2s}+1}, s \in \mathbb{R}.$$

利用等式

$$\begin{cases} q'(s) = \operatorname{sech}^2(s) = \dfrac{4}{(e^s+e^{-s})^2}, \\ q''(s) = -2\operatorname{sech}^2(s)\tanh(s), \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}. \tag{4.36}$$

对固定 $0 < \delta \ll 1$,考虑光滑辅助函数 $\eta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足

$$\begin{cases} \eta(z) = -\delta, -\infty < z \leqslant \delta/4, \\ \eta(z) = z - \delta, z \geqslant \delta/2, \\ 0 \leqslant \eta' \leqslant C, \| \eta'' \| \leqslant C/\delta, \end{cases} \tag{4.37}$$

其中 C 为常数,与 δ 无关.

附注:因我们想要构造 Allen-cahn 方程的上解,我们需要再定义 d 在集合$\{d<0\}$上,依定理 4.3,d 为热传导方程的下解,这是我们引入辅助函数 η 的理由.

设$\{\Gamma_t\}_{t\geqslant 0}$为平均曲率流运动,$d$ 为相应的符号距离函数.

引理 4.4 存在常数 C 与 δ 无关,使得

$$\eta(d)_t - \Delta\eta(d) \geqslant -C/\delta, \mathbb{R}^n \times (0, t^*], \tag{4.38}$$

$$\eta(d)_t - \Delta\eta(d) \geqslant 0, \{d > \frac{\delta}{2}\} \subseteq \mathbb{R}^n \times (0, t^*]. \tag{4.39}$$

证 (1) 取 $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$,设 $\eta(d) - \phi$ 具有严格极小在点$(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, t^*)$上.

(2) 设 $d(x_0, t_0) > 0$,固定 $\varepsilon > 0$,写

$$\eta_\varepsilon(z) = \eta(z) + \varepsilon z, z \in \mathbb{R},$$

$$\rho_\varepsilon = (\eta_\varepsilon)^{-1},$$

则 $\eta_\varepsilon(d)$ 靠近(x_0, t_0)处下半连续,$\eta_\varepsilon(d) - \phi$ 在$(x_\varepsilon, t_\varepsilon) \in \mathbb{R}^n \times (0, t^*)$点上具有极小值,且

$$x_\varepsilon \to x_0, \quad t_\varepsilon \to t_0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{4.40}$$

如必要可加一常数于 ϕ 上,可设 $\eta_\varepsilon(d) - \phi = 0$, 在$(x_\varepsilon, t_\varepsilon)$点上.因此 $\eta_\varepsilon(d) \geqslant \phi$,

$$d \geqslant \rho_\varepsilon(\phi) \equiv \psi^\varepsilon, \forall (x,t) \text{ 靠近}(x_\varepsilon, t_\varepsilon) \text{ 且在}(x_\varepsilon, t_\varepsilon) \text{ 上相等.} \tag{4.41}$$

因 $d(x_0,t_0) > 0$，d 在靠近(x_0,t_0)处下半连续.

$$d(x_\varepsilon, t_\varepsilon) > 0, \quad \text{任意小的 } \varepsilon > 0.$$

依(4.41)和定理 4.2，有

$$\psi_t^\varepsilon - \Delta\psi^\varepsilon \geqslant 0, \quad \text{在}(x_\varepsilon, t_\varepsilon)\text{ 上.}$$

即有

$$\rho'_\varepsilon(\phi)(\phi_t - \Delta\phi) - \rho''_\varepsilon(\phi) \mid D\phi \mid^2 \geqslant 0, \quad \text{在}(x_\varepsilon, t_\varepsilon)\text{ 上.} \tag{4.42}$$

$$\frac{\rho''_\varepsilon(\phi)}{\rho'_\varepsilon(\phi)} = -\eta''_\varepsilon(\psi^\varepsilon)\rho'_\varepsilon(\phi)^2,$$

由(4.42)和(4.37)有

$$\begin{aligned}\phi_t - \Delta\phi &\geqslant -\eta''_\varepsilon(\psi\varepsilon)\rho'_\varepsilon(\phi)^2 \mid D\phi \mid^2 = -\eta''(\psi^\varepsilon) \mid D\psi^\varepsilon \mid^2 \\ &\geqslant -C/\delta.\end{aligned} \tag{4.43}$$

利用这个计算及(4.41)可得 $\mid D\psi^2 \mid^2 \leqslant 1$，令 $\varepsilon \to 0$ 可得

$$\phi_t - \Delta\phi \geqslant -\frac{C}{\delta}, \text{在}(x_0, t_0)\text{ 上.} \tag{4.44}$$

(3) 设 $d(x_0,t_0) \leqslant 0$，因 d 是下半连续，有 $\eta(d) = -\delta$ 在集合$\{\mid x - x_0 \mid \leqslant \sigma, t_0 - \sigma \leqslant t \leqslant t_0\}$ 上，$\sigma > 0$，因此

$$\phi_t(x_0,t_0) \geqslant 0, \quad D^2\phi(x_0,t_0) \leqslant 0.$$

于是

$$\phi_t - \Delta\phi \geqslant 0, \quad \text{在}(x_0, t_0)\text{ 上.} \tag{4.45}$$

(4) 如 $\eta(d) - \phi$ 在(x_0, t^*)达到极小，用定理 4.2 后的附注，可知断言(4.38)成立.

(5) 为证(4.39)，设 $d(x_0,t_0) > \frac{\delta}{2}$，则对小 $\varepsilon > 0$，$d(x_\varepsilon, t_\varepsilon) > \frac{\delta}{2}$，由(4.37)推出 $\eta''(\psi^\varepsilon) = 0$，在$(x_\varepsilon, t_\varepsilon)$上. 用(4.43)可得(4.39).

利用 q，d 可构造 Allen-Cahn 方程的上解，为此，取待定常数

$\alpha,\beta>0$,记

$$W^{\varepsilon}(x,t)=q\left(\frac{\eta(d(x,t))+\alpha t}{\varepsilon}\right)+\varepsilon\beta,x\in\mathbb{R}^n,0\leqslant t\leqslant t^*. \tag{4.46}$$

因截断函数 η 依赖于参数 δ,故构造函数 W^{ε}.

定理 4.5 存在常数 $\alpha=\alpha(\delta)>0,\beta=\beta(\delta)>0$ 和 $\varepsilon_0=\varepsilon_0(\beta)>0$,使得

$$W_t^{\varepsilon}-\Delta W^{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon^2}f(W^{\varepsilon})\geqslant 0,\ \mathbb{R}^n\times(0,t^*], \tag{4.47}$$

$\forall\ 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$.另外,$\alpha,\beta=O(\delta),\delta\to 0$.

证 (1) 选取 $\phi\in C^{\infty}(\mathbb{R}^n\times(0,\infty))$,且设

$$W^{\varepsilon}-\phi \text{ 在}(x_0,t_0)\in\mathbb{R}^n\times(0,t^*]\text{ 达到极小}, \tag{4.48}$$

$$W^{\varepsilon}-\phi=0,\quad \text{在}(x_0,t_0)\text{ 上}. \tag{4.49}$$

我们必须证明

$$\phi_t-\Delta\phi+\frac{1}{\varepsilon^2}f(\phi)\geqslant 0,\text{在}(x_0,t_0)\text{ 上}, \tag{4.50}$$

其中 ε 充分小,仅依赖于 δ,但与 ϕ 无关.

(2) 记

$$q^{-1}(z)\equiv\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right),\ -1<z<1.$$

置 $\psi(x,t)\equiv\varepsilon q^{-1}(\phi(x,t)-\varepsilon\beta)$,这个函数在靠近$(x_0,t_0)$处是确定的. 因 $-1<\phi(x_0,t_0)-\varepsilon\beta=q\left(\dfrac{\eta(d)+\alpha t}{\varepsilon}\right)<1$, 由于(4.36),(4.46),(4.48),(4.49),有

$$\eta(d)-(\psi-\alpha t)\text{ 在}(x_0,t_0)\text{ 上取得极小}. \tag{4.51}$$

依照引理 4.4 有

$$\psi_t-\Delta\psi\geqslant\alpha-\frac{C}{\delta},\text{在}(x_0,t_0)\text{ 上}, \tag{4.52}$$

$$\psi_t-\Delta\psi\geqslant\alpha,\text{在}(x_0,t_0)\text{ 上},\text{如 } d(x_0,t_0)>\frac{\delta}{2}. \tag{4.53}$$

(3) 因 $\phi\equiv q\left(\dfrac{\psi}{\varepsilon}\right)+\varepsilon\beta$,由计算得

$$\phi_t - \Delta\phi + \frac{1}{\varepsilon^2}f(\phi)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}q'\left(\frac{\psi}{\varepsilon}\right)(\psi_t - \Delta\psi) - \frac{1}{\varepsilon^2}q''\left(\frac{\psi}{\varepsilon}\right)|D\psi|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}f\left(q\left(\frac{\psi}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\beta\right)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}q'\left(\frac{\psi}{\varepsilon}\right)(\psi_t - \Delta\psi) + \frac{1}{\varepsilon^2}q''\left(\frac{\psi}{\varepsilon}\right)(1 - |D\psi|^2)$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon^2}\left[f\left(q\left(\frac{\psi}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\beta\right) - f\left(q\left(\frac{\psi}{\varepsilon}\right)\right)\right], \text{在}(x_0, t_0)\text{上}. \tag{4.54}$$

利用常微分方程(4.35)得到最后等式.

我们必须估计(4.54)中的各项.

情况 1 $d(x_0, t_0) > \frac{\delta}{2}$.

此时$d > \frac{\delta}{2}$,在靠近(x_0, t_0)处,因此在靠近(x_0, t_0)处$\eta(d) = d - \delta$.则由(4.51)推出

$$|D\Psi(x_0, t_0)| = 1.$$

于是,由(4.53)和(4.54)得

$$\phi_t - \Delta\phi + \frac{1}{\varepsilon^2}f(\phi) \geqslant q'\left(\frac{\psi}{\varepsilon}\right)\frac{\alpha}{\varepsilon} + \frac{f'\left(q\left(\frac{\psi}{\varepsilon}\right)\right)\varepsilon\beta + O(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\left[q'\left(\frac{\psi}{\varepsilon}\right)\alpha + f'\left(q\left(\frac{\psi}{\varepsilon}\right)\right)\beta\right] + O(1). \tag{4.55}$$

固定$0 < r < 1$,使得

$$\inf_{r \leqslant |z| \leqslant 1} f'(z) \equiv a_1 > 0,$$

则$\inf\limits_{|q(s)| \leqslant r} q'(s) \equiv a_2 > 0$.

定义

$$\alpha = \frac{\delta}{4t^*}, \beta = a_2\alpha\left[2\|f'\|_{L^\infty((-1,1))}\right]^{-1}, \tag{4.56}$$

则存在两种可能性.

可能性(i) $\left|q\left(\frac{\psi}{\varepsilon}\right)\right| \geqslant r$.

由(4.55)推出

$$\phi_t - \Delta\phi + \frac{1}{\varepsilon^2}f(\phi) \geqslant \frac{a_1\beta}{\varepsilon} + O(1) \geqslant 0, \text{在}(x_0, t_0)\text{处},$$

ε 充分小且依赖于 δ.

可能性(ⅱ) $\left|q\left(\frac{\Psi}{\varepsilon}\right)\right| \leqslant r$.

由(4.55)推出

$$\phi_t - \Delta\phi + \frac{1}{\varepsilon^2}f(\phi) \geqslant \frac{1}{\varepsilon}[a_2\alpha - \|f'\|_{L^\infty}\beta] + O(1)$$

$$= \frac{a_2\alpha}{2\varepsilon} + O(1) \geqslant 0, \text{在}(x_0, t_0)\text{上}.$$

对于小的 ε，ε 依赖于 δ.

所有以上情况均得到(4.50).

情况 2 $d(x_0, t_0) \leqslant \frac{\delta}{2}$.

于以前对 α 和 β 的选取，此时 $\eta(d) \leqslant -\frac{\delta}{2}$，且由(4.56)有

$$\eta(d) + \alpha t_0 \leqslant -\frac{\delta}{2} + \alpha t^* \leqslant -\frac{\delta}{4},$$

因此从(4.51)得不等式

$$\psi \leqslant -\frac{\delta}{4}, \quad \text{在}(x_0, t_0)\text{上}. \tag{4.57}$$

由定义(4.56)和 η 的定义(4.37)可得 $|D\psi| \leqslant C$，在 (x_0, t_0) 上. 利用(4.52)，(4.54)计算可得

$$\phi_t - \Delta\phi + \frac{1}{\varepsilon^2}f(\phi) \geqslant \frac{1}{\varepsilon}\left[q'\left(\frac{\psi}{\varepsilon}\right)\alpha + f'\left(q\left(\frac{\psi}{\varepsilon}\right)\right)\beta\right]$$

$$+ O(1) - \frac{C}{\varepsilon\delta}q'\left(\frac{\psi}{\varepsilon}\right) - \frac{C}{\varepsilon^2}\left|q''\left(\frac{\psi}{\varepsilon}\right)\right|. \tag{4.58}$$

因 $q'' \geqslant 0$ 在 $(-\infty, 0]$ 上，由(4.57)和(4.37)得

$$\frac{C}{\varepsilon\delta}q'\left(\frac{\psi}{\varepsilon}\right) \leqslant \frac{C}{\varepsilon\delta}q'\left(-\frac{\delta}{4\varepsilon}\right) \leqslant \frac{C}{\varepsilon\delta}\exp\left(-\frac{\delta}{2\varepsilon}\right) = O(1), \quad \varepsilon \to 0.$$

类似地

$$\frac{C}{\varepsilon^2}\left|q''\left(\frac{\psi}{\varepsilon}\right)\right| \leqslant \frac{C}{\varepsilon^2}\exp\left(-\frac{\delta}{2\varepsilon}\right) = O(1), \quad \varepsilon \to 0.$$

我们分析(4.58)的其他各项如同情况 1 的两种情况. 结论是

$$\phi_t - \Delta\phi + \frac{1}{\varepsilon^2}f(\phi) \geqslant 0, \quad 在(x_0, t_0)上.$$

$\forall 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0(\delta)$，$\varepsilon_0(\delta)$ 充分小，所有以上出现的常数均与 ϕ 无关，且 $\varepsilon_0(\delta)$ 的选取不依赖于 ϕ.

现考虑 Allen-Cahn 方程的渐近状态.

考虑 Allen-Cahn 方程

$$\begin{cases} v_t^\varepsilon - \Delta v^\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon^2}f(v^\varepsilon) = 0, & \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ v^\varepsilon = h^\varepsilon, \end{cases} \tag{4.59}$$

其中立方项 f 由(4.34)所定义，初始函数 h^ε 由以下描述.

我们要证明 $v^\varepsilon \to 1$ 在区域 $I \subset \mathbb{R}^n \times [0,\infty]$，$v^\varepsilon \to -1$ 在另一区域 $O \subset \mathbb{R}^n \times [0,\infty]$，交界面 Γ 在 I"内部"和 O"外部"之间，它由平均曲率流所决定.

为了研究渐近形态，我们必须选取特殊的初值函数. 更具体一点，设 Γ_0 表示一个有界的、连通的开集 $U \subset \mathbb{R}^n$ 的光滑边界. 设 d_0 为到 Γ_0 的符号距离函数. 令

$$h^\varepsilon(x) \equiv q\left(\frac{d_0(x)}{\varepsilon}\right), x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.60}$$

于是 h^ε 在 U 内近似为 1，而在 $\mathbb{R}^n \setminus \overline{U}$ 近似为 -1，通过界面 Γ_0 具有过渡 $O(\varepsilon)$，由极大值原理，$-1 < v_\varepsilon < 1, (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty]$.

定理 4.6 我们有

$$v^\varepsilon \to 1 \text{ 在 } I \text{ 的紧子集上一致成立,} \tag{4.61}$$

$$v^\varepsilon \to -1 \text{ 在 } O \text{ 的紧子集上一致成立.} \tag{4.62}$$

证 (1) 当 Γ_0 光滑时，能选 g 为光滑的在靠近 Γ_0 处，且 $|Dg| = 1$，则若 $\delta > 0$ 充分小，集合

$$\Gamma_0^\delta \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = d_0(x) = -2\delta\} \tag{4.63}$$

为光滑的. 置

$$\Gamma_t^\delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid u(x,t) = -2\delta\}, t \geqslant 0, \tag{4.64}$$

从 Γ_0^δ 发展起来. 取 d^δ 表示到 Γ_t^δ 的符号距离函数，d_0^δ 表示到 Γ_0^δ 的

符号距离函数，t_δ^* 表示$\{\Gamma_t^\delta\}_{t\geqslant 0}$ 的熄灭时间.

选取 $\eta(\cdot)$ 如前.置

$$W^{\varepsilon,\delta}(x,t)\equiv q\left(\frac{\eta(d^\delta(x,t))+\alpha t}{\varepsilon}\right)+\varepsilon\beta, \qquad (4.65)$$

其中 α,β 为(4.56) 所给定，t_δ^* 代替 t^*，则对 $0<\varepsilon<\varepsilon_0(\delta)$ 有

$$W_t^{\varepsilon,\delta}-\Delta W^{\varepsilon,\delta}+\frac{1}{\varepsilon^2}f(W^{\varepsilon,\delta})\geqslant 0,\quad \mathbb{R}^n\times(0,t_\delta^*). \qquad (4.66)$$

(2) 我们首先断言

$$W^{\varepsilon,\delta}(x,0)\geqslant h^\varepsilon(x),\quad x\in\mathbb{R}^n. \qquad (4.67)$$

为验证这个不等式，基于(4.60) 充分验证

$$\eta(d_0^\delta(x))\geqslant d_0(x),\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

由于(4.63)，$d_0^\delta(x)\geqslant d_0(x)+2\delta$，因此 $\eta(d_0^\delta(x))\geqslant\eta(d_0(x)+2\delta)$，$(x\in\mathbb{R}^n)$. 充分证明

$$d_0(x)\leqslant\eta(d_0(x)+2\delta),x\in\mathbb{R}^n. \qquad (4.68)$$

由 $d_0(x)\geqslant-\frac{3\delta}{2}$，则 $d_0(x)+2\delta\geqslant\frac{\delta}{2}$；因此

$$\eta(d_0(x)+2\delta)=d_0(x)+\delta\geqslant d_0(x).$$

另一方面，如 $d_0(x)\leqslant-(\frac{3}{2})\delta$，(4.68) 是显然的，$\eta\geqslant-\delta$.

(3) 记

$$W=e^{-\lambda t}W^{\varepsilon,\delta},\lambda>0. \qquad (4.69)$$

可断言

$$W_t-\Delta W+\lambda W+\frac{e^{-\lambda t}}{\varepsilon^2}f(e^{\lambda t}W)\geqslant 0,\mathbb{R}^n\times(0,t_\delta^*]. \qquad (4.70)$$

为验证这一点，选取 $\phi\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times(0,\infty))$，且设

$$W-\phi \text{ 在}(x_0,t_0)\in\mathbb{R}^n\times(0,t_\delta^*]\text{ 上达到极小},$$

且 $W-\phi=0$ 在(x_0,t_0) 上，则

$$e^{-\lambda t}W^{\varepsilon,\delta}=W\geqslant\phi,\mathbb{R}^n\times(0,t_\delta^*],$$

且在(x_0,t_0) 处相等，因此

$$W^{\varepsilon,\delta}\geqslant\psi,\mathbb{R}^n\times(0,t_\delta^*],$$

在(x_0,t_0)处相等. 令 $\psi = e^{\lambda t}\phi$,从(4.66)推出

$$\psi_t - \Delta\psi + \frac{1}{\varepsilon^2}f(\psi) \geqslant 0, \quad 在(x_0,t_0)上.$$

最后不等式为

$$\phi_t - \Delta\phi + \lambda\phi + \frac{e^{-\lambda t}}{\varepsilon^2}f(e^{\lambda t}\phi) \geqslant 0, \quad 在(x_0,t_0)上.$$

这就建立了(4.70).

(4) 令

$$\lambda = \lambda_\varepsilon \equiv \frac{2\|f'\|_{L^\infty((-1,1))}}{\varepsilon^2},$$

则对每个 t,映照

$$z \to \lambda z + \frac{e^{-\lambda t}}{\varepsilon^2}f(e^{\lambda t}z) \text{ 是严格增加的.} \tag{4.71}$$

(5) 现断言

$$W^{\varepsilon,\delta} \geqslant v^\varepsilon, \mathbb{R}^n \times (0,t_\delta^*]. \tag{4.72}$$

的确,反之则有

$$W^{\varepsilon,\delta} < v^\varepsilon, 在\mathbb{R}^n \times [0,t_\delta^*] \text{上的某处}.$$

推之,

$$W < v, 在\mathbb{R}^n \times (0,t_\delta^*] \text{上的某处},$$

其中 $W = e^{-\lambda t}W^{\varepsilon,\delta}, v = e^{-\lambda t}v^\varepsilon$,函数 W 是下半连续,且

$$W \geqslant v, 在\mathbb{R}^n \times \{t = 0\} 上.$$

因此,如有必要扰动 W,能设存在一点$(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^n \times [0,t_\delta^*]$,使得

$$(W - v)(x_0,t_0) = \min_{\mathbb{R}^n \times [0,t_\delta^*]}(W - v) \equiv b < 0, \tag{4.73}$$

事实上,这样的点永远存在,因为

$$\varliminf_{|x|\to\infty} W \geqslant e^{-\lambda t}(-1 + \varepsilon\beta) > - \lim_{|x|\to\infty} v = e^{-\lambda t}.$$

由(4.59)有

$$v_t - \Delta v + \lambda v + \frac{e^{-\lambda t}}{\varepsilon^2}f(e^{\lambda t}v) = 0, \mathbb{R}^n \times (0,\infty). \tag{4.74}$$

如

$$\phi \equiv v + b, \tag{4.75}$$

则 $\phi \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$，由此和(4.73)有 $W - \phi$ 在(x_0,t_0)上达到极小，且 $W - \phi = 0$ 在(x_0,t_0)上，由上面可推出

$$\phi_t - \Delta\phi + \lambda\phi + \frac{e^{-\lambda t}}{\varepsilon^2} f(e^{\lambda t}\phi) \geq 0, \quad 在(x_0,t_0)上. \tag{4.76}$$

因 $b < 0, \phi < v$，由(4.71)，(4.75)，(4.76)得

$$v_t - \Delta v + \lambda v + \frac{e^{-\lambda t}}{\varepsilon^2} f(e^{\lambda t} v) > 0, \quad 在(x_0,t_0)上,$$

这和(4.74)矛盾，从而证明了断言(4.72).

(6) 利用(4.72)和辅助函数 $W^{\varepsilon,\delta}$ 的定义(4.65)，我们发现

$$q\left(\frac{\eta(d^\delta(x,t)) + \alpha t}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\beta \geqslant v^\varepsilon_{(x,t)}, x \in \mathbb{R}^n, 0 \leqslant t \leqslant t_\delta^*. \tag{4.77}$$

如 $\eta(d^\delta(x,t)) + \alpha t \leqslant -\delta + \alpha t_\delta^* \leqslant -\frac{3}{4}\delta$，由(4.56)，$t_\delta^*$ 置换 t^*，则有

$$\lim_{\varepsilon\to 0} q\left(\frac{\eta(d^\delta(x,t)) + \alpha t}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\beta = -1.$$

基于(4.77)有

$$\lim_{\varepsilon\to 0} v^\varepsilon(x,t) = -1,$$

在 $Q^\delta \equiv \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,t_\delta^*] \mid u(x,t) < -2\delta\}$ 上一致成立，δ 充分小，特别地

$$\lim_{\varepsilon\to 0} v^\varepsilon(x,t) = -1,$$

在 Q^δ 的紧子集上一致成立，δ 充分小. 因

$$O = \bigcup_{\delta > 0} Q^\delta,$$

(4.61)证毕，(4.62)可类似地证明.

利用能量法可证

$$v^{\varepsilon_j} \to \pm 1, \mathbb{R}^n \times [0,\infty). \tag{4.78}$$

事实上，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{\varepsilon}{2} \mid Dv^\varepsilon \mid^2 + \frac{1}{\varepsilon}F(v^\varepsilon)\right]\mathrm{d}x$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^n} \left[\varepsilon D v^\varepsilon \cdot D v_t^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} f(v^\varepsilon) v_t^\varepsilon \right] \mathrm{d}x$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} v_t^\varepsilon \left(-\varepsilon \Delta v^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} f(v^\varepsilon) \right) \mathrm{d}x$$

$$= -\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} (v_t^\varepsilon)^2 \, \mathrm{d}x \leqslant 0,$$

因此

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{\varepsilon}{2} | D v^\varepsilon |^2 + \frac{1}{\varepsilon} F(v^\varepsilon) \right] \mathrm{d}x + \varepsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} (v_t^\varepsilon)^2 \mathrm{d}x \mathrm{d}t$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{\varepsilon}{2} | D h^\varepsilon |^2 + \frac{1}{\varepsilon} F(h^\varepsilon) \right] \mathrm{d}x \leqslant C < \infty.$$

上式是基于初值函数 h^ε 在(4.60)中的特殊形式得到的，由以上不等式有

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} F(v^\varepsilon) \mathrm{d}x \mathrm{d}t \leqslant O(\varepsilon), \varepsilon \to 0, T > 0.$$

可推出

$$(v^\varepsilon)^2 \to 1, \quad \text{在} \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \text{中几乎处处收敛}.$$

特别地，如 $G(z) \equiv \left(\frac{z^3}{3} \right) - z$，记

$$\overline{v^\varepsilon} = G(v^\varepsilon).$$

可得

$$\int_{\mathbb{R}^n} | D \overline{v^\varepsilon} | \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} | (v^\varepsilon)^2 - 1 | | D v^\varepsilon | \, \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{\varepsilon}{2} | D v^\varepsilon |^2 + \frac{F(v^\varepsilon)}{\varepsilon} \right] \mathrm{d}x \leqslant C < \infty,$$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} | \overline{v_t^\varepsilon} | \, \mathrm{d}x \mathrm{d}t = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} | (v^\varepsilon)^2 - 1 | | v_t^\varepsilon | \, \mathrm{d}x \mathrm{d}t$$

$$\leqslant \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \left[\varepsilon (v_t^\varepsilon)^2 + \frac{1}{2\varepsilon} F(v^\varepsilon) \right] \mathrm{d}x \mathrm{d}t \leqslant CT < \infty.$$

因此 $\{\overline{v^\varepsilon}\}_{\varepsilon > 0}$ 在 $BV \subset (\mathbb{R}^n \times (0, T))$ 中有界，$T > 0$，于是在 $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n \times (0, T])$ 上准紧. 推出 $\{v^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ 在 $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ 上准

紧,因此可选取子序列使得

$$v^{\varepsilon_j} \to \pm 1, \mathbb{R}^n \times [0,\infty).$$

定理 4.6 的断言

$$v^{\varepsilon} \to 1, \quad 在\ I\ 中,$$

$$v^{\varepsilon} \to -1, \quad 在\ O\ 中,$$

精确化上述结果.

在文献[11]中考虑如下 Ginzburg-Landau 方程

$$u_t^{\varepsilon} - \Delta u^{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2} f(u^{\varepsilon}) = 0, \mathbb{R}^d \times (0,\infty), \tag{4.79}$$

$$u^{\varepsilon}(0,x) = u_0^{\varepsilon}(x), x \in \mathbb{R}^d, \tag{4.80}$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时的渐近状态,其中非线性项 f 具有位势 W,

$$W(u) = \frac{1}{2}(u^2-1)^2, f(u) = W'(u) = 2u(u^2-1),$$

在假设(A)下证明了

(a) $u^{\varepsilon_n} \to 1$,在 P 的有界子集上一致成立;

(b) $u^{\varepsilon_n} \to -1$,在 N 的有界子集上一致成立;

(c) $\Gamma = P \cup N$ 的余集具有 d 维 Hausdorff 维数,且它由平均曲率运动所决定,

其中 P, N 为 $\mathbb{R}^d \times (0,\infty)$ 的二个不相连的开子集,ε_n 为子序列.

对任意 $\delta > 0$,存在正常数 K_δ 和 η 使得对任意连续函数 ϕ,

$$\text{(A)}\sup\left\{\int |\phi(x)| \mu^{\varepsilon}(dx;dt) : \varepsilon \in (0,1), t \in \left[\delta, \frac{1}{\delta}\right]\right\}$$

$$\leqslant K_\delta \sup\{|\phi(x)| e^{\eta(x)} : x \in R^d\},$$

其中

$$\mu^{\varepsilon}(\mathrm{d}x;t) = \left[\frac{\varepsilon}{2}|\mathrm{D}u^{\varepsilon}(x,t)|^2 + \frac{1}{\varepsilon}W(u^{\varepsilon}(x,t)\right]\mathrm{d}x. \tag{4.81}$$

乘(4.79)以 $\varepsilon u_t^{\varepsilon}$,分部积分得

$$E^{\varepsilon}(t_1) - E^{\varepsilon}(t_2) = -\varepsilon\int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathbb{R}^d}(u_t^{\varepsilon})^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t, t_1 > t_2, \tag{4.82}$$

其中

$$E^{\varepsilon}(t) = \mu^{\varepsilon}(\mathbb{R}^d;t) = \int_{\mathbb{R}^d}\left[\frac{\varepsilon}{2}|\mathrm{D}u^{\varepsilon}(x,t)|^2 + \frac{1}{\varepsilon}W(u^{\varepsilon}(x,t))\right]\mathrm{d}x.$$

计算表明,如存在函数 z_0^ε,常数 $\lambda \geqslant 1$ 和具有限周边的有界开集 Ω 满足

$$u_0^\varepsilon(x) = q\left(\frac{z_0^\varepsilon(x)}{\varepsilon}\right),$$

$$q(r) = \tanh(r),\ |Dz_0^\varepsilon| \leqslant \lambda,\ \frac{1}{\lambda}d(x) \leqslant z_0^\varepsilon(x) \leqslant \lambda d(x),$$

其中 $d(x)$ 为 x 到 $\partial\Omega$ 的符号距离函数,则 $E^\varepsilon(0)$ 对 ε 是有界的.

设 $d_0(x)$ 为 x 到 Γ_0 的符号距离,选取 $\lambda > 0$ 使得

$$d_0 \in C^2(\Omega_\lambda),\Omega_\lambda = \{x \in {}^d : |d_0(x)| < 2\lambda\}. \tag{4.83}$$

定理 4.7 对任何 $\delta, m > 0$,存在常数 $C_1, C_2 > 0$,使得对

$$t \in I_\varepsilon = \left[C_1\varepsilon^2\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), C_2\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right], \tag{4.84}$$

有

$$\left|u^\varepsilon(x,t) - q\left(\frac{d_0(x)}{\varepsilon}\right)\right| \leqslant \delta,\text{若 } |d_0(x)| \leqslant \lambda, \tag{4.85}$$

$$|u^\varepsilon(x,t) - \mathrm{sign}[u_0(x)]| \leqslant \varepsilon^m,\text{若 } |d_0(x)| \geqslant \lambda, \tag{4.86}$$

这里 $q(r) = \tanh(r), C_1, C_2$ 表示由定理构造的常数,如 $m = 2$, $\delta = \dfrac{1}{8}$,则令

$$C_3 = q^{-1}\left(\frac{7}{8}\right). \tag{*}$$

固定 $t \in I_\varepsilon$,则对 $d(x) \in [\varepsilon C_3, \lambda]$,由(4.85) 得

$$u^\varepsilon(x,t) \geqslant q^{-1}\left(\frac{d(x)}{\varepsilon}\right) - \delta \geqslant \frac{3}{4}.$$

如 $d(x) \geqslant \lambda$,(4.86) 推出上面不等式,如 $\varepsilon^2 < \dfrac{1}{4}$.因此

$$u^\varepsilon(x,t) \geqslant \frac{3}{4}, \forall\, \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}, t \in I_\varepsilon, d(x) \geqslant \varepsilon C_3. \tag{4.87}$$

类似地有

$$u^\varepsilon(x,t) \leqslant -\frac{3}{4}, \forall\, \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}, t \in I_3, d(x) \leqslant -\varepsilon C_3. \tag{4.88}$$

引理 4.8 存在常数 K,与 ε 无关,满足

$$|Du^\varepsilon(x,t)| \leqslant K/\varepsilon. \tag{4.89}$$

证 因 $|u_0|\leqslant 1$，$|u^\varepsilon(x,t)|\leqslant 1$，$\forall(t,x)$，令 $g(x,t)=\frac{1}{\varepsilon^2}f(u^\varepsilon(x,t))$，则对 $\forall 0\leqslant\tau\leqslant t$，

$$u^\varepsilon(x,t)=[G(\cdot,t-\tau)*u^\varepsilon(\cdot,\tau)](x)+\int_\tau^t[G(\cdot,t-s-\tau)*g(\cdot,s)](x)\mathrm{d}s, \tag{4.90}$$

其中 * 表示卷积，G 为热核，即

$$G(x,\tau)=\frac{1}{(4\pi\tau)^{1/2}}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4\tau}\right).$$

(4.90) 对 x_j 作微分，利用卷积和热核的性质可得

$$\left|u^\varepsilon_{x_j}(x,t)\right|\leqslant\|D_jG(\cdot,t-\tau)\|_{L^1}\|u^\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{L^2}$$

$$+\int_\tau^t\|D_jG(\cdot,t-s-\tau)\|_{L_1}\|g\|_{L^2}\mathrm{d}x\leqslant\frac{C}{\sqrt{t-\tau}}+\frac{C}{\varepsilon^2}\sqrt{t-\tau},$$

其中 C 为适当常数，选 $\tau=t-\varepsilon^2$ 即得(4.89).

现考虑靠近界面的形态，严格证明(4.85)，(4.86). 设 λ 为(4.83) 所确定，令

$$t_1=C_1\varepsilon^2\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{4.91}$$

定理 4.9 存在 $\mu,K>0$，使得对充分小的 ε 有

$$u^\varepsilon(x,t)\geqslant W(t-t_1,d_0(x)), \tag{4.92}$$
$$\forall t\in I_\varepsilon, d_0(x)\in[\varepsilon C_3,\lambda],$$

$$u^\varepsilon(x,t)\geqslant -W(t-t_1,|d_0(x)|), \tag{4.93}$$
$$\forall t\in I_\varepsilon, d_0(x)\in[-\lambda,-\varepsilon C_3],$$

其中

$$W(d,t)=\max\left\{q\left(\frac{d-Kt}{\varepsilon}-K\right)-K\varepsilon-\frac{1}{4}\exp\left(-\frac{\mu t}{\varepsilon}\right),\frac{3}{4}\right\}.$$

证 我们仅证明(4.92)，(4.93) 的证明是类似的.

(1) 基于(4.83)，存在 $d(x)\in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ 满足

$$d(x)=d_0(x), 若\ |d_0(x)|\leqslant\lambda, \tag{4.94}$$

$$|d(x)|\geqslant\lambda, 若\ |d_0(x)|\geqslant\lambda, \tag{4.95}$$

$$|Dd(x)| \leqslant 1, \forall x. \tag{4.96}$$

对 $\xi(t), p(t) \geqslant 0$(待定),定义

$$v(x,t) = q\left[\frac{d(x) - \varepsilon C_3 - \xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon}\right] - p\left(\frac{t}{\varepsilon}\right),$$

其中 C_3 为(*)所定义.

我们将证明对于适当选取的 $\xi(\cdot), p(\cdot)$ 和充分小的 $\varepsilon > 0$, v 是(4.79)在 $\{v \geqslant 0\}$ 上的下解.事实上,由直接计算可得

$$\begin{aligned} I := & \ v_t - \Delta v + \frac{1}{\varepsilon^2} f(v) \\ = & \ \frac{1}{\varepsilon} q'(\cdots)\left[-\frac{1}{\varepsilon}\xi'\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - \Delta d(x)\right] - \frac{1}{\varepsilon} p'\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \\ & + \frac{1}{\varepsilon^2}[f(v) - q''(\cdots)|Dd|^2], \end{aligned}$$

其中$(\cdots)$表示$\left[d(x) - \varepsilon C_3 - \xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right] \Big/ \varepsilon$.

(2) 因 $q(\cdots) = v + p, p \geqslant 0, q(\cdots) \geqslant 0, v(x,t) \geqslant 0$,因此在 $\{v \geqslant 0\}$, $q''(\cdots) \leqslant 0$,且由(4.96)有

$$q''(\cdots)|Dd|^2 \geqslant q''(\cdots) = f(q(\cdots)).$$

于是在 $\{v \geqslant 0\}$ 上我们有

$$\begin{aligned} I \leqslant & -\frac{1}{\varepsilon^2} q'(\cdots)\xi'\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{\varepsilon} p'\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \\ & + \frac{1}{\varepsilon^2}[f(v) - f(q(\cdots))] + \frac{\beta}{\varepsilon}, \end{aligned} \tag{4.97}$$

这里 $\beta = \| q' \|_\infty \| \Delta d \|_\infty$.

(3) 置

$$\mu = f'\left(\frac{5}{8}\right) = \min\{f'(u) : u \geqslant \frac{5}{8}\} > 0, \tag{4.98}$$

$$p(\tau) = \frac{\varepsilon\beta}{\mu} + \left(\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon\beta}{\mu}\right)\exp\left(-\frac{\mu z}{\varepsilon}\right), \quad \tau \geqslant 0. \tag{4.99}$$

选取 $\xi \geqslant 0$,且满足

$$\xi' \geqslant 0. \tag{4.100}$$

(4) 设

$$q(\cdots)\in\left[\frac{7}{8},1\right]. \tag{4.101}$$

当 $q(\cdots)\leqslant\frac{7}{8}$ 时将在下面分析. 因 $|p(\tau)|\leqslant\frac{1}{4}$, 由(4.101)推出

$$v(x,t)=q(\cdots)-p\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\geqslant\frac{5}{8},$$

又 $v=q(\cdots)-p\leqslant q(\cdots)$, (4.98) 推出

$$f(v(x,t))-f(q(\cdots))\leqslant-\mu p\left(\frac{t}{\varepsilon}\right).$$

由(4.99), (4.100) 和不等式(4.97) 可得

$$I\leqslant\frac{\beta}{\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon}p'\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)-\frac{\mu}{\varepsilon^2}p\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)=0, \text{在} \{v\geqslant 0\} \text{上}.$$

(5) 设(4.101) 不成立, 即

$$q(\cdots)\leqslant\frac{7}{8},$$

则在 $\{v\geqslant 0\}$ 上, $q(\cdots)\in\left[0,\frac{7}{4}\right]$, 且

$$q'(\cdots)=1-q(\cdots)^2\geqslant 1-\left(\frac{7}{8}\right)^2=r. \tag{4.102}$$

令

$$\alpha=\max\{|f'(u)|:u\in[0,1]\}.$$

因 $v\leqslant 1$ 在 $\{v\geqslant 0\}$ 上, 我们有

$$f(v)-f(q(\cdots))\leqslant\alpha[v(x,t)-q(\cdots)]=\alpha p\left(\frac{t}{\varepsilon}\right).$$

利用以上不等式和(4.102), 在(4.97) 中可得

$$I\leqslant-\frac{r}{\varepsilon^2}\xi'\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)-\frac{1}{\varepsilon}p'\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)+\frac{\alpha}{\varepsilon^2}p\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)+\frac{\beta}{\varepsilon}.$$

我们选取 $\xi(\cdot)$ 满足 $\xi(0)=0$, 且

$$\xi'(\tau)=\frac{1}{r}[\beta\varepsilon+\alpha p(\tau)-\varepsilon p'(\tau)]=\frac{\alpha+\mu}{r}p(\tau),\ \tau\geqslant 0,$$

由(4.99) 能积分以上方程

$$\xi(\tau)=\frac{\varepsilon}{r}\left(1+\frac{\alpha}{\mu}\right)\left[\beta\tau+\left(\frac{1}{4}-\frac{\varepsilon\beta}{\mu}\right)\left(1-\exp\left(-\frac{\mu\tau}{\varepsilon}\right)\right)\right].$$

易知 $\xi' \geqslant 0$.

(6) 由前面两步可知

$$I \leqslant 0, \text{在}\{v \geqslant 0\}\text{上}.$$

由(4.87)有

$$u^{\varepsilon}(x,t) \geqslant \frac{3}{4}, \forall t \in I_{\varepsilon}, d_0(x) \geqslant \varepsilon C_3.$$

特别

$$v(x,0) = q(\cdots) - \frac{1}{4} \leqslant \frac{3}{4} \leqslant u^{\varepsilon}(x,t), \forall d_0(x) \geqslant \varepsilon C_3.$$

因 $p, \xi > 0$,

$$v(x,t-t_1) \leqslant q(0) = 0 \leqslant u^{\varepsilon}(x,t), \forall t \in I_{\varepsilon}, \forall d_0(x) = \varepsilon C_3.$$

因 $u^{\varepsilon}(x,t) \geqslant 0, \forall t \in I_{\varepsilon}, d_0(x) \geqslant \varepsilon C_3$,极大值原则推出

$$u^{\varepsilon}(x,t) \geqslant v(x,t-t_1), \forall t \in I_{\varepsilon}, d_0(x) \geqslant \varepsilon C_3. \quad (4.103)$$

(4.92) 由(4.103),(4.87) 和 p, ξ 的定义得到.

以上作梯度估计,即估计 $|Du^{\varepsilon}|$ 远离界面的上界. 令 t_1 如同(4.91),$d \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ 为 d_0 的扩张,满足(4.94),(4.95),(4.96)且 C_3 为(*)所定义.

定理 4.10 存在 $K, \delta, \alpha > 0$ 满足

$$|Du^{\varepsilon}(x,t)|^2 \leqslant \frac{K^2}{\varepsilon^2}\left[\exp\left(-\frac{\delta}{\varepsilon^2}(t-t_1)\right)\right) + \exp\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}(|d(x)| - \varepsilon C_3)\right], \quad (4.104)$$

对一切充分小的 $\varepsilon > 0, t \in I_{\varepsilon}, |d_0(x)| \geqslant \varepsilon C_3$.

证 令

$$\Omega = \{(x,t): t \in I_3, |d_0(x)| > \varepsilon C_3\},$$
$$\varphi(x,t) = |Du^{\varepsilon}(x,t)|^2.$$

(1) 微分(4.79) 并乘以 $2Du^{\varepsilon}$ 可得

$$\varphi_t - \Delta\varphi + \frac{2}{\varepsilon^2} f'(u^{\varepsilon})\varphi = -2\|D^2 u^{\varepsilon}\|^2 \leqslant 0.$$

由(4.87),(4.88)

$$|u^\varepsilon(x,t)| \geqslant \frac{3}{4}, \quad \forall (x,t) \in \Omega.$$

令

$$\delta = 2f'\left(\frac{3}{4}\right) = \min\{f'(u): |u| \geqslant \frac{3}{4}\} > 0,$$

则

$$\varphi_t - \Delta\varphi + \frac{\delta}{\varepsilon^2}\varphi \leqslant 0, \quad 在\ \Omega\ 上. \tag{4.105}$$

(2) 令

$$\psi(x,t) = \frac{K^2}{\varepsilon^2}\left\{\exp\left(-\frac{\delta}{\varepsilon^2}(t-t_1)\right) + g\left(\frac{|d(x)| - \varepsilon C_3}{\varepsilon}\right)\right\},$$

其中 $K > 0, g(\cdot)$ 是以下方程的惟一有界解.

$$-g_{rr}(r) + \|\Delta d\|_\infty g_r(r) + \delta g(r) = 0, r > 0, \tag{4.106}$$

其中 $g(0) = 1$,则

$$g(r) = e^{-\alpha r}, \alpha = \frac{1}{2}(-\|\Delta d\|_\infty + \sqrt{\|\Delta d\|_\infty^2 + 4\delta}).$$

(3) 我们断言 ψ 为(4.105) 在 Ω 上的上界.

事实上

$$\psi_t - \Delta\psi + \frac{\delta}{\varepsilon^2}\psi = \frac{K^2}{\varepsilon^2}\{-g_{rr}(\cdots)|Dd|^2 - \varepsilon\frac{d}{|d|}\Delta d g_r(\cdots) + \delta g(\cdots)\},$$

这里$(\cdots) = (|d(x)| - \varepsilon C_3)/\varepsilon$,因 $g_r \leqslant 0 \leqslant g_{rr}$, $|Dd| \leqslant 1$,推出$(\varepsilon \leqslant 1)$,

$$\psi_t - \Delta\psi + \frac{\delta}{\varepsilon^2}\psi \geqslant 0, \quad 在\ \Omega\ 上.$$

(4) 由 $|Du^\varepsilon| \leqslant \frac{K}{\varepsilon}$ (4.89),可得

$$\psi(x,t_1) \geqslant \frac{K^2}{\varepsilon^2} \geqslant \varphi(x,t_1), \quad \forall |d_0(x)| \geqslant \varepsilon C_1.$$

因 $g(0) = 1$,

$$\psi(x,t) \geqslant K^2/\varepsilon^2 \geqslant \varphi(x,t), \forall |d_0(x)| = \varepsilon C_3.$$

(5) 应用最大值原理得 $\psi \geqslant \varphi$,在 Ω 上.

定理 4.11 设条件(B)成立,则(A)成立,

(B)(ⅰ)u_0^ε 与 ε 无关,即 $u_0^\varepsilon = u_0$;

(ⅱ)$u_0 \in C_b^3(\mathbb{R}^d)$,$|u_0(x)| < 1$;

(ⅲ)$\Gamma_0 = \{x \in \mathbb{R}^d : u_0(x) = 0\}$ 是有界的;

(ⅳ)$\inf\limits_{\Gamma_0} |Du_0| > 0$;

(ⅴ)$\lim\limits_{R \to 0} \sup \inf\limits_{|x| \geqslant R} |u_0(x)| > 0$;

证 设 A 为具有有限 Lebesgue 测度的 $\mathbb{R}^d$ 中的 Borel 子集,令

$\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^d : |d_0(x)| \leqslant \varepsilon C_3\}$,

$\Omega_2 = \{x \in \mathbb{R}^d : |d_0(x)| \in [\varepsilon C_3, \lambda]\}$,

$\Omega_3 = \{x \in \mathbb{R}^d : |d_0(x)| \leqslant \lambda\}$,

$A_i = A \cap \Omega_i, i = 1,2,3$,

$$I_i(t) = \int_{A_i} \frac{\varepsilon}{2} |Du^\varepsilon(x,t)|^2 \mathrm{d}x, \quad i = 1,2,3, \quad t \geqslant 0,$$

$$J_i(t) = \int_{A_i} \frac{1}{\varepsilon} W(u^\varepsilon(x,t)) \mathrm{d}x, \quad i = 1,2,3, \quad t \geqslant 0,$$

其中 λ、C_3 分别由(4.83)和(*)所定,以下将分别估计 I_i 和 J_i.

(1) 由引理 4.8,

$$I_1(t) + J_1(t) \leqslant \int_{A_1} \frac{\varepsilon}{2} \frac{K^2}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} = \left(\frac{K^2}{2} + 1\right) \frac{|\Omega_1|}{\varepsilon}.$$

因 Γ_0 为光滑的、有界的,对充分小的 $\varepsilon > 0$,$|\Omega_1| \leqslant \varepsilon \hat{C}$,$\hat{C}$ 为适当的常数,因此

$$I_1(t) + J_1(t) \leqslant \hat{C}\left(1 + \frac{K^2}{2}\right), \forall t \geqslant 0.$$

(2) 置

$$C_4 = C_1 + \frac{1}{\delta}, t_4 = C_4 \varepsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),$$

其中 $\delta > 0$ 为出现于(4.83)中的常数,C_1 出现于定理 4.7,则对一切 $t \in I_\varepsilon \cap [t_4, \infty)$,由(4.104)有

$$|Du^\varepsilon(x,t)|^2 \leqslant \frac{K^2}{\varepsilon^2}\left[\varepsilon + \exp\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}(|d(x)| - \varepsilon C_1)\right)\right],$$

因此

$$I_2(t) \leqslant \frac{K^2}{2}|A_2| + \frac{K^2}{2\varepsilon}\int_{\Omega_1} \exp\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}(|d(x)| - \varepsilon C_1)\right)\mathrm{d}x.$$

由(4), $d_0 = d$ 在A_2上,在上面积分中我们应用局部正交坐标, $w_1 = d_0(x)$, 因 d_0 在 Ω_2 中光滑,则存在常数 C,依赖于 Γ_0 的$(d-1)$维测度,使得

$$I_2(t) \leqslant \frac{K^2}{2}|A_2| + \frac{K^2}{2\varepsilon}C\int_{\varepsilon C_3}^{\lambda} e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(w_1 - \varepsilon C_3)}\mathrm{d}\, w_1$$

$$\leqslant \frac{K^2}{2}(|A_2| + \hat{C}), \forall\, t \in I_\varepsilon \cap [t_4, \infty),$$

其中 $\hat{C}$ 为适当常数.

(3) 选取常数 C_1, C_2 满足(4.86), $m = 2$, 因此对于所有 $|d_0(x)| \geqslant \lambda, t \in I_3$,

$$W(u^\varepsilon) = \frac{1}{2}(1 - u^\varepsilon)^2(1 + u^\varepsilon)^2$$

$$\leqslant 2(u^\varepsilon - \mathrm{sign}(u_0))^2 \leqslant 2\varepsilon^4.$$

于是 $J_3(t) \leqslant 2\varepsilon^3|A_3|, \forall\, t \in I_\varepsilon$.

(4) 令

$$C_5 = C_1 + \frac{1}{\mu}, t_5 = C_5\varepsilon^2\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),$$

其中 μ 为出现于定理4.9的常数, C_1 为出现于定理4.8的常数,则(4.92),(4.93)推出对一切 $t \in I_\varepsilon \cap [t_5, \infty)$, $|d_0(x)| \in [\varepsilon C_3, \lambda]$, $|u^\varepsilon(x,t)| \geqslant \left[q\left(\frac{|d_0(x)| - Kt}{\varepsilon} - K\right) - K\varepsilon - \frac{1}{4}\varepsilon\right]^+$,

这里$(a)^+ = \max\{a, 0\}$. 因 $|W'(u)| \leqslant 1$, $|u| \leqslant 1$,对充分小的 ξ 有

$$J_2(t) \leqslant \int_{A_2} \frac{1}{\varepsilon}W\left(\left[q\left(\frac{|d_0(x)| - Kt}{\varepsilon} - K\right) - \varepsilon\left(K + \frac{1}{4}\right)\right]^+\right)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_{A_2} \frac{1}{\varepsilon}W\left(\left[q\left(\frac{|d_0(x)| - Kt}{\varepsilon} - K\right)\right]^+\right)\mathrm{d}x + \left(K + \frac{1}{4}\right)|A_2|$$

$$\leqslant \int_{\Omega_2} \frac{1}{\varepsilon} W\left(\left[q\left(\frac{|d_0(x)| - 2K\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right]^+\right)\mathrm{d}x + \left(K + \frac{1}{4}\right)|A_2|,$$

$$\forall t \in I_\varepsilon \cap [t_5, \varepsilon].$$

利用交换积分变量可得

$$J_2(t) \leqslant \frac{C}{\varepsilon}\int_{\varepsilon C_3}^{\lambda} W\left(\left[q\left(\frac{w_1 - 2k}{\varepsilon}\right)\right]^+\right)\mathrm{d}\, w_1 + \left(K + \frac{1}{4}\right)|A_2|$$

$$\leqslant \frac{C}{\varepsilon}\int_{\varepsilon C_3}^{2\varepsilon K} W(0)\mathrm{d}w_1 + \left(K + \frac{1}{4}\right)|A_2| + C\int_0^{\frac{\lambda}{\varepsilon} - 2K} W(q(r))\mathrm{d}r.$$

因 $W(q(r)) = \dfrac{(q'(r))^2}{2} = \dfrac{8e^{4r}}{(e^{2r}+1)^4}$,

$$J_2(t) \leqslant \hat{C}(|A_2| + 1).$$

(5) 联系以上结果推出

$$\mu^\varepsilon(A;t) = \sum_{i=1}^{3}(I_i(t) + J_i(t))$$

$$\leqslant \hat{C}(|A| + 1). \tag{4.107}$$

对 $t \geqslant 0$ 满足

$$t \in I_3, \quad t \geqslant t_4, \quad t \geqslant t_5, \quad t \leqslant \varepsilon, \tag{4.108}$$

其中 ε 充分小.

(6) 设 ψ 为一光滑函数, $|x| \to \infty$ 指数衰减,则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \psi(x)\mu^\varepsilon(dx;t) = -\varepsilon\int \psi\left(-\Delta u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2}f(u^\varepsilon)\right)^2 \mathrm{d}x +$$

$$\varepsilon\int D\psi \cdot Du^\varepsilon\left(-\Delta u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2}f(u^\varepsilon)\right)\mathrm{d}x \leqslant -\varepsilon\int \psi\left(-\Delta u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2}f(u^\varepsilon)\right.$$

$$\left.- \frac{D\psi \cdot Du^\varepsilon}{2\psi}\right)^2 + \varepsilon\int |Du^\varepsilon|^2 \frac{|D\psi|^2}{4\psi}\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon\int |Du^\varepsilon|^2 \frac{|D\psi|^2}{4\psi}\mathrm{d}x.$$

令

$$\hat{\psi}(x) = \exp(-\sqrt{1 + |x|^2}),$$

则 $|\hat{D\psi}| \leqslant \hat{\psi}$,且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \hat{\psi}(x)\mu^\varepsilon(dx;t) \leqslant \frac{1}{2}\int \frac{\varepsilon}{2}|Du^\varepsilon|^2 \hat{\psi} dx$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int \hat{\psi}(x)\mu^{\varepsilon}(\mathrm{d}x;t).$$

因此,对任何 $t \geqslant t_0 > 0$ 有

$$\int \hat{\psi}(x)\mu^{\varepsilon}(dx;t) \leqslant \int \hat{\psi}(x)\mu^{\varepsilon}(dx;t_0)e^{\frac{1-t_0}{2}}. \quad (4.109)$$

(7) 令 t_0 为一点满足(4.108),则由(1)有

$$\int \hat{\psi}(x)\mu^{\varepsilon}(dx;t_0) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} e^{-i}\mu^{\varepsilon}(|x| \in [i-1,i);t_0)$$

$$\leqslant \hat{C}W_d \cdot \sum_{i=1}^{\infty} e^{-i}((1+i)^d - (i-1)^d) \leqslant \hat{C},$$

其中 W_d 为R^d 中单位空间的体积,$\hat{C}$ 为适当常数,则由(4.109)可得

$$\int \hat{\psi}(x)\mu^{\varepsilon}(dx;t) \leqslant \hat{C}e^{\frac{1}{2}},$$

对充分小的 ε 和

$$t \geqslant \max\{C_1, C_4, C_5\}\varepsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad (4.110)$$

成立.

(8) 设 ϕ 为任意连续函数满足

$$\Lambda := \sup\{|d(x)| e^{\sqrt{2}(1+|x|)}; x \in \mathbb{R}^d\} < \infty,$$

则 $|\phi(x)| \leqslant \Lambda\hat{\psi}(x)$,且

$$\int |\phi(x)| \mu^{\varepsilon}(dx;t) \leqslant \hat{C} \wedge e^{\frac{1}{2}}, \quad (4.111)$$

对一切满足(4.110)的 t 和充分小的$\varepsilon > 0$ 成立. 因对任何 $\varepsilon > 0$,由(8),

$$\mu^{\varepsilon}(dx;t) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{K^2}{2} + 4\right)\mathrm{d}x,$$

故对任何 $t \geqslant 0$ 有

$$\int |\phi(x)| \mu^{\varepsilon}(dx;t) \leqslant \frac{\lambda}{2}\left(\frac{K^2}{2} + 1\right)\int \hat{\psi}(x)\mathrm{d}x. \quad (4.112)$$

现从(6.111)和(6.112)推出(A),$\eta = \sqrt{2}$.

参 考 文 献

[1] F. Bethuel, H. Brezis and F. Helein, Ginzburg-Landau vortices, Birkhäuser, Boston, 1994.

[2] Fang Hua Lin, Some Dynamical properties of Ginzburg-Landau vortices, Comm. Pure and Applied Math., Vol. XLIX, 1996, 323—359.

[3] Fang Hua Lin, A remark on the previous paper "Some dynamical properties of Ginzburg-Landau vortices, Comm. Pure and Applied Math., Vol. XLIX, 1996, 361—364.

[4] Fang Hua Lin, Complex Ginzburg-Landau eguations and dynamics of vortices, Filamonts, and codimension 2 submanifolds, comm. Pure and Applied Math, Vol. Ⅱ, 1998, 385—441.

[5] J. Neu, vortices is complex scalar folds, Phys. D., 43, 1990, 385—406.

[6] Fang Hua Lin, solutions of Ginzburg-Landau equations and critical points of the mormalized energy, preprint.

[7] C. Morrey, ([1])The problem of plateam on a Riemannian manifold, Ann of Math., 49 (1948), 807—851; ([2]) Multiple integrals in the calculus of vorictions, Grudlehron, 130. springer, 1966.

[8] S. A. Ladyzhenskaya, O. Л. Уапъиена, И. И. Солонинков, B. A. Linear and quasilinear parabolic type equation.

[9] D. Gilberg and Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, Grundlehron, 224, springer, 1983.

[10] Evans, L. C., Soner, H. M. and Songanidis, P. E. Phase transition and generalized motion by mean curvature, Comm. Pure and Applied Math., 45, 1992, 1097—1123.

[11] H. M. Soner, Ginzburg-Landau equation and motion by mean curvature 11; Development of the initial interface, The Journal of Geometric Analysis, Vol. 7, No. 3, 1997, 477—491.

[General Information]
书名=金兹堡-朗道方程
作者=郭柏灵　黄海洋　蒋慕蓉著
页数=610
SS号=10999888
出版日期=2002年08月第1版

前言
目录